ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol.894

Jerzy Klamka
Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH - PRZEGLĄD PROBLEMÓW*

Streszczenie. Artykuł stanowi przegląd problemów sterowalności dyskretnych układów dynamicznych opracowany na podstawie publikacji z ostatnich lat. Przedstawiono warunki sterowalności dla liniowych, nieliniowych oraz biliniowych układów dyskretnych. Układy typu 2-D są również rozpatrywane. Omówiono zależności pomiędzy różnymi rodzajami sterowalności oraz sterowaniem minimalno-energetycznym.

1. Wstęp

Sterowalność układów dynamicznych jest jednym z podstawowych pojęć teorii sterowania. Zagadnienie sterowalności zostało po raz pierwszy sformułowane przez R.E. Kalmana na Kongresie IFAC w Moskwie w 1960 r. [28]. W ciągu ćwierćwiecza jakie upłynęło od tego czasu nastąpił burzliwy rozwój teorii sterowalności, o czym najlepiej świadczy ilość prac naukowych na ten temat, opublikowanych w literaturze światowej.

Równolegle z rozwojem teorii sterowalności ciągłych układów dynamicznych powstawały prace dotyczące zagadnień sterowalności dyskretnych układów dynamicznych zarówno nieliniowych jak i liniowych.

Niniejszy artykuł stanowi przegląd problemów sterowalności w odniesieniu do różnych typów dyskretnych układów dynamicznych. Rozpatruje się układy liniowe stacjonarne i niestacjonarne, układy nieliniowe, biliniowe oraz układy typu 2-D. Podane zostaną podstawowe definicje sterowalności oraz sformułowane zasadnicze kryteria jej badania. Wszystkie twierdzenia i wnioski są przytoczone bez dowodów, jedynie z odnośnikami do tych pozycji literaturowych, w których zamieszczone są pełne dowody. Artykuł zawiera również szereg komentarzy i uwag dotyczących zagadnień bezpośrednio związanych ze sterowalnością oraz możliwości pewnych uogólnień.

2. Sterowalność liniowych układów dyskretnych

W niniejszym podrozdziale zostaną podane podstawowe definicje sterowalności oraz kryteria ich badania w odniesieniu do liniowych, dyskretnych układów dynamicznych opisanych różnicowymi równaniami stanu postaci następującej [55]:

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k),\quad k \geq k_0 \qquad /2.1/$$

* praca była częściowo finansowana przez RP.I.02 "Teoria sterowania i optymalizacja ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych"

gdzie: $k \in Z$ - zbiór liczb całkowitych,

$x(k) \in R^n$ jest wektorem stanu układu,

$u(k) \in R^m$ jest wektorem sterowań,

$A(k)$ jest $n \times n$ - wymiarową macierzą,

$B(k)$ jest $n \times m$ - wymiarową macierzą.

Podobnie jak w przypadku ciągłych układów dynamicznych, dla układu dyskretnego postaci /2.1/ można sformułować definicje różnych rodzajów sterowalności [25], [55] .

<u>Definicja 2.1.</u> Układ /2.1/ nazywa się sterowalnym w przedziale $[k_0, k_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0) \in R^n$ oraz każdego wektora $x_1 \in R^n$ istnieje sekwencja sterowań $u(k_0)$, $u(k_0+1)$, .. $u(k_1-2)$, $u(k_1-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu /2.1/ spełnia warunek : $x(k_1) = x_1$.

<u>Definicja 2.2.</u> Układ /2.1/ nazywa się sterowalnym w chwili k_0, jeżeli istnieje $k_1 > k_0$ takie, że układ /2.1/ jest sterowalny w przedziale $[k_0, k_1]$.

<u>Definicja 2.3.</u> Układ /2.1/ nazywa się sterowalnym jeżeli jest on sterowalny w dowolnej chwili $k_0 \in Z$.

Szczególnym przypadkiem układu /2.1/ jest stacjonarny, liniowy, dyskretny układ dynamiczny postaci

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \geq 0 \qquad /2.2/$$

dla którego bez utraty ogólności można przyjąć chwilę początkową $k_0 = 0$.

