

Jan ULMAN

Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki

Jerzy IHNATOWICZ

Osrodek ETO

Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE METODY SIATEK DO KOMPUTEROWEJ ANALIZY POLA ELEKTRYCZNEGO JEDNOFAZOWYCH LINII PRZESYŁOWYCH KRZYŻUJĄCYCH SIĘ POD KĄTEM PROSTYM

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę siatek do rozwiązania przestronnego zagadnienia Dirichleta dla skrzyżowanych linii przesyłowych wysokiego napięcia. Podano metodę numerycznego określenia warunków brzegowych. Przeprowadzono dyskusję błędów zaokrąglenia wynikających ze zmiennoprzecinkowej arytmetyki maszyny cyfrowej. Uzasadniono celowość zastosowania iteracyjnego procesu Libmana.

1. WSTĘP

Linie przesyłowe o konfiguracji prostych skośnych pod kątem prostym stanowią fragmenty stacji transformatorowo-rozdzielczych. Określenie rozkładu natężenia pola elektrycznego w podanym obszarze sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a w ujęciu trójwymiarowym z odpowiednimi warunkami brzegowymi w postaci sinusoidalnie zmiennych potencjałów poszczególnych przewodów krzyżujących się linii. Wzajemne oddziaływanie na siebie pól elektrycznych wytworzonych przez poszczególne linie przesyłowe skrzyżowane względem siebie powoduje naruszenie liniowości rozkładu ładunku $q(t)$ wzdłuż linii. Przeprowadzenie analizy tego pola przy założeniu upraszczającym o stałej gęstości liniowej ładunków wzdłuż poszczególnych przewodów może prowadzić do znacznych błędów. Konsekwencją takiego założenia jest pominięcie wpływu wzajemnego oddziaływania przewodów usytuowanych względem siebie pod kątem prostym.

W literaturze nie są znane związki określające pojemności wzajemne linii przesyłowych skośnych względem siebie. Celowe więc jest poszukiwanie rozwiązania zagadnienia metodami numerycznymi. Dotychczas zagadnienia te rozwiązywano metodami pomiarowymi oraz modelowymi względnie metoda superpozycji pól od poszczególnych przewodów.

2. POTENCJAŁ QUASI-STATYCZNY W OTOCZENIU LINII PRZESYŁOWYCH

Jeżeli potencjały przewodów roboczych są sinusoidalnie zmienne, to zgodnie z wynikami otrzymanymi w pracach [1], [4] potencjał quasi-statyczny w otoczeniu tych przewodów spełnia w prostokątnym układzie kartezjańskim zespolone równanie Laplace'a

$$\Delta \hat{V}(x, y, z) = 0 \quad (2.1)$$

Podstawą dalszej analizy jest rozwiązanie równania (2.1). Jeśli rozwiążemy równanie (2.1), to od razu możemy wyznaczyć zespolone składowe wektora natężenia pola:

$$\hat{E}_x(x, y, z) = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial x}; \quad \hat{E}_y(x, y, z) = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}; \quad \hat{E}_z(x, y, z) = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial z}$$

a następnie zgodnie ze wzorami podanymi w pracy [1] płaszczyznę wirowania wektora natężenia pola oraz jego maksymalną wartość w wybranych punktach rozważanego obszaru.

3. OKREŚLENIE OBSZARU Ω DLA NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA DIRICHLETA

Numeryczną analizę pola elektrycznego przeprowadzono w oparciu o modele matematyczne przedstawione w pracach [1], [4]. W oparciu o pracę [5] uwzględniono płaszczyznę ziemi przy użyciu metody odbić zwierciadlanych. Konsekwencją takiego postępowania jest uwzględnienie płaszczyzny ziemi jako ekwipotencjalnej płaszczyzny o potencjale zerowym.

Taki model matematyczny zagadnienia połowego został zweryfikowany przy użyciu sond pomiarowych oraz modelowych urządzeń do pomiaru natężeń pól elektrycznych pod liniami przesyłowymi [4].

Weźmy pod uwagę dwie linie przesyłowe skrzyżowane pod kątem prostym.

gdzie:

$\hat{V}(g), \hat{V}(d)$ - potencjał zespolony przewodu górnego i dolnego względem ziemi,

