ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol. 894

Waldemar Czuchra

Zakład Informatyki i Analizy Systemów
Wyższa Szkoła Morska w Gdyni

ITERACYJNA METODA ROZDZIAŁU ZASOBÓW W WIELOKRYTERIALNYM SYSTEMIE O STRUKTURZE HIERARCHICZNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę rozdziału zasobu w hierarchicznym systemie obiektów. Każdy obiekt posiada funkcję celu, której wartość zależy od wartości funkcji celu obiektów położonych na niższych poziomach w hierarchii. Sformułowane w pracy zadanie wielokryterialnego rozdziału zasobu jest rozwiązywane przy użyciu iteracyjnego programowania celowego.

1. Wstęp

Wnioskiem z twierdzenia o hierarchiczności Scholza [4] jest, że każdy realnie istniejący system działający w sposób efektywny posiada specjalną strukturę, której składnikami są hierarchie typu interakcyjnego, agregacyjnego oraz funkcjonalnego. Twierdzenie to orzeka również, że aby zbudowany przez człowieka system techniczny lub społeczny był efektywny i niezawodny powinien posiadać w swej strukturze te trzy wymienione typy hierarchii. Przekonującej argumentacji uzasadniającej tezę, że nieodłączną cechą ludzkiej działalności jest hierarchiczność, dostarczają także Singh i Singh [7].

W pracy rozważa się system składający się z obiektów charakteryzowanych przez pewien mierzalny atrybut, który oznaczony będzie t_n, $n=1,\dots,N$ a n jest numerem obiektu. W zależności od charakteru tego atrybutu oraz powiązań między atrybutami różnych poziomów hierarchii możemy mówić o jednym z trzech typów hierarchii [4]. Wielkość atrybutu zależy od argumentu zwanego dalej zasobem, tzn. $t_n=t_n(x_n)$, gdzie x_n jest zasobem. Zakłada się, że t_n są funkcjami nierosnącymi i wypukłymi. Decydent posiada do swej dyspozycji ograniczoną ilość zasobu, którą może dowolnie rozdzielać pomiędzy obiekty systemu.

Dla każdego obiektu systemu określona jest pewna funkcja celu, która w najprostszym przypadku może być tożsama z wielkością atrybutu ale może także być uzależniona od atrybutów pozostałych obiektów systemu. Funkcję celu obiektu oznaczać się będzie $f_n(t_1(x),\dots, t_N(x))$ lub w skrócie $f_n(x)$, gdzie $n=1,\dots,N$, jest numerem obiektu w systemie oraz x jest wektorem alokacji zasobów do obiektów systemu, tzn. $x=[x_1,x_2,\dots,x_N]$.

Obiekty w systemie posiadają zróżnicowane priorytety-najwyższe na szczycie hierarchii, najniższe na jej dole. Z punktu widzenia decydenta jest to najbardziej naturalny sposób traktowania hierarchii. Obiekty, oprócz priorytetów, posiadają określone poziomy aspiracji funkcji celu. Są one ustalane przez decydenta. Ten zdecentralizowany sposób potraktowania systemu hierarchicznego pozwala sformułować zadanie optymalnego rozdziału zasobu jako zadanie programowania wielokryterialnego.

Wielokryterialne podejście do rozdziału zasobu w systemie typu kompleks operacji jest przedmiotem prac Słowińskiego, m.in. [8] i [9]. Prezentowana tam koncepcja problemu wielokryterialnego różni się od przedstawionej w tej pracy tym, że funkcje celu zadania wektorowej optymalizacji mają charakter globalny i są oparte na różnych miarach: czasowej, kosztowej lub ilości przerwań operacji. W pracy Shimizu i Aiyoshi [6] występuje również rozdział zasobu w systemie hierarchicznym, ale rozpatrywany jest jedynie system dwupoziomowy i jedynie rozdział zasobu pomiędzy obiekty niższego poziomu jest wielokryterialny. Jest on traktowany jako jedno z ograniczeń globalnej funkcji celu. Także w pracy Whitforda i Davisa [10] występuje problem wielokryterialnego rozdziału zasobu i zalecane jest rozwiązywanie tego zadania metodą opartą o metodę programowania celowego.