W przypadku stacjonarnego układu dyskretnego /2.2/ pojęcia sterowalności w chwili k_0 oraz sterowalności pokrywają się ze sobą.

Poniżej zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające sterowalności dla układów /2.1/ i /2.2/.

<u>Twierdzenie 2.1</u> [55] Warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w przedziale $[k_0, k_1]$ układu dynamicznego /2.1/ jest aby

$$\text{rząd}\,[B(k_1-1) \,\vdots\, A(k_1-1)\,B(k_1-2) \,\vdots\, A(k_1-1)\,A(k_1-2)\,B(k_1-3) \,\vdots\, \ldots$$

$$\ldots \vdots\, A(k_1-1)\,A(k_1-2) \ldots A(k_0+2)\,A(k_0+1)\,B(k_0)] = n \qquad /2.3/$$

<u>Wniosek 2.1.</u> [29] . Jeżeli $B(k) = b(k) \in R^n$, tzn. $m = 1$, wówczas warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w przedziale $[k_0, k_0+n]$ układu dynamicznego /2.1/ jest aby

$$\det\,[b(k_0+n-1) \,\vdots\, A(k_0+n-1)\,b(k_0+n-2) \,\vdots\, A(k_0+n-1)\,A(k_0+n-2)\,b(k_0+n-3) \,\vdots\, \ldots$$

$$\ldots \vdots\, A(k_0+n-1)\,A(k_0+n-2) \ldots A(k_0+2)\,A(k_0+1)\,b(k_0)] \neq 0 \qquad /2.4/$$

Na podstawie twierdzenia 2.1 oraz wniosku 2.1 można sformułować kryteria sterowalności dla stacjonarnych układów dyskretnych postaci /2.2/.

Wniosek 2.2. [45] Warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w przedziale $[0,k_1]$ układu dynamicznego /2.2/ jest aby

$$\text{rząd}\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{k_1-1}B\right] = n \qquad /2.5/$$

Wniosek 2.3. [55] Jeżeli $B = b \in R^n$, tzn. $m = 1$, wówczas warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w przedziale $[0\ n]$ układu dynamicznego /2.2/ jest aby

$$\det\left[b \mid Ab \mid A^2b \mid \dots \mid A^{n-1}b\right] \neq 0 \qquad /2.6/$$

Wniosek 2.4. [29] Jeżeli układ dynamiczny /2.2/ jest sterowalny w przedziale $[0,k_1]$, to jest również sterowalny w przedziale $[0,k_2]$ dla każdego $k_2 > k_1$.

Wynikanie odwrotne do przedstawionego we wniosku 2.4 na ogół nie jest prawdziwe. Natomiast bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Cayleya-Hamiltona jest następujący wniosek

Wniosek 2.5. [4]. Jeżeli stacjonarny układ dynamiczny /2.2/ nie jest sterowalny w przedziale $[0,n]$, to nie jest on sterowalny w żadnym przedziale.

W oparciu o wnioski 2.2 oraz 2.4 sensowne jest określenie dla stacjonarnych układów dyskretnych /2.2/, najkrótszego przedziału $[0,k_{min}]$, w którym dany układ jest sterowalny. Liczba naturalna k_{min} nosi nazwę indeksu sterowalności i można ją oszacować w sposób następujący [4] :

$$k_{min} \leq \min\left(n-r+1,\ \bar{n}\right) \qquad /2.7/$$

gdzie:

r = rząd B,

$\bar{n}$ - stopień minimalnego wielomianu zerującego macierzy A, $(\bar{n} \leq n)$.

W literaturze poświęconej sterowalności liniowych układów dyskretnych spotyka się często pojęcie sterowalności do zera [29], [39]. Jest ono również równoważne odpowiednim pojęciom sterowalności sformułowanym w definicjach 2.1, 2.2 oraz 2.3 jedynie w przypadku braku degeneracji układu, tzn. w przypadku, gdy macierze $A(k)$ są nieosobliwe dla $k \in Z$ [29].