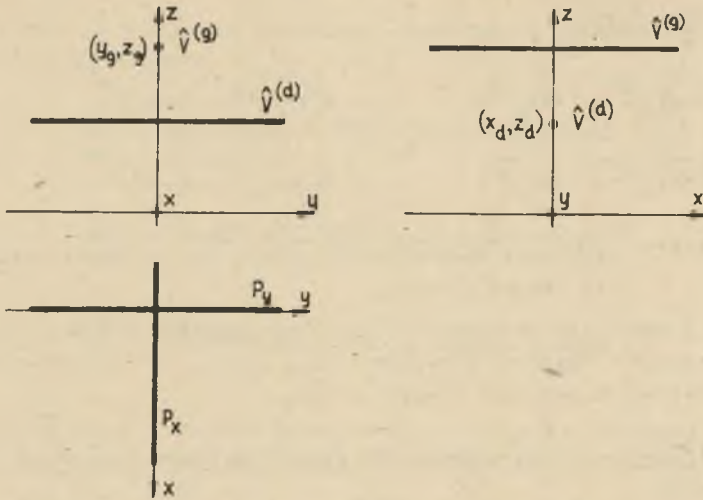
P_x, P_y - przekroje wzdłuż osi x i y ,

$(y_g, z_g)(x_d, z_d)$ - współrzędne przewodu górnego i dolnego.

Przewody fazowe są wiązkami 4 x AFL - 525 o odstępach przewodów w wiązce 457 mm.

W dowolnym punkcie na zewnątrz przewodów potencjał quasi-statyczny spełnia równanie

$$\Delta \hat{V}(x, y, z) = 0$$



Rys. 1. Dwa tory jednofazowe skrzyżowane względem siebie pod kątem prostym z warunkami brzegowymi

$$\hat{V}(x, y, z) \Big|_{(y, z) \in S^{(g)}} = \hat{V}^{(g)}; \quad \hat{V}(x, y, z) \Big|_{(x, z) \in S^{(d)}} = \hat{V}^{(d)}; \quad \hat{V}(x, y, 0) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie:

$S^{(g)}, S^{(d)}$ - powierzchnia przewodu górnego i dolnego.

W celu rozwiązania metodami numerycznymi sformułowanego zagadnienia Dirichleta należy przyjąć, że poszukujemy funkcji $\hat{V}(x, y, z)$ w pewnej ograniczonej przestrzeni Ω . Chcąc jednak uwzględnić ładunek elektryczny na przewodach poza obszarem Ω (w nieskończoności), należy tak określić warunki brzegowe na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω , ażeby uwzględniały one całkowity wpływ przewodów w nieskończoności. Jest to zagadnienie numerycznego określenia warunków brzegowych na $\partial\Omega$ dla zapewnienia odpowiedniej dokładności rozwiązania we wnętrzu obszaru Ω .

Jeśli przyjmujemy, że obszar Ω jest sześcianem określonym nierównościami

$$|x| \leq \frac{a}{2}; \quad |y| \leq \frac{a}{2}; \quad 0 \leq z \leq a \quad \begin{matrix} a > z & (g) \\ a & - \text{krawędź sześcianu,} \end{matrix}$$

to dla $a \rightarrow \infty$ rozwiązanie zagadnienia Dirichleta w punktach $(x, y, z) \in \partial\Omega$ ma postać

$$\hat{V}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (\hat{Q}^{(g)} \ln \frac{r'}{r_g} + \hat{Q}^{(d)} \ln \frac{r'_d}{r_d}) \quad (3.2)$$

gdzie:

$$r'_g = \sqrt{(z+z_g)^2 + (y-y_g)^2}; \quad r_g = \sqrt{(z-z_g)^2 + (y-y_g)^2}$$

$$r'_d = \sqrt{(z+z_d)^2 + (x-x_d)^2}; \quad r_d = \sqrt{(z-z_d)^2 + (x-x_d)^2}$$

$\hat{Q}(g)$, $\hat{Q}(d)$ - zespolone ładunki przypadające na jednostkę długości linii górnej i dolnej.

Wynika to z faktu, że naruszenie liniowości rozkładu ładunku wzdłuż przewodów występuje w obszarze krzyżowania się linii, a im dalej od niego, tym bardziej wpływ ten jest pomijalny [4].

3.1. Zagadnienie numerycznego określenia warunków brzegowych na brzegu $\partial\Omega$

Przypuśćmy, że dysponujemy algorytmem rozwiązującym zagadnienie (3.1) w obszarze Ω' przy z góry narzuconych wartościach w węzłach brzegu $\partial\Omega'$.

Przyjmujemy:

- obszar Ω jest sześcianiem o krawędzi określonej początkowo przez liczbę a ,
- ε - żądana dokładność określenia warunków brzegowych na brzegu $\partial\Omega$,
- δ - liczba > 0 ,
- M - liczba > 0 .

Algorytm postępowania można przedstawić następująco:

Jest rzeczą oczywistą, że obranie początkowej wartości a powinno umożliwić znaczne oddalenie się od skrzyżowania. Liczba M pełni rolę steżkiej, o którą poszerzamy obszar Ω przy kolejnej iteracyjnej próbie wyznaczenia warunków brzegowych. Im większe M , tym szybciej określimy obszar Ω . Liczbę δ dobrze jest przyjąć jako kilka wartości h (np. 3 h do 5 h), h - stała siatki.

