ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol. 894

Krzysztof Ficoń
Wojskowa Akademia Techniczna

SZEREGOWANIE ZADAŃ METODĄ WYZNACZANIA SKOJARZEŃ NAJLICZNIEJSZYCH W GRAFIE DWUDZIELNYM

Streszczenie. W artykule zaproponowano nowe podejście do problemu dyskretnego szeregowania zadań oparte na teorii przydziałów. Wymaga ono uprzedniego przekształcenia problemu szeregowania do dwudzielnego grafu przydziałów elementarnych. Zbiór wierzchołków tego grafu zawiera dwa rozłączne podzbiory, z których jeden oznacza zbiór zadań /prac/, drugi zbiór maszyn. Zbiór krawędzi stanowią tzw. przydziały elementarne poszczególnych zadań do odpowiednich maszyn. Do rozwiązania problemu szeregowania zaproponowano nową binarną metodę wyznaczania skojarzeń najliczniejszych w grafie dwudzielnym. Ciąg rekurencyjnie wyznaczonych skojarzeń najliczniejszych utożsamiany jest z dopuszczalnym wariantem uszeregowania.

1. Wstęp

Niektóre zagadnienia dyskretnego szeregowania zadań można sprowadzić do następującego problemu przydziału. Dany jest zbiór zadań Z, które należy wykonać za pomocą zbioru M maszyn. Wyodrębnione zbiory Z i M są zbiorami rozłącznymi i żaden z nich nie może być zbiorem pustym. O samych zadaniach $z_i \in Z$ zakładamy, że są niepodzielne tzn. ich wykonanie nie może być chwilowo zawieszone z zamiarem kontynuowania danego zadania w przyszłości. Ustalony jest również pewien plan przydziałów alternatywnych poszczególnych zadań z_i do odpowiednich maszyn m_j, albowiem w ogólności nie każde zadanie $z_i \in Z$ może być wykonane na każdej maszynie $m_j \in M$.

Celem uproszczenia dalszych rozważań przyjmiemy ponadto, że czas realizacji t_{ij} dla wszystkich zadań $z_i \in Z$ i maszyn $m_j \in M$ jest identyczny np. jednostkowy oraz chwilowo pomijamy istnienie tzw. ograniczeń kolejnościowych /technologicznych/ nakładanych na zbiór zadań Z /bądź zbiór maszyn M/.

Dla tak sformułowanego modelu należy znaleźć takie uszeregowanie $|Z|$ zadań na $|M|$ maszynach, aby spełnione było żądane kryterium optymalności np. minimalizacji długości uszeregowania, co w ogólnym przypadku należy do klasy tzw. problemów NP-zupełnych, dla których nie istnieją aktualnie efektywne metody rozwiązania [11] . Do konstruowania suboptymalnych uszeregowań zaproponowano podejście oparte na teorii przydziałów [10] . Najbardziej znane algorytmy przydziału, takie jak: algorytm węgierski [10] , metoda wyznaczania przepływów maksymalnych [12] czy rodzina metod opartych na programowaniu dyskretnym [9] są stosunkowo pracochłonne i mało efektywne w implementacji komputerowej. Dlatego dla potrzeb niniejszej pracy zaproponowano nowy algorytm wyznaczania przydziałów, a konkretnie skojarzeń najliczniejszych oparty na binarnej macierzy przyległości krawędzi w dwudzielnym grafie przydziałów elementarnych [7].

2. Graf przydziałów elementarnych

Dobrym modelem matematycznym tak sformułowanego zadania szeregowania jest dwudzielny graf przydziałów elementarnych G [3],

$$G = \langle Z \cup M,\ U \rangle \qquad /1/$$

gdzie: $Z \cup M \neq \emptyset$ - zbiór wierzchołków,
$U \subset Z \times M$ - zbiór krawędzi.