Istotnym problemem jest zbadanie wpływu ograniczeń nałożonych na sterowanie na sterowalność układu. W pracy [9] rozpatrzono to zagadnienie dla układów stacjonarnych /2.2/ z jednym wejściem $(m = 1)$ i dodatnim sterowaniem, a w publikacji [1] ze sterowaniem całkowito-liczbowym.

W przypadku gdy układ dyskretny otrzymuje się bezpośrednio na drodze dyskretyzacji układu ciągłego, wówczas sterowalność układu ciągłego nie zawsze gwarantuje sterowalność układu dyskretnego. Dla układów stacjonarnych zależne jest to w sposób istotny od wartości własnych układu ciągłego [2], [4].

Sterowalność układów dyskretnych z opóźnieniami zarówno we współrzędnych stanu jak i w sterowaniu rozpatrywana była w pracach [3], [21], [29], [31], [38], [42]. Natomiast sterowalność złożonych układów dyskretnych przedstawiona jest w publikacjach [46] oraz [47].
Zależność własności sterowalności od zmian parametrów układu analizowana była szczegółowo w pracy [54].

Podobnie jak dla ciągłych układów dynamicznych także w przypadku układów dyskretnych można przy założeniu sterowalności w przedziale $[k_0, k_1]$ efektywnie rozwiązać problem sterowania z minimalną energią, polegający na wyznaczeniu sekwencji sterowań $u(k_0)$, $u(k_0+1)$, ... , $u(k_1-2)$, $u(k_1-2)$ przeprowadzającej układ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do żądanego stanu końcowego $x(k_1)$ oraz minimalizującego energię sterowania. Analityczna postać sterowania minimalno-energetycznego oraz odpowiadająca jej minimalna wartość energii sterowania są podane w pracach [30] oraz [50].

Rozszerzenie rezultatów dotyczących sterowalności liniowych układów dyskretnych na przypadek układów zdefiniowanych w nieskończenie-wymiarowych przestrzeniach Hilberta i Banacha oraz analizę wynikających stąd problemów zawierają następujące pozycje literaturowe [16], [17], [18], [22], [31], [38], [49]. Stosunkowo dużo uwagi poświęcono w nich dyskretnym układom dynamicznym z operatorem przesunięcia, a także problematyce ich realizacji z wykorzystaniem podprzestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia oraz wektorowych operatorów Hankela [16], [17], [18].

Szereg dalszych rezultatów dotyczących wzajemnych związków pomiędzy sterowalnością, obserwowalnością i stabilizowalnością układów dyskretnych przedstawionych jest w pracach [24], [25], [40], [43], [44], [45], [49], [50], [55].

3. Sterowalność nieliniowych układów dyskretnych

Teoria sterowalności dla nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych nie jest tak spójna i jednolita jak w przypadku układów liniowych. Większość uzyskanych kryteriów sterowalności ma charakter lokalny, lub odnosi się jedynie do pewnej wąskiej klasy układów. Zasadniczą przyczyną trudności występujących przy badaniu sterowalności nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych, jest brak ogólnych metod rozwiązywania nieliniowych równań różnicowych i wyznaczania analitycznych postaci ich rozwiązań. Wyklucza to możliwość zastosowania do badania sterowalności metod opartych na analizowaniu jawnych postaci rozwiązania, jak to miało miejsce w przypadku układów liniowych .

Najczęściej stosowaną i dającą najlepsze wyniki jest metoda badania sterowalności nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych w oparciu o ich przybliżenie liniowe w danym punkcie pracy układu. Poniżej przedstawimy pokrótce zasadnicze rezultaty wynikające z zastosowania tej metody w odniesieniu do ogólnej klasy nieliniowych, niestacjonarnych, dyskretnych układów dynamicznych opisanych równaniem różnicowym postaci :

$$x(k+1) = f(k\,,\, x(k)\,,\, u(k))\quad ,\; k \geqslant k_0 \qquad /3.1/$$

gdzie, $x(k) \in R^n$ jest wektorem stanu układu,
$u(k) \in R^m$ jest wektorem sterowań,
$f\;:\; R \times R^n \times R^m \longrightarrow R^n$.

Dla nieliniowego układu dyskretnego /3.1/ można sformułować kilka różnych definicji sterowalności .