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że numeryczna realizacja finalnego algorytmu jest zagadnieniem bardzo złożonym i wymaga zastosowania takich rozwiązań, ażeby zapewnić optymalne wykorzystanie pamięci zewnętrznych maszyny cyfrowej oraz optymalny przy danych rozwiązaniach czas obliczeń.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DIRICHLETA METODĄ SIATEK

Aby otrzymać równanie różnicowe odpowiadające równaniu Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

wystarczy wstawić w miejsce pochodnych cząstkowych odpowiednie ilorazy różnicowe według wzorów

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V(x+h, y, z) - 2V(x, y, z) + V(x-h, y, z)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V(x, y+h, z) - 2V(x, y, z) + V(x, y-h, z)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \approx \frac{V(x, y, z+h) - 2V(x, y, z) + V(x, y, z-h)}{h^2}$$

Dodając stronami, a następnie wyliczając $V(x, y, z)$ otrzymujemy

$$V(x, y, z) = \frac{1}{6} [V(x+h, y, z) + V(x-h, y, z) + V(x, y+h, z) + V(x, y-h, z) + V(x, y, z+h) + V(x, y, z-h)] \quad (4.2)$$

Żeby móc ocenić dokładność takiej zamiany, należy, dla otrzymania równania różnicowego, zastosować wzór Taylora

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l) &= f(x, y, z) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \right) f(x, y, z) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \right)^2 f(x, y, z) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \right)^n f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l), \end{aligned}$$

gdzie $\theta \in (0, 1)$.

Weźmy pod uwagę punkty $A(x, y, z)$, $B(x-h, y)$, $C(x+h, y, z)$, $D(x, y+h, z)$, $E(x, y-h, z)$, $F(x, y, z+h)$, $G(x, y, z-h)$ - środek sześcianu oraz środki jego ścian i wyrażmy wartości funkcji V w punktach B, C, D, E, F, G za pomocą wartości tej funkcji i jej pochodnych w punkcie $A(x, y, z)$.

Zgodnie ze wzorem Taylora, przyjmując w nim $n = 4$, mamy

$$V(x-h, y, z) = V(x, y, z) - h \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{1}{4!} h^4 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4},$$

$$V(x+h, y, z) = V(x, y, z) + h \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{1}{4!} h^4 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}.$$

$$v(x, y-h, z) = v(x, y, z) - h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{1}{4!} h^4 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4},$$

$$v(x, y+h, z) = v(x, y, z) + h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{1}{4!} h^4 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4},$$

$$v(x, y, z-h) = v(x, y, z) - h \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \frac{1}{4!} h^4 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4},$$

$$v(x, y, z+h) = v(x, y, z) + h \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \frac{1}{4!} h^4 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4}.$$

gdzie pochodne cząstkowe do trzeciego rzędu włącznie są liczone w punkcie $A(x, y, z)$, a pochodne czwartego rzędu są liczone w pewnych punktach pośrednich.

Dodając otrzymane równości stronami, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & v(x-h, y, z) + v(x+h, y, z) + v(x, y-h, z) + v(x, y+h, z) + \\ & + v(x, y, z-h) + v(x, y, z+h) = \\ & = 6v(x, y, z) + h^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + R_h(x, y, z) \end{aligned}$$

gdzie reszta

$$R_h(x, y, z) = \frac{h^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial x^2} \right]$$

jest dla $v \in C^{(4)}$ rzędu $O(h^4)$. Stąd mamy

$$\begin{aligned} & v(x-h, y, z) + v(x+h, y, z) + v(x, y-h, z) + v(x, y+h, z) + \\ & + v(x, y, z-h) + v(x, y, z+h) = 6v(x, y, z) + h^2 \Delta v + O(h^4) \end{aligned}$$

i następnie

$$\begin{aligned} \Delta v = \frac{1}{h^2} & \left[v(x-h, y, z) + v(x+h, y, z) + v(x, y-h, z) + \right. \\ & \left. + v(x, y+h, z) + v(x, y, z-h) + v(x, y, z+h) - 6v(x, y, z) \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

Odrzucając składnik $O(h^2)$, otrzymujemy równanie różnicowe przybliżone

$$v(x, y, z) = \frac{1}{6} [v(x+h, y, z) + v(x-h, y, z) + v(x, y+h, z) + v(x, y-h, z) + v(x, y, z+h) + v(x, y, z-h)].$$

odpowiadające równaniu Laplace'a $\Delta V = 0$.