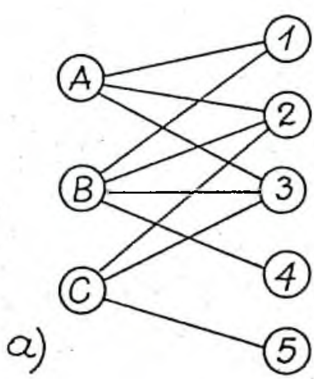
Wierzchołek $z_i \in Z$ odpowiada i-temu zadaniu a wierzchołek $m_j \in M$ j-tej maszynie

$$Z = \left\{ z_i;\ i = \overline{1,I} \right\} \text{ - zbiór zadań,} \qquad M = \left\{ m_j;\ j = \overline{1,J} \right\} \text{ - zbiór maszyn.} \qquad /2/$$

Zbiór krawędzi U określony iloczynem kartezjańskim $Z \times M$ jest formalnie relacją dwuczłonową, której elementami są następujące dwójki uporządkowane

$$\left\{ u_n;\ n = \overline{1,N} \right\} = U \subset Z \times M = \left\{ \langle z_i,\ m_j \rangle \right\} \qquad /3/$$

Relację przydziału $u_n \in U$ stanowi para $\langle z_i, m_j \rangle$, a zbiór krawędzi U określa wielowariantowy plan możliwości przydziału zadań z_i do maszyn m_j, przy czym nie wszystkie elementy iloczynu kartezjańskiego /3/ mogą stanowić dopuszczalne przydziały elementarne /rys.1/.



A	Z_1	X
B	Z_2	Z_4
C	Z_3	Z_5

b)

Rys.1. Przykładowy dwudzielny graf przydziałów elementarnych /a/ i odpowiadający mu harmonogram /b/.
Example of elementary allotment bipartial graph /a/ and its schedule /b/.

Ponadto na zbiorze krawędzi U może być opisana pewna funkcja rzeczywista F :

$$F: U \longrightarrow R_+, \qquad /4/$$

której wartości $f(u_n)$ mogą określać np. czas wykonywania zadania t_{ij} lub ilość zasobu r_{ij} niezbędną do realizacji zadania z_i na maszynie m_j.

3. Harmonogramy a skojarzenia

Problem znalezienia dopuszczalnego uszeregowania $|Z|$ zadań na $|M|$ maszynach zwany też harmonogramem, będziemy odnosić do zagadnienia znalezienia pewnego ciągu skojarzeń najliczniejszych w grafie dwudzielnym /1/. Pod pojęciem skojarzenia U' będziemy rozumieć graf częściowy $G' \subset G$, w którym żadne dwie krawędzie $u_n, u_m \in U$ nie są przyległe /lub nie są incydentne z żadnym wierzchołkiem/

$$\left(G' = \langle Z \cup M, U' \rangle \equiv U'\right) \Longleftrightarrow \left(U' \subseteq U \wedge \mathbb{B}(G') = 0\right)$$

gdzie: $\mathbb{B}(G')$ - binarna macierz przyległości grafu G'.

Dla danego grafu G może istnieć wiele różnych skojarzeń w sensie definicji /5/, spośród których będą interesować nas tylko skojarzenia o określonej liczności

$$|U'| = \max\left\{|Z|, |M|\right\} = \alpha \qquad /6/$$

zwane skojarzeniami najliczniejszymi. Ciąg skojarzeń najliczniejszych U' wyznaczonych na kolejno redukowanym grafie G stanowić będzie dopuszczalny harmonogram H, który formalnie definiujemy następująco:

$$H = \langle U'_n;\ n = \overline{1,N} \rangle = \left\{\langle z^k_i, m_j \rangle;\ k = \overline{1,K}\right\} \qquad /7/$$

$$\text{przy czym:}\quad U_n = G \setminus \bigcup U_{n-1} \qquad /8/$$

Spośród szeregu warunków formalnych nakładanych na konstruowane harmonogramy /7/ wymienimy tylko dwa bezpośrednio związane z generowanymi skojarzeniami najliczniejszymi U'

$$1^\circ \quad \left|H = \left\{U_n;\ n = \overline{1,N}\right\}\right| = |Z| \qquad /9/$$

$$2^\circ \quad u_{n_1}, u_{n_2} \in H \Longleftrightarrow u_{n_1} \cap u_{n_2} = \emptyset \qquad /10/$$

$$\text{gdzie:}\quad u_{n_1} = \langle z_{i_1}, m_{j_1} \rangle; \qquad u_{n_2} = \langle z_{i_2}, m_{j_2} \rangle$$

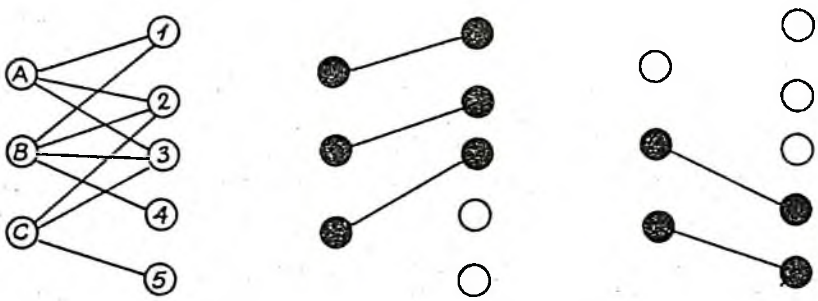
Powyższe warunki gwarantują spełnienie następujących wymagań.