Również w niniejszej pracy programowanie celowe, a dokładniej jedna z jego metod - iteracyjne programowanie celowe, stanowi podstawę algorytmu znajdującego optymalne rozwiązanie zadania rozdziału zasobu. Matematyczne sformułowanie tego zadania jest przedmiotem rozważań w następnym punkcie, natomiast algorytm przedstawiono w punkcie 3. Punkt 4 pracy zawiera opis przykładu zastosowania prezentowanej metody w przypadku rozdziału zasobu dyskretnego w hierarchii typu agregacyjnego.

2. Sformułowanie problemu

Ogólne matematyczne sformułowanie wielokryterialnego zadania programowania matematycznego zaadaptowane do problemu rozdziału zasobu w systemie można przedstawić następująco

$$\begin{aligned} &\min\left\{ f_1(x), \dots, f_N(x)\right\} \\ &\sum_{n=1}^{N} x_n \leq X \qquad\qquad /1/ \\ &x_n \geq 0, \qquad n \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, N\}$ oraz X jest całkowitą ilością zasobu do rozdziału pomiędzy obiekty systemu. W sformułowaniu programowania celowego Charnesa i Coopera [1] zadanie /1/ można przedstawić

$$\min\left\{ W_0 a_0(d^-, d^+), W_1 a_1(d^-, d^+), \ldots, W_P a_P(d^-, d^+) \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n + d_0^- - d_0^+ = X \qquad /2/$$

$$f_n(x) + d_n^- - d_n^+ = g_n \quad , \quad n \in \mathcal{T}$$

$$x_n \geqslant 0 \quad , \quad n \in \mathcal{T}$$

$$d^-, d^+ \geqslant 0 \quad , \quad d_n^- d_n^+ = 0 \quad , \quad n \in \mathcal{T}$$

W /2/ zastosowano następujące oznaczenia:

1. d_0^-, d_0^+ oznaczają odpowiednio niedobór i nadmiar zużycia zasobu odniesione do X jego jednostek,
2. g_n, n=1,...,N oznaczają poziomy aspiracji /cele/ dla funkcji celu obiektów,
3. d_n^-, d_n^+, n=1,...,N oznaczają odpowiednio niedobór i nadmiar w osiągnięciu celów g_n,
4. $a_p(d^-, d^+)$, gdzie $d^-=[d_0^-, d_1^-, \ldots, d_N^-]$, $d^+=[d_0^+, d_1^+, \ldots, d_N^+]$, p=1,...,P są funkcjami satysfakcji,
5. W_p, p=1,...,P oznaczają wagi przypisane odpowiadającym im funkcjom satysfakcji.

Notacja wprowadzona sformułowaniem /2/ zostanie poniżej uściślona dla systemu hierarchicznego rozważanego w pracy. Zakłada się, że struktura systemu jest reprezentowana przez graf typu drzewo, którego wyróżniony węzeł zwany korzeniem jest obiektem szczytowym hierarchii. Poziom obiektu jest poziomem odpowiadającego mu węzła i mierzony jest ilością węzłów znajdujących się na ścieżce łączącej rozpatrywany węzeł z korzeniem. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami priorytet obiektu jest więc zależny od jego poziomu i przyjmuje się w pracy, że jest ten sam dla obiektów tego samego poziomu. Ponadto

$$a_p(d^-, d^+) = \sum_{n \in \mathcal{P}_p} d_n^+ \quad , \quad p=1,\ldots,P$$

$$a_0(d^-, d^+) = d_0^+ \qquad /3/$$

$$d_n^+ = \max(0, b_n) \quad , \quad n=0,1,\ldots,N$$

$$b_0 = \sum_{n=1}^{N} x_n - X$$

$$b_n = f_n(x) - g_n \quad , \quad n=0,1,\ldots,N$$

oraz p=1,...,P oznacza poziom grafu, P jest ilością poziomów w grafie, a zbiór $\mathcal{P}_p$, p=1,...,P oznacza zbiór wszystkich wezłów mających ten sam

poziom.
Zgodnie z iteracyjnym programowaniem celowym Hwanga i Masuda [3] wagi funkcji satysfakcji są dobrane tak, że $W_p \gg W_{p+1}$, $p=1,\dots,P-1$ oraz $W_0 \gg W_1$. Oznacza to, że najwyższy priorytet posiada ograniczenie zasobowe /otrzymane rozwiązanie musi być rozwiązaniem dopuszczalnym/. Priorytet ten zmniejsza się wraz ze wzrostem poziomu obiektu. Konsekwencją relacji $\gg$ między priorytetami jest to, że nie wszystkie obiekty, szczególnie te o wyższych poziomach, mogą w optymalnym rozwiązaniu osiągnąć wyznaczony przez decydenta poziom aspiracji.