Rozważany w pracy obszar Ω został pokryty siatką sześcienną w taki sposób, że wszystkie punkty (węzły) brzegowe należą do brzegu obszaru $\partial\Omega$. Pozwoliło to uniknąć nadawania poprawek węzłom brzegowym wg wzorów interpolacyjnych.

Przyjmując pewien ostatek h , tworzymy siatkę sześcienną S_h

$$x_i = ih; \quad y_j = jh; \quad z_k = kh; \quad i, j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

uważając przy tym, by węzły (x_i, y_j, z_k) siatki S_h albo należały do obszaru Ω , albo do jego brzegu $\partial\Omega$.

Oznaczając wartość szukanej funkcji $v(x, y, z)$ w punktach (x_i, y_j, z_k) przez $v_{ijk} = v(x_i, y_j, z_k)$, możemy w każdym punkcie wewnętrznym (x_i, y_j, z_k) siatki S_h zastąpić równanie Laplace'a a równaniem różnicowym (4.2). Dla węzłów brzegowych przyjmujemy $v(M) = \varphi(M)$, gdzie M jest punktem brzegu, a φ - funkcją określoną na $\partial\Omega$. Otrzymujemy więc układ równań

$$v_{ijk} = \frac{1}{6} (v_{i-1, j, k} + v_{i+1, j, k} + v_{i, j-1, k} + v_{i, j+1, k} + v_{i, j, k-1} + v_{i, j, k+1}) \quad (4.3)$$

gdzie $(x_{i\pm 1}, y_{j\pm 1}, z_{k\pm 1})$ są punktami rachunkowymi należącymi do wnętrza siatki S_h .

Układ równań (4.3) posiada jednoznaczne rozwiązanie [2].

Ponieważ w rozważanym w pracy zagadnieniu Dirichleta liczba węzłów siatki S_h jest tak duża, że numeryczna realizacja układu (4.3) przekracza wiele tysięcy razy możliwości pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej, tak więc bezpośrednio rozwiązanie jest wręcz niemożliwe.

Liczba równań układu (4.3) jest równa liczbie węzłów wewnętrznych siatki S_h i dla siatki sześciennej wynosi w przybliżeniu $|\Omega|/h^3$, gdzie $|\Omega|$ - objętość obszaru Ω . Istotny wpływ na poprawność numerycznego rozwiązania układu równań (4.3) ma także miara uwarunkowania układu [3], która rośnie mniej więcej tak, jak liczba równań w układzie. Z tego względu stosowanie ścisłych metod rozwiązania dla układu (4.3) uznano za nieuzasadnione i przeprowadzono rozwiązanie metodami iteracyjnymi - ściśle powiązany z wyprowadzonym równaniem (4.3).

Zgodnie z procesem Liouville'a, jeśli $v_{ijk}^{(0)}$ są przybliżeniami początkowymi przybliżenia następnego dla węzłów wewnętrznych (x_i, y_j, z_k) siatki S_h określony wzorem

$$v_{ijk}^{(n)} = \frac{1}{6} \left[v_{i-1,j,k}^{(n-1)} + v_{i+1,j,k}^{(n-1)} + v_{i,j-1,k}^{(n-1)} + v_{i,j+1,k}^{(n-1)} + v_{i,j,k-1}^{(n-1)} + v_{i,j,k+1}^{(n-1)} \right],$$

$n + 1, 2, \dots$

Jako wartości początkowe $v_{ijk}^{(0)}$ wybrano wartości potencjałów w węzłach siatki obliczone przy założeniu stałej gęstości liniowej ładunków wzdłuż przewodu górnego i dolnego.

Na mocy zasady superpozycji:

$$v_{ijk}^{(0)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (Q^{(g)} \ln \frac{r'_g}{r_g} + Q^{(d)} \ln \frac{r'_d}{r_d})$$

gdzie:

$$r'_g = \sqrt{(z_k + z_g)^2 + (y_j - y_g)^2}; \quad r_g = \sqrt{(z_k - z_g)^2 + (y_j - y_g)^2}$$

$$r'_d = \sqrt{(z_k + z_d)^2 + (x_1 - x_d)^2}; \quad r_d = \sqrt{(z_k - z_d)^2 + (x_1 - x_d)^2}$$

$$Q^{(g)} = c^{(g)} v^{(g)}; \quad Q^{(d)} = c^{(d)} v^{(d)}$$

przy czym:

$Q^{(g)}, Q^{(d)}$ - ładunki przypadające na jednostkę długości linii górnej i dolnej.

$c^{(g)}, c^{(d)}$ - maxwellowskie pojemności własne linii górnej i dolnej.

We wzorach na $Q^{(g)}$ i $Q^{(d)}$ pominięto pojemności wzajemne. Nie ma to oczywiście żadnego wpływu na końcowy wynik procesu iteracyjnego [2].