ad. 1°. Każdy harmonogram H powinien wyczerpywać oczekujący na uszeregowanie zbiór zadań Z.

ad. 2^o. Jeżeli dwa elementy u_{n_1} i u_{n_2} należą do tego samego harmonogramu H, to każde zadanie z_i musi być przydzielone do innej maszyny m_j /i odwrotnie/.

Warunek 2^o gwarantuje bezkonfliktowy przydział zadań do maszyn - zgodnie z zadeklarowanymi przydziałami elementarnymi $u_n \in U$. Oznacza to, że w danej chwili jedno i to samo zadanie z_i nie będzie skierowane na więcej niż jedną maszynę m_j i odwrotnie, do jednej maszyny m_j nie będzie przydzielone więcej niż jedno zadanie z_i.

Procedura konstruowania dopuszczalnego harmonogramu /7/ została sprowadzona do zadania generowania ciągu skojarzeń najliczniejszych /5/ na stopniowo redukowanym grafie przydziałów elementarnych G /rys.2/.



Rys.2. Mechanizm konstruowania ciągu skojarzeń najliczniejszych U'_n
Design mechanism of the maximum matching sequence

Krawędzie $u_n \in U'_n$ należące do wygenerowanego skojarzenia $U'_n \subseteq U$ reprezentują pary $\langle z_i^n, m_j^n \rangle$, które mogą być realizowane jednocześnie, są to tzw. operacje równoległe, co graficznie można zobrazować np. za pomocą wykresu Gantta.

Konstruowanie każdego skojarzenia najliczniejszego $U' \subseteq U$ inicjuje tzw. krawędź bazowa $u_n \in U$, która jednocześnie dzieli pozostałe krawędzie na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_o

$$U = u_n \cup V_1(u_n) \cup V_o(u_n) \qquad /11/$$

gdzie: $V_1(u_n)$ - zbiór krawędzi przyległych do u_n,

$V_o(u_n)$ - zbiór krawędzi nieprzyległych do u_n.

Zgodnie z definicją skojarzenia /5/ do skojarzenia inicjowanego przez krawędź u_n mogą należeć tylko krawędzie do niej nieprzyległe, które są włączane ze stopniowo redukowanego zbioru $V_o\, u_n$

$$U'_n = u_n \cup \left\{ V_o(u_n) \setminus \bigcup_i u_{n+i} \right\} \qquad /12/$$

Proces konstruowania skojarzenia U_n^{*} kończy się w momencie, gdy

$$\left(U_n^{*} = U_n^{max} \right) \Longleftrightarrow \left(V_o(u_n) = \emptyset \right) \qquad /13/$$

Formalnie procedura konstruowania skojarzenia /12/ może być wyrażona jako suma logiczna wybranej krawędzi inicjującej $u_n \in U$ i zredukowanego zbioru krawędzi nieprzyległych $V_o(u_n)$. Powyższy mechanizm można stosunkowo łatwo zrealizować za pomocą binarnej macierzy przyległości krawędzi grafu $\mathbb{B}(G)$.

4. Binarna metoda wyznaczania skojarzeń najliczniejszych

Bezpośrednią podstawą działania metody jest binarna macierz przyległości krawędzi $\mathbb{B}(G)$ w dwudzielnym grafie przydziałów elementarnych G:

$$\mathbb{B}(G) = \left[b_{ij} \right]_{|U| \times |U|} \longrightarrow \{0,1\} \qquad /14/$$

której elementy b_{ij} określamy następująco:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & - \text{ gdy } \langle u_{n1}, u_{n2} \rangle \in ZUM \\ 0 & - \text{ przeciwnie} . \end{cases} \qquad /15/$$

Macierz $\mathbb{B}(G)$ jest macierzą kwadratową o wymiarze $|U| \times |U|$ i cechuje ją własność symetrii względem głównej przekątnej, co zasadniczo zwiększa jej sprawność obliczeniową, gdyż możemy ograniczyć się do rozpatrywania tylko jednej z jej podmacierzy trójkątnych.