W metodzie Hwanga i Masuda [3] rozwiązanie nieliniowego problemu programowania celowego jest zdekomponowane i składa się z rozwiązania ciągu zadań programowania nieliniowego z jedną funkcją celu.
Z uwagi na to, że $W_p \gg W_{p+1}$ rozwiązanie /2/ jest równoważne rozwiązaniu P problemów typu

$$\min a_p(d^-, d^+) \qquad /4/$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n + d_0^- - d_0^+ = X \qquad /4a/$$

$$a_i(d^-, d^+) \leqslant a_i^* \quad , \quad i=0,1,\dots,p-1 \qquad /4b/$$

$$f_n(x) + d_n^- - d_n^+ = g_n \quad , \quad n \in \mathcal{T} \qquad /4c/$$

$$x_n \geqslant 0 \quad , \quad n \in \mathcal{T} \qquad /4d/$$

gdzie a_i^* jest optymalnym rozwiązaniem problemu i, a problemy te są rozwiązywane w kolejności wzrastających numerów poziomów.

Zadanie /4/ jest zadaniem programowania nieliniowego i każda znana metoda może być zastosowana w celu znalezienia rozwiązania. Celem następnego punktu pracy jest przedstawienie alternatywnego sposobu rozwiązania /4/, w którym dość kłopotliwe ograniczenie /4b/ nie będzie bezpośrednio uwzględnione podczas optymalizacji, a także drzewiasta struktura problemu ułatwiać będzie znalezienie optymalnego rozwiązania.

3. Algorytm

Zakłada się, że istnieje algorytm A znajdujący rozwiązanie następującego problemu

$$Q = \min f_n(x)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{T}_n} x_n \leqslant X_n \qquad /5/$$

$$x_n \geqslant 0 \quad , \quad n \in \mathcal{T}_n$$

gdzie $\mathcal{T}_n$ jest poddrzewem grafu $\mathcal{T}$ z węzłem n jako jego korzeniem. Wywołanie tego algorytmu oznaczać się będzie $A(n, x, f, X_n) \to (y, Q)$ gdzie n - numer obiektu korzenia, $x=[x_1,\dots,x_N]$, $f=[f_1,\dots,f_N]$ i X_n - zasób, są parametrami wejściowymi oraz $y=[y_1,\dots,y_N]$ i Q - wartość funkcji celu, są parametrami wyjściowymi. Zakłada się, że $y_i = x_i$ jeśli $i \notin \mathcal{T}_n$.

Wobec tego algorytm B rozwiązujący zadanie /2/ jest następujący:

Krok 1. Znajdź dowolne rozwiązanie x spełniające ograniczenie zasobowe. Jeśli ono istnieje, to $a_0^* = 0$, p=1, q=1 i przejdź do kroku 2. Jeśli ono nie istnieje to STOP.

Krok 2. $A(1, x, f, X) \to (x, F_1)$. Jeśli $F_1 \leqslant g_1$ wówczas podstaw $a_1^* = 0$, q=2 i przejdź do kroku 3. W przeciwnym wypadku STOP.

Krok 3. Podstaw p=p+1. Jeśli p > P wówczas przejdź do kroku 8. Jeśli $F_i(f, x) \leqslant g_i$, $i \in \mathcal{P}_p$, gdzie F_i jest wartością funkcji celu f_i dla wektorów f i x, wówczas podstaw $a_p^*=0$ i przejdź do kroku 3. W przeciwnym wypadku q=p, y=x, h=f.

Krok 4. Oblicz $\mathcal{P}_p^- = \{ i: F_i(h, y) > g_i \}$. Podstaw y=0.