Należy zwrócić uwagę na to, że tak obliczona iteracja zerowa jest bardzo dobrym przybliżeniem końcowego rozwiązania. Dlatego w tym właśnie zagadnieniu korzystnie jest oprzeć się na procesie iteracyjnym Libmana.

Można dowieść [2], że dla dowolnej średnicy h siatki proces Libmana jest zbieżny niezależnie od wyboru wartości początkowych, tj. istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{ijk}^{(n)} = v_{ijk}$$

przy czym błąd rozwiązania v_{ijk} wynosi zgodnie z poprzednimi rozważaniami $O(h^2)$.

Obliczenia numeryczne realizowano dla dwóch wartości h : 0,9 m oraz 0,6 m. Przyjmując dokładność $\epsilon = 0,01$ (stała wykorzystana przy określeniu warunków brzegowych na $\partial\Omega$ w pkt. 3.1) otrzymano:

1) krawędź sześciianu $a \approx 80$ m

2) liczba węzłów siatki $S_h \approx \frac{|\Omega|}{h^3} = \begin{cases} 702331 & \text{dla } h = 0,9 \text{ m} \\ 2370363 & \text{dla } h = 0,6 \text{ m.} \end{cases}$

Obszar Ω został tak określony przez nierówności:

$$|x| \leq \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad |y| \leq \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad 0 \leq z \leq 2a,$$

gdzie $a > z^{(g)}$, aby można było wydzielić dwa podobszary symetryczne (w sensie połowym i geometrycznym). Są to obszary

$$\Omega_1 = \begin{cases} |x| \leq \frac{a}{\sqrt{3}} \\ -\frac{a}{\sqrt{3}} \leq y \leq 0 \\ 0 \leq z \leq 2a \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \Omega_2 = \begin{cases} |x| \leq \frac{a}{\sqrt{3}} \\ 0 \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{3}} \\ 0 \leq z \leq 2a \end{cases}$$

przy czym

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega.$$

Dzięki temu liczba węzłów ulega dwukrotnemu zmniejszeniu. Rozwiązania otrzymane dla $h = 0,9$ oraz $h = 0,6$ pokazały, że wartości w węzłach interesującym nas podobszarze (jest to pae przestrzeni pod skrzyżowaniem do 2 m nad ziemią [4], [1]) różnią się o ok. 0,1%.

Zagadnienia związane z realizacją algorytmu dla tak znacznej liczby węzłów (np. w pamięci operacyjnej mc ODRA 1305 z pamięcią 62 K można jedynie zapamiętać ok. $25 \cdot 10^3$ liczb zmiennoprzecinkowych) stanowią zupełnie odmienną problematykę wchodzącą także w zakres teorii przetwarzania danych. Nie przeprowadzono więc tutaj próby zapisu rozwiązania w języku algorytmicznym.

5. UWAGI O BŁĘDACH ZAOKRĄGLENIA WYNIKAJĄCYCH ZE ZMIENNOPRZECINKOWEJ ARYTMETYKI MASZYNY CYFROWEJ

Zgodnie z procesem Libmana należy rozważyć błąd sumy $\sum_{i=1}^6 x_i$ oraz błąd iloczynu $y \cdot \sum_{i=1}^6 x_i$, gdzie $y = 0,166666\dots$

Stosując oznaczenia ze pracą [6] mamy $S_6 = fl(\sum_{i=1}^6 x_i)$, gdzie S_6 jest wartością otrzymaną z obliczenia $\sum_{i=1}^6 x_i$ o zmiennym przecinku (świadczy o tym operator fl).

Wielkości S_1 do S_6 obliczymy rekurencyjnie

$$S_1 = x_1$$

$$S_p = fl(S_{p-1} + x_p) = (S_{p-1} + x_p) \cdot (1 + \varepsilon_p)$$

gdzie: $|\varepsilon_p| \leq 2^{-t}$, t - precyzja maszyny cyfrowej.

Czyli

$$S_2 = fl(S_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(1 + \varepsilon_2)$$

...

$$S_6 = (x_1 + x_2) \prod_{i=2}^6 (1 + \varepsilon_i) + x_3 \prod_{i=3}^6 (1 + \varepsilon_i) + x_4 \prod_{i=4}^6 (1 + \varepsilon_i) + x_5 \prod_{i=5}^6 (1 + \varepsilon_i) + x_6 (1 + \varepsilon_6)$$

przy czym oszacowania iloczynów są następujące

$$(1 - 2^{-t})^{7-p} \leq \prod_{i=p}^6 (1 + \varepsilon_i) \leq (1 + 2^{-t})^{7-p}, \quad (p = 1, \dots, 6)$$

Górne oszacowanie S_6 : $S_6 \leq (x_1 + x_2)(1 + 2^{-t})^5 + x_3(1 + 2^{-t})^4 + x_4(1 + 2^{-t})^3 + x_5(1 + 2^{-t})^2 + x_6(1 + 2^{-t})$.