Zauważmy, że w dowolnym i-tym wierszu $b_{i(\cdot)}$ macierzy $\mathbb{B}(G)$ wszystkie elementy zerowe $b_{ij} = 0$ tworzą zbiór krawędzi nieprzyległych $V_o(u_i)$

$$V_o(u_n) = \left\{ b_{ij} = 0 \; ; \quad i = n, \quad n \leqslant j \leqslant N \right\} \qquad /16/$$

natomiast elementy jednostkowe $b_{ij} = 1$ tworzą zbiór krawędzi przyległych $V_1(u_n)$

$$V_1(u_n) = \left\{ b_{ij} = 1 \; ; \quad i = n, \quad n \leqslant j \leqslant N \right\} \qquad /17/$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia /12/ oraz /16/ i /17/ widzimy, że operację wyznaczania skojarzeń najliczniejszych $U \subseteq G$ można sprowadzić do logicznego dodawania binarnych wierszy podmacierzy $\mathbb{B}(G)$. Elementy zerowe $b_{ij} = 0$ w wierszu jednoznacznie określają aktualny zbiór krawędzi nieprzyległych $V_o(u_n)$, a tym samym numery krawędzi, które można włączyć do konstruowanego skojarzenia $U_n^{*} \in U$.

Algorytm wyznaczania skojarzeń najliczniejszych w grafie G składa się z następujących kroków.

1^o Zbuduj dla danego grafu przydziałów elementarnych G odpowiadającą mu binarną macierz przyległości krawędzi $\mathbb{B}(G)$

$$\mathbb{B}(G) = \left[b_{ij} \right]_{|U| \times |U|} \longrightarrow \{0, 1\}$$

i wydziel w niej np. górną podmacierz trójkątną $\mathbb{B}(G)$.

2^o Wybierz w podmacierzy trójkątnej $\mathbb{B}(G)$ krawędź $u_n \in U$ inicjującą skojarzenie $U_n \subseteq G$

$$\left(u_n \in U_n^{`} \right) \Longleftrightarrow \left(u_n \notin U_{n-1} \;\wedge\; V_o(u_n) \neq \emptyset \right)$$

3^o Numer kolejnej krawędzi dołączonej $u_k \in U$ ustal na podstawie elementów zerowych $b_{ij} = 0$ w wierszu inicjującym /sumarycznym/ $b_{n(\cdot)}$

$$\left(u_k \longrightarrow U_n^{`} \right) \Longleftrightarrow \left(b_{ik} = 0 \; ; \quad k > n \right)$$

4^o Dodaj logicznie krawędź inicjującą u_n /sumaryczną u_{n+k} / do wybranej krawędzi dołączonej u_k

$$u_n \cup \{u_k\} = U_n^k$$

5^o Dla nowo powstałej multikrawędzi /sumarycznej/ u_{n+k} określ odpowiadający jej zbiór krawędzi nieprzyległych $V_o(u_{n+k})$

$$V_o(u_{n+k}) \begin{cases} \neq \emptyset & - \text{ skocz do } 3^o, \\ = \emptyset & - \text{ KONIEC .} \end{cases}$$

Algorytm kończy swoją pracę w momencie, gdy wyczerpie się zbiór krawędzi nieprzyległych $V_o(u_{n+k}) = \emptyset$, generując jedno skojarzenie najliczniejsze $U_n^{`}$ spełniające warunek /6/ .

5. Zakończenie

W pracy wykazano, że każde zagadnienie dyskretnego szeregowania $|Z|$ zadań na $|M|$ maszynach, jeśli zostanie przetransformowane do dwudzielnego grafu przydziałów elementarnych G , może być rozwiązane metodą wyznaczania ciągu skojarzeń najliczniejszych. Każdy taki ciąg wyczerpujący zbiór zadań Z będziemy utożsamiać z dopuszczalnym uszeregowaniem /harmonogramem/.

Transformację oparto na założeniu, że zadania $z_i \in Z$ są niepodzielne, a dla prostoty przyjęto jednakowe czasy wykonywania zadań na wszystkich maszynach oraz pominięto ograniczenia kolejnościowe /technologiczne/. Ostatnie dwa założenia mogą być w szczególnych przypadkach złagodzone /a nawet pominięte/, co wymaga jedynie dodatkowych procedur sterujących kolejnością generowania poszczególnych skojarzeń na redukowanym grafie przydziałów elementarnych. Przy różnych czasach wykonywania zadań $t_{ij} \neq const$

należy ponadto rozwiązać problem kolejności realizacji zadań alternatywnych na danej maszynie.