Krok 5. Znajdź S_i takie, że

$$S_i = \min_{0 \leqslant S \leqslant X} \{ S: \ F_i \leqslant g_i \ , A(i, y, h, S) \to (y, F_i) \}$$

dla $i \in \mathcal{P}_p^-$. Jeśli S_i nie istnieje lub ciąg obliczeń prowadzi do sytuacji, że $\sum_{i=1}^{N} y_i > X$ wówczas przejdź do kroku 8. W przeciwnym wypadku zmodyfikuj h następująco

$$h_i = \text{Const}_i \qquad , \quad i \in \mathcal{R}_p$$

gdzie $\text{Const}_i = f_i(y_i)$ oraz $\mathcal{R}_p = \bigcup_{k \in \mathcal{P}_p^-} \mathcal{T}_k$

Krok 6. $A(1, y, h, X) \to (z, F_1)$. Jeśli $F_i(h,z) \leqslant g_i$, $i \in \mathcal{P}_j$, j=1,...,q wówczas podstaw x=z, p=q, $a_p^* = 0$, q=q+1 i przejdź do kroku 3.

Krok 7. Jeśli $F_1 > g_1$ wówczas przejdź do kroku 8. W przeciwnym wypadku oblicz

$$p = \max_{1 \leqslant r \leqslant q} \{ r: \ \mathcal{P}_r^- \neq \emptyset \}$$

i przejdź do kroku 5.

Krok 8. Rozwiązaniem jest $x^* = x$, $F^* = F(f, x^*)$ oraz $a_p^* = \sum_{k \in \mathcal{P}_p} \max\{0, F_k - g_k\}$, p=q,...,P.

W proponowanym algorytmie q oznacza poziom taki, że $a_0^*=a_1^*=\dots=a_{q-1}^* = 0$ oraz $a_q^* > 0$. Dlatego cele g_p, p=1,...,P są osiągnięte do poziomu q-1 włącznie.

Twierdzenie. Algorytm B znajduje rozwiązanie problemu /2/.

Dowód. Wartość q podczas obliczeń algorytmu nie ulega zmniejszeniu. Liczba poziomów w grafie jest skończona więc algorytm zatrzymuje się po skończonej ilości obliczeń.

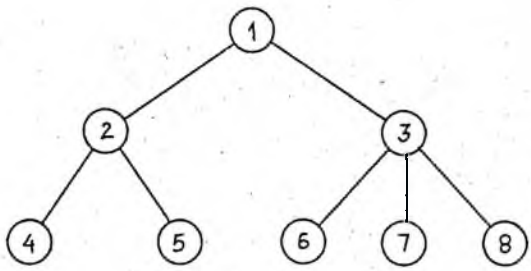
Problem /2/ jest rozwiązywany jako ciąg problemów /4/. Przejście od problemu p do problemu p+1 może się odbyć jedynie gdy $F_i \leqslant g_i$, $i \in \mathcal{P}_j$, $j=1,\dots,q$ co oznacza, że spełnienie ograniczenia /4b/ bada się a posteriori /krok 6 algorytmu/. Podczas rozwiązywania /4/ ograniczenie to jest więc zaniedbywane. Problem sprowadza się wówczas do zadania /5/ ponieważ minimalną wartością a_p jest zero, które osiąga się gdy $F_i \leqslant g_i$ dla $i \in \mathcal{P}_p$. Tak więc w kroku 3 szuka się alokacji, która przy zadanym X minimalizuje F_1. Jeśli ograniczenie /4b/ nie jest spełnione to w kroku 5 sprawdza się czy istnieje taka modyfikacja wyznaczonej alokacji by ograniczenie to mogło być spełnione poprzez wyznaczenie takich przydziałów zasobu, aby $F_i = g_i$ dla $i \in \mathcal{P}_p$. Dla wszystkich tych obiektów, dla których w ten "wymuszony" sposób osiągnięto cele, chwilowo ustala się funkcje celu na poziomie wyznaczonym przez przydzielony zasób. Przy tak dobranych funkcjach celu ponownie minimalizuje się F_1/krok 6/. Jeśli ograniczenie /4b/ jest spełnione to można przejść do rozwiązywania problemu /4/ dla następnego poziomu. Jeśli sytuacja ta nie wystąpiła to kończy się obliczenia. Tym samym maksymalizuje się liczbę funkcji satysfakcji a_p, które osiągają wartość 0, czyli rozwiązuje się problem /2/, gdyż wpływ wartości $a_p \neq 0$ z uwagi na dobór W_p można zaniedbać. ∎

Metoda rozwiązywania problemu /2/ za pomocą przedstawionego algorytmu jest szczególnie efektywna dla pewnych typów funkcji celu, dla których opracowano proste i szybkie algorytmy rozwiązywania zadań /5/. Z analizy działania algorytmu wynika, że zadanie /5/ może być rozwiązywane dla zasobu dyskretnego co najwyżej XM^P razy, gdzie M jest ilością gałęzi wychodzących z jednego wierzchołka w przypadku drzewa regularnego. Nadmiarowość tego oszacowania rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem M. Tak więc dla płaskich struktur /P małe/ proponowana metoda przy starannym wyborze algorytmu dla /5/ jest efektywna gdyż P rośnie znacznie wolniej niż N.