Otrzymane oszacowanie zależy od kolejności sumowania. Przy konstrukcji finalnego algorytmu zadbane o to, by zapewnić sumowanie w kolejności rosnących modułów składników. Takie postępowanie pozwala zminimalizować oszacowanie górne błędu, gdyż wyrażeniu $(1 - 2^{-t})^5$ odpowiada najmniejsza wartość sumy dwóch składników. Zgodnie z procesem iteracyjnym Libmana należy jeszcze sumę S_6 pomnożyć przez $0,16666\dots$. Otrzymamy więc wartość iloczynu [6]:

$$fl(S_6 y) = S_6 y (1 + \varepsilon),$$

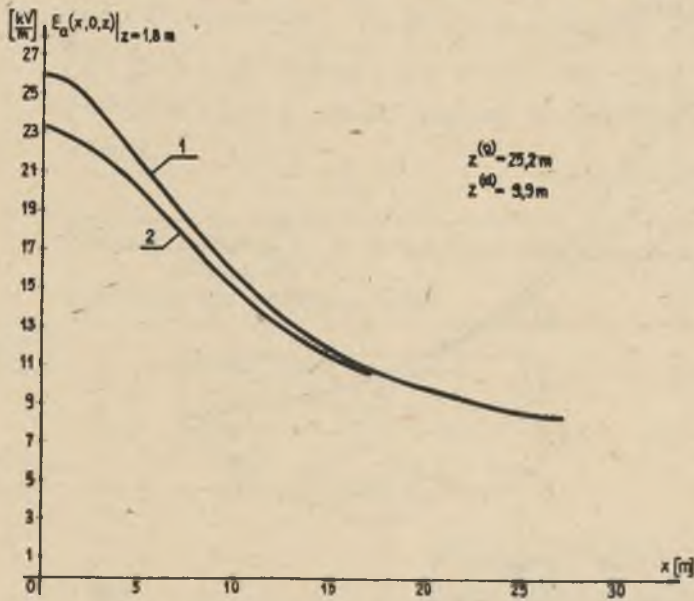
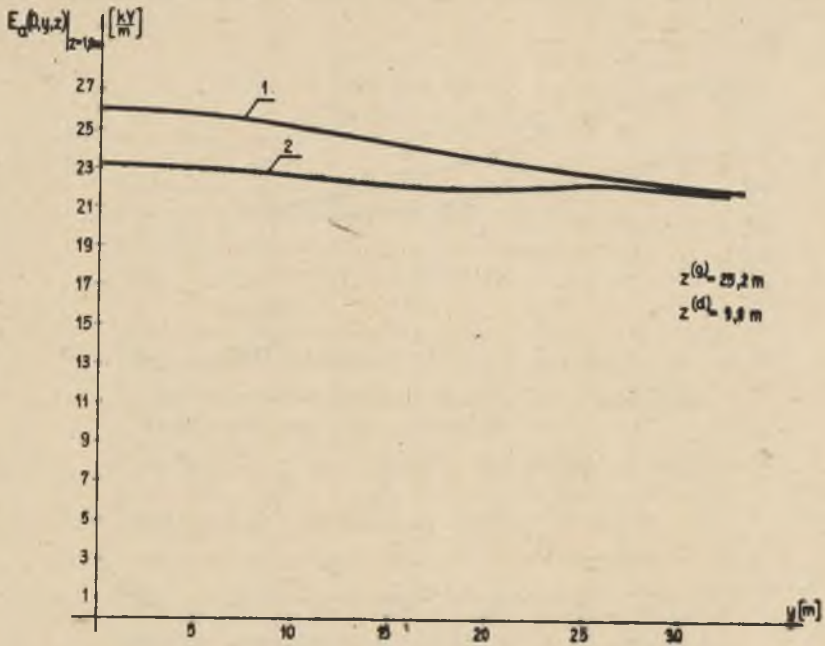
gdzie $y = 0,16666\dots$, $|\varepsilon| \leq 2^{-t}$.