Definicja 3.1. [39] , [53] Układ /3.1/ nazywa się sterowalnym ze zbioru $D_0 \subset R^n$ do zbioru $D_1 \subset R^n$ w przedziale $[k_0, k_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0) \in D_0$ i każdego wektora $x_1 \in D_1$ istnieje sekwencja sterowań $u(k_0)$, $u(k_0+1)$, ... , $u(k_1-2)$, $u(k_1-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu /3.1/ spełnia warunek : $x(k_1) = x_1$.

Definicja 3.2. [39] , [53] Układ /3.1/ nazywa się sterowalnym ze zbioru $D_0 \subset R^n$ do zbioru $D_1 \subset R^n$ w chwili k_0, jeżeli istnieje $k_1 > k_0$, takie że układ /3.1/ jest sterowalny z D_0 do D_1 w przedziale $[k_0, k_1]$.

Definicja 3.3. [39], [53] Układ /3.1/ nazywa się sterowalnym ze zbioru $D_0 \subset R^n$ do zbioru $D_1 \subset R^n$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0) \in D_0$ i każdego wektora $x_1 \in D_1$ istnieje $k_1 > k_0$ oraz sekwencja sterowań $u(k_0)$, $u(k_0+1)$, ... , $u(k_1-2)$, $u(k_1-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu /3.1/ spełnia warunek $x(k_1) = x_1$.

Jeżeli $D_0 = D_1 = D$, to zamiast "sterowalności z D_0 do D_1 " mówimy w skrócie o "sterowalności w D ". Jeżeli natomiast $D_0 = R^n$ oraz $D_1 = 0$, to mówimy o "sterowalności do zera ". W przypadku gdy $\{0\}$ jest punktem wewnętrznym zbioru $D = D_0 = D_1$ używamy terminu "lokalna sterowalność".

Zauważmy, że "sterowalność z D_0 do D_1 w przedziale $[k_0, k_1]$ " implikuje "sterowalność z D_0 do D_1 w chwili k_0" , która z kolei implikuje "sterowalność z D_0 do D_1 ". Wynikanie w stronę przeciwną nie zawsze zachodzi .

Twierdzenie 3.1. [53] Jeżeli funkcja f jest różniczkowana w otoczeniu zera względem drugiego i trzeciego argumentu oraz

$$f(k, 0, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad k \geqslant k_0 \qquad /3.2/$$

$$A(k) = \frac{\partial f}{\partial x}(k, 0, 0), \quad B(k) = \frac{\partial f}{\partial u}(k, 0, 0), \quad \text{dla } k \geqslant k_0 \qquad /3.3/$$

to warunkiem wystarczającym lokalnej sterowalności w przedziale $[k_0, k_1]$ nieliniowego układu /3.1/ jest sterowalność w przedziale $[k_0, k_1]$ układu liniowego /2.1/ o macierzach $A(k)$ i $B(k)$ danych wzorem /3.3/ .

W pracy [51] przedstawiono metodę określania zbiorów osiągalnych dla układu /3.1/ opartą na twierdzeniach o punktach stałych odwzorowań.

Ostatnio do badania sterowalności pewnych klas nieliniowych układów dyskretnych wykorzystuje się metody algebry decyzyjnej pozwalające w skończonej ilości operacji stwierdzić czy dany układ jest sterowalny [39]. Dotyczy to głównie stosunkowo szerokiej i ważnej z punktu widzenia zastosowań klasy dyskretnych układów wielomianowych

$$x(k+1) = A(u(k))\,x(k) + b(u(k)), \quad k \geqslant 0 \qquad /3.4/$$

gdzie: $A(u)$ i $b(u)$ są odpowiednio $n \times n$ - wymiarową macierzą i n-wymiarowym wektorem, których współczynniki są wielomianami względem skalarnego sterowania u .