4. Przykład

Rozważmy system składający się z N=8 obiektów reprezentowany przez graf na rys.1. Zależność atrybutu od zasobu jest postaci $t_n=a_n+b_n\exp(-c_nx_n)$. W przypadku hierarchii typu agregacyjnego $f_n \sum_{i \in \mathcal{I}_n} t_i$. Przyjęto, że a=[3,2,4,4,2.5,3,1.5,2], b=[1,2,1,0.5,1,1.5,2,2], c=[0.2,0.3,0.4,0.1, 0.5,0.3,0.2,0.6], oraz g=[30,12,15,4.4,3.5,4.0,3.5,3.5] i X=6. Ponadto założono, że zasób jest podzielny dyskretnie, co wiąże się z uzupełnieniem zbioru ograniczeń we wszystkich przedstawionych rozważaniach w warunek $x_n \in C$, gdzie C jest zbiorem liczb całkowitych dodatnich. Do roz-

wiązania zadania /5/ zastosowano algorytm Shiha [5]. Otrzymano następujące rozwiązanie $x^{*}=[0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2]$ oraz $F^{*}=[29.93, 11.08, 14.85, 4.5, 3.1, 4.11, 3.13, 2.6]$.
Inny przykład zastosowania algorytmu B dla systemu hierarchicznego typu iteracyjnego przedstawiono w pracy Czuchra [2].



Rys.1. Graf przykładowego systemu
Fig.1. The graph of exemplary system.

LITERATURA

[1] Charnes A., Cooper W.W.: Management models and industrial applications of linear programming, vol I. J.Wiley, New Yourk. 1961.

[2] Czuchra W.: Iterative goal programming approach to sharing resour among dependent operations, Found. of Control Engng. vol 10, nr /1985/ w druku.

[3] Hwang C.L., Masud A.: Multiple objective decision making - methods and applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1979.

[4] Scholz C.: The architecture of hierarchy, Kybernetes, vol 11, s.175-181 /1982/.

[5] Shih W.: A new application of incremental analysis in resource allocations, Opl.Res.Q., vol 25, s.587-597 /1974/.

[6] Shimizu K., Aiyoshi E.: Hierarchical multi-objective decision systems for general resource allocation problems, JOTA, vol 35, s.517-533 /1981/.

[7] Singh C.M., Singh M.G.: An exploratory analysis of organizational hierarchies from an engineering point of view, IEEE Trans., vol SMC-8, no 3, s.205-208 /1978/

[8] Słowiński R.: Algorytmy sterowania rozdziałem zasobów różnych kategorii w kompleksie operacji, Rozprawy nr 114, Politechnika Poznańska, 1980

[9] Słowiński R.: Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources, EJOR, vol 7, nr 3, s.265-273 /1981/

[10] Whitford D.T., Davis W.J.: A generalized hierarchical model of resource allocation, Omega, vol 11, s.279-291 /1983/

Recenzent: Dr hab.inż.Mirosław Zaborowski

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИФМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Р е з ю м е

В работе рассматривается алгорифм распределения ресурсов в иерархической системе. Все объекты системы имеют критерия качества, которые изменяются когда изменяются критерия качества объектов расположенных на низших уровнях структуры . Проблема многокритериального распределения ресурсов решена в этой работе при помощи итерационного численного программирования.

RESOURCE ALLOCATION IN A MULTICRITERIA HIERARCHICAL SYSTEM BY ITERATIVE METHOD

S u m m a r y

The paper presents the method of resource allocation in a hierarchical system of object.Each of the system object has its own objective function. Its value depends on values of objective functions of objects placed on lower level of the hierarchy .The problem of multicriteria resource allocation formuled in the paper is solved by iterative goal programming method.