Czyli górne oszacowanie

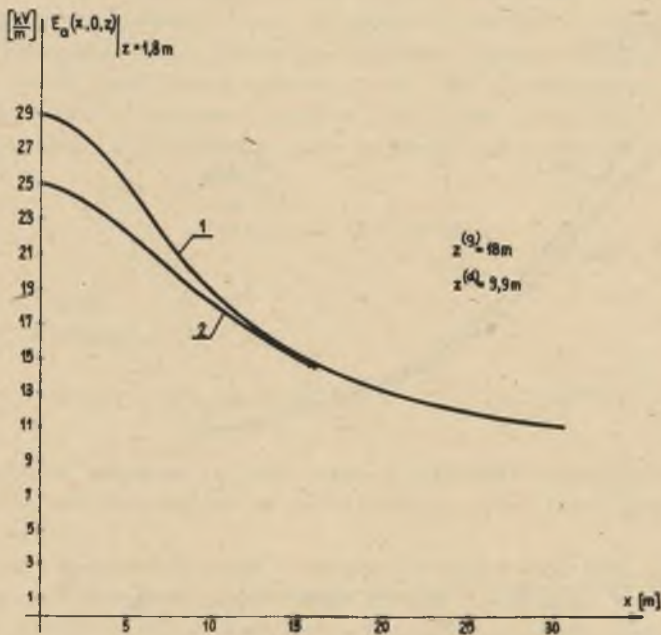
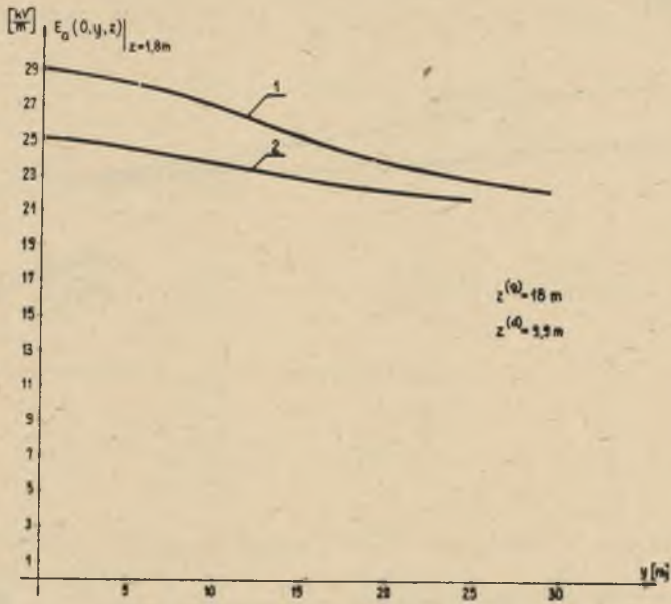
$$fl(S_6 y) \leq y(x_1 + x_2)(1 + 2^{-t})^6 + \dots + yx_6(1 + 2^{-t})^2$$

Warto zwrócić uwagę na to, że w naszym przypadku pewna propagacja błędu w maszynie cyfrowej wpływa na wydłużenie procesu iteracyjnego, a nie na końcowy wynik.

Na rys. 2 i 3 podano wykresy rozkładu natężenia pola elektrycznego przy zmieniającej się wysokości z przewodu górnego. Przyjęto, że potencjały linii mają fazy początkowe równe zero. Opracowany algorytm rozwiązuje problem Dirichleta dla zupełnie dowolnych potencjałów zespolonych linii. Rozwiązane więc zadanie stanowi jego szczególny przypadek.