Twierdzenie 3.2. [39] Jeżeli wielomianowy układ jednorodny

$$x(k+1) = A(u(k))\,x(k), \quad k \geqslant 0 \qquad /3.5/$$

jest sterowalny w $R^n \setminus \{0\}$, to :

/1/ dla każdego $x \in R^n \setminus \{0\}$ istnieje k_1, dla którego suma algebraiczna podprzestrzeni

$$\mathrm{lin}\left\{\prod_{k=0}^{k_1-1} A(u(k))x\right\}$$

po wszystkich $u(0)$, $u(1)$, ... , $u(k_1-1)$ jest równa R^n. /2/ istnieją k_2 oraz sekwencja sterowań $\bar{u}(0)$, $\bar{u}(1)$, ... , $\bar{u}(k_2-1)$ takie, że macierz

$$\prod_{k=0}^{k_2-1} A(u(k))$$

ma rzeczywistą wartość własną o module mniejszym od jedności, różną od zera.

Szereg dalszych rezultatów i algorytmów dotyczących zastosowania metod algebry decyzyjnej do badania sterowalności układów wielomianowych podanych jest w pracy [39].

4. Sterowalność biliniowych układów dyskretnych

Szczególnie istotną z punktu widzenia zastosowań klasą nieliniowych układów dyskretnych są biliniowe, stacjonarne układy dyskretne,
- jednorodne

$$x(k+1)=(A+Bu(k))\,x(k)\ ,\quad k\geqslant 0 \qquad /4.1/$$

- oraz niejednorodne

$$x(k+1)=(A+Bu(k))\,x(k)+bu(k)\ ,\quad k\geqslant 0 \qquad /4.2/$$

gdzie: $x(k)\in R^n$ jest wektorem stanu,
$u(k)\in R$ jest skalarnym sterowaniem,
A jest $n\times n$ - wymiarową macierzą,
B jest $n\times n$ - wymiarowymi macierzami,
$b\in R^n$.

Definicje różnych rodzajów sterowalności sformułowane w trzecim roz - dziale odnoszą się również do układów biliniowych. Zagadnienia sterowalności do zera oraz sterowalności w R^n dyskretnych układów biliniowych rozważane były w licznych publikacjach [7], [8], [10], [19], [20], [23], [32], [52]. W pracy [20] przy założeniu, że rząd $B = 1$, sformułowano proste warunki konieczne ale nie wystarczające oraz warunki wystarczające ale nie konieczne sterowalności do zera układu jednorodnego /4.1/.

<u>Twierdzenie 4.1.</u> [20] Załóżmy, że pary macierzy (A,B) i (A^T,B^T) są sterowalne oraz $\det A \neq 0$ i rząd $B = 1$. Wtedy

/1/ jeśli układ /4.1/ jest sterowalny do zera, to

$$BA^{-1}B \neq 0 \qquad /4.3/$$

/2/ jeśli $BA^{-1}B \neq 0$ i układ /4.1/ jest sterowalny w $R^n \setminus \{0\}$ to jest sterowalny do zera,

/3/ układ /4.1/ jest sterowalny do zera w przedziale $[0,n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$BA^{-i}B = 0 \quad \text{dla} \quad i = 2,3,\dots,n \qquad /4.4/$$

Sterowalność układu /4.1/ w $R^n \setminus \{0\}$ rozważana była w pracach [8], [10] oraz [19]. W pracy [19] pokazano, że można ograniczyć się do przypadku $\det A \neq 0$. Wówczas układ /4.1/ można przekształcić do postaci

$$x(k+1) = A\left(I + u(k)c\,h^T\right)x(k)\,,\ k \geqslant 0 \qquad /4.5/$$

gdzie: $c \in R^n$ oraz $h \in R^n$.

<u>Twierdzenie 4.2.</u> [8] Niech r będzie największym wspólnym podzielnikiem zbioru liczb naturalnych $\left\{j \in N : h^T A^j c \neq 0\,,\ 0 < j \leqslant n^2\right\}$. Układ jednorodny /4.5/ jest sterowalny w $R^n \setminus \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie zachodzą poniższe warunki :

$$\text{rząd}\left[c,\ Ac,\ A^2c,\ \dots,\ A^{n-1}c\right] = n \qquad /4.6/$$

$$\text{rząd}\left[h,\ A^Th,\ (A^T)^2h,\ \dots,\ (A^T)^{n-1}h\right] = n \qquad /4.7/$$

$$r = 1 \qquad /4.8/$$

Wykorzystując wyniki uzyskane dla układu jednorodnego /4.5/ w pracy [10] sformułowano warunki konieczne i wystarczające sterowalności w R^n układu niejednorodnego postaci

$$x(k+1) = A\left(I + u(k)c\,h^T\right)x(k) + c\,u(k)\,,\ k \geqslant 0 \qquad /4.9/$$