Za pomocą przedstawionej metody można uwzględnić także wykorzystanie dodatkowych resursów /zasobów/, ich dostępność oraz ewentualne limity i ograniczenia, np. materiałowe, surowcowe, energetyczne. Poszczególnym zadaniom można też przypisać pewien system wag i priorytetów. Wymaga to stosownej rozbudowy modelu a zwłaszcza odpowiedniego sparametryzowania procedury generującej skojarzenia najliczniejsze. W przypadku wprowadzenia funkcji przydziału będziemy mieli do czynienia z wyznaczaniem optymalnych przydziałów najliczniejszych miminalizujących łączny koszt całego harmonogramu.

Efektywną, numeryczną realizację zaproponowanego podejścia gwarantuje binarny algorytm wyznaczania skojarzeń najliczniejszych, który został zbadany za pomocą symulacji komputerowej. Uzyskane wyniki świadczą o dużej sprawności obliczeniowej algorytmu, realistycznych czasach działania, a tym samym o jego przydatności do rozwiązywania praktycznych problemów z zakresu dyskretnego szeregowania zadań.

LITERATURA

[1] Baran-Jarosz B. i inni: Wybrane metody rozwiązywania problemów uszeregowania prac na maszynach. Matematyka Stosowana vol.2, 1974.

[2] Błażewicz J. i inni: Badania operacyjne dla informatyków. WNT, Warszawa 1983.

[3] Burlaga H.: Uogólnienie problemu przydziału. Biuletyn WAT, 10/242/, Warszawa 1972.

[4] Christofides N.: Graph theory. An algorithmic approach. Academic Press, New York - London - San Francisco 1975.

[5] Conway R.W., Maxwell W.L., Miller L.W.: Theory of schedulling. New York 1967.

[6] Deo N.: Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce. PWN, Warszawa 1980.

[7] Ficoń K.: Wyznaczanie wszystkich skojarzeń najliczniejszych według zredukowanego drzewa monotonicznego. Zeszyty Naukowe WSMW, nr 3/82/, Gdynia 1984.

[8] Ficoń K.: Optymalizacja przydziału nabrzeży w morskim porcie handlowym. Materiały na konferencji "Cybernetyka w gospodarce morskiej" tom 2 z.2, PTC Gdańsk, WSM, Gdynia 1985.

[9] Korbut A.A., Finkelsztejn J.J.: Programowanie dyskretne. PWN, Warszawa 1974.

[10] Korzan B.: Grafy, hipergrafy i sieci. WAT, Warszawa 1980.

[11] Lipski W.: Kombinatoryka dla programistów. WNT, Warszawa 1982.

[12] Słomiński L.: Algorytmy rozwiązujące minimaksowe zagadnienie przydziału i ich komputerowe porównanie. Zeszyty Naukowe P.Śl.,ser.Automatyka z.74, Gliwice 1984.

Recenzent: Doc.dr h.inż.Józef Grabowski

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

РАСПИСАНИЕ ЗАДАЧ ПО МЕТОДУ НАЗНАЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ В ДВУХДЕЛЬНОМ ГРАФЕ

Р е з ю м е

В статье представлен метод дискретного расписания задач, базующий на назначении максимальных паросочетаний в двухдельном графе. Множество вершин этого графа содержит два непересекающиеся подмножества , где одно обозначает множество задач , другое- множество машин. Множество рёбер составляет элементарные паросочетания отдельных задач к соответствующим машинам.
Для разрешения проблемы дискретного расписания задач представлен новый бинарный алгоритм назначения максимальных паросочетаний в двухдельном графе. В заключении представлены итоги исследований на ЭВМ.

TASKS SCHEDULING BY THE USE OF THE METHOD OF OPTIMUM MATCHING PROBLEMS IN BIPARTICE GRAPH.

S u m m a r y

In the paper the method of discrete scheduling task on the basis of matching theory has been presented. The method needs transformation of the scheduling problem into so called bipartice graph of the elementary matchings. A set of nodes of the graph includes two separate subsets, one of which denotes a set of tasks, the second one - a set of machines. A set of edges composes so called elementary matchings of particuler tasks and suitable machines. The bipartice graph of elementary matching tasks to the machines.

To solve the problem of scheduling a new binary method of optimum matching problems determining in the bipartice graph has been proposed. The strait basis of the method action is a binary matrix of incidence of edges. The soquence of recursively determined optimum matching is understood as an admissible variant of task: scheduling.

The effectiveness of the method has been evaluated by means of computer simulation.