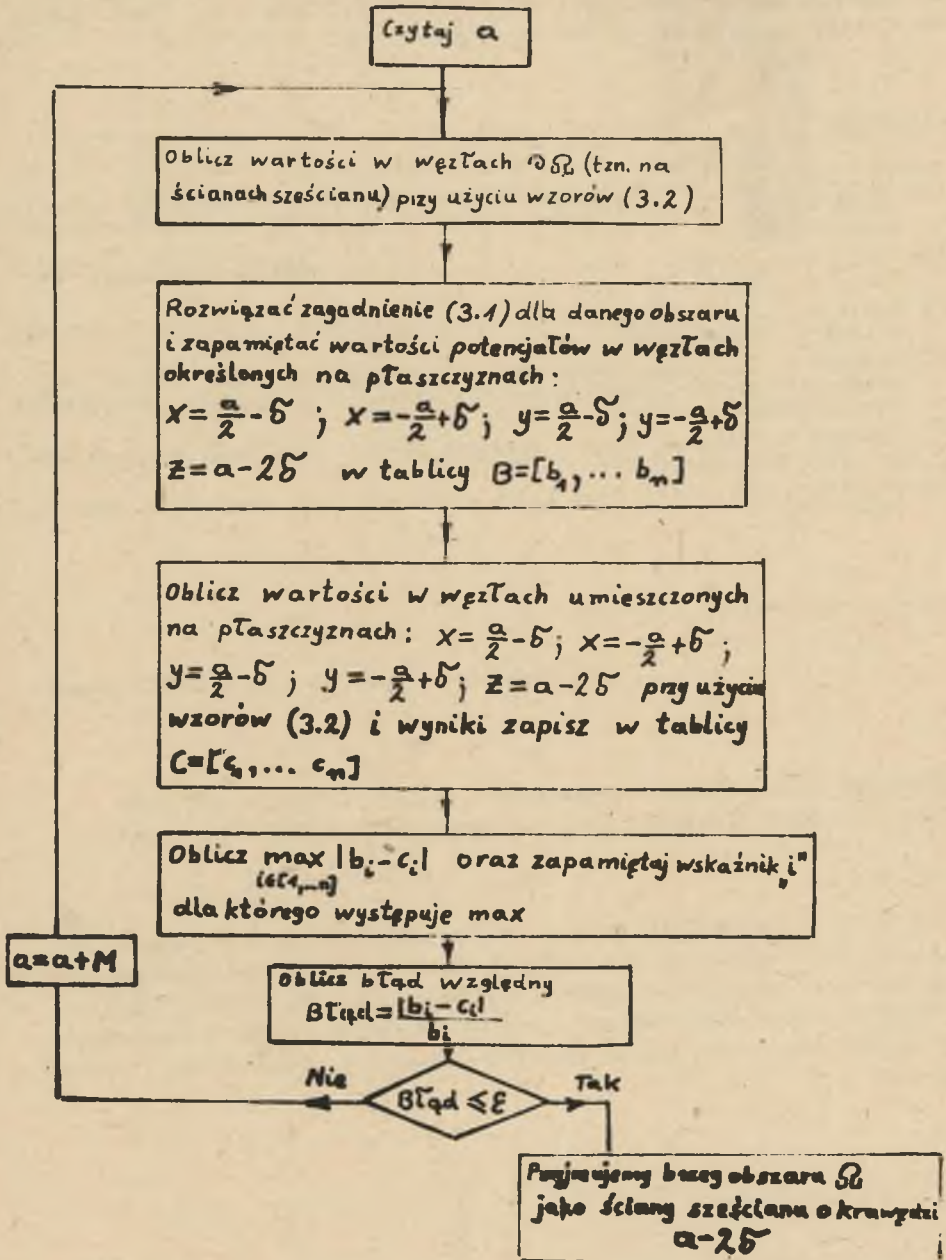


Rys. 2a,b. Rozkład natężenia pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów jednofazowych 735 kV wzdłuż przekrojów P_y i P_x
 1 - rozwiązanie przybliżone, 2 - rozwiązanie dokładne



Rys. 3a,b. Rozkład natężenia pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów jednofazowych 735 kV wzdłuż przekrojów P_y i P_x

1 - rozwiązanie przybliżone, 2 - rozwiązanie dokładne



Rys. 4

Z przedstawionej analizy wynika, że zmniejszenie odległości toru górnego od dolnego z ok. 15 m do 8 m spowodowało znaczne zwiększenie błędu (z 11,5% do 16,5%) rozwiązania zagadnienia Dirichleta przy użyciu wzorów (3.2) w odniesieniu do rozwiązania numerycznego.

LITERATURA

- [1] Baron B.: Pole elektryczne linii przesyłowych trójfazowych najwyższych napięć. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka 73, Gliwice 1980.
- [2] Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań cząstkowych. PWN, Warszawa 1960.
- [3] Fadiejew D.K.; Fadiejewa W.N.: Wycisłitielnyje metody diniejnoje algebrы. Moskwa 1956.
- [4] Groszko M.: Analiza modelowa pola elektrycznego pod liniami napowietrznymi bardzo wysokich napięć w aspekcie zagrożenia środowiska. Praca doktorska, Gliwice 1978.
- [5] Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.
- [6] Wilkinson J.H.: Błędy zaokrągleń w procesach algebraicznych. PWN, Warszawa 1967.

Wpłynęło do redakcji 2 VI 1981 r.

Recenzent: prof. dr inż. Maciej Krakowski

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК К КОМПЬЮТЕРНОМУ АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ОДНОФАЗНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ, СРЕДАЧИ, СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПОД ПРЯМЫМ УГЛОМ

Р е з ю м е

В статье применен метод сеток к решению пространственной задачи Дирихле для скрещивающихся линий передачи высокого напряжения. Представлен метод численного определения режима побережья. Обсуждены ошибки округлений, являющиеся результатом плавающей запятой арифметики цифровой вычислительной машины. Обоснована целесообразность применения итеративного процесса Либмана.

AN APPLICATION OF LATTICE METHOD FOR COMPUTER ANALYSIS OF SINGLE-PHASE TRANSMITTING WIRES WHICH ARE CROSSED AT A RIGHT ANGLE

S u m m a r y

In the paper the lattice method is used for solution the spatial Dirichlet's problem of crossed high-voltage transmitting wires. It is shown how to get the edge conditions in the numerical way. The discussion of computer floating-point errors and application of an iterative Libman's process is also presented.