<u>Twierdzenie 4.3.</u> [10] Układ niejednorodny /4.9/ jest sterowalny w R^n wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą jednocześnie poniższe warunki

$$\text{rząd}\ [\,c,\ Ac,\ A^2c,\ \dots,\ A^{n-1}c\,] = n \qquad /4.10/$$

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & h^T \\ 1 & h^TA^r \\ 1 & h^TA^{2r} \\ \dots & \dots \\ 1 & h^TA^{qr} \end{bmatrix} = q + 1 \qquad /4.11/$$

gdzie: $q = \frac{1}{r} \cdot \text{rząd}\ [\,h,\ A^Th,\ (A^T)^2 h,\ \dots,\ (A^T)^{n-1} h\,]$.

W pracy [39] przedstawiono algorytmy badania sterowalności biliniowych układów dyskretnych oparte o metody algebry decyzyjnej. Natomiast publikacje [14] i [15] poruszają problematykę sterowalności układów biliniowych zdefiniowanych w nieskończenie -wymiarowych przestrzeniach Hilberta .

5. Sterowalność układów typu 2-D

W ostatnich latach w literaturze teorii sterowania ukazało się wiele prac dotyczących sterowalności tzw. układów typu 2-D, tzn. liniowych układów dyskretnych o dwóch zmiennych niezależnych [6], [11], [12], [13], [27], [33], [35], [36], [41], [48], oraz układów typu 3-D [26], [27] a także układów typu M-D [27], [34], [37] . Związane to jest bezpośrednio z szerokim zastosowaniem układów typu 2-D i ogólnie typu M-D w analizie obrazów i technice wojskowej .

W niniejszym podrozdziale zostaną podane warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności liniowego, stacjonarnego układu typu 2-D opisanego tzw. modelem Roessera postaci [6], [27], [33], [48] :

$$\begin{aligned} x(i+1,j) &= A_1x(i,j) + A_2y(i,j) + B_1u(i,j) \\ y(i,j+1) &= A_3x(i,j) + A_4y(i,j) + B_2u(i,j) \end{aligned} \qquad /5.1/$$

z warunkami brzegowymi $x(0,j) = x^0(j)$, oraz $y(i,0) = y^0(i)$,
gdzie: $i \in Z^+$; $j \in Z^+$, Z^+ - zbiór nieujemnych liczb całkowitych,

$x(i,j) \in R^n$, $y(i,j) \in R^p$, $u(i,j) \in R^m$,

$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ są stałymi macierzami o odpowiednich wymiarach.

Niech symbole (h,k) oraz (r,s) oznaczają pary liczb całkowitych, dla których $h < r$, $k < s$, a symbol $[(h,k), (r,s)]$ prostokąt o wierzchołkach: (h,k), (r,k), (h,s), (r,s).

Definicja 5.1. [6], [27], [37], [48]. Układ /5.1/ nazywa się sterowalnym w prostokącie $[(0,0), (r,s)]$ jeżeli dla każdych warunków brzegowych $x(i,0)$, $0 \leq i \leq r$, $y(0,j)$, $0 \leq j \leq s$ oraz każdego wektora $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in R^{n+p}$ istnieje sekwencja sterowań $u(i,j)$, $(i,j) \in [(0,0), (r,s))$ taka, że odpowiadająca jej trajektoria układu /5.1/ spełnia warunek : $\begin{bmatrix} x(r,s) \\ y(r,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

Wprowadzając macierz blokową $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]$ oraz definiując odpowiednio macierz tranzycji $A^{i,j}$ [6], [27], [37], [48], jako :

$$A^{i,j} = A^{1,0} A^{i-1,j} + A^{0,1} A^{i,j-1} \qquad /5.2/$$

gdzie: $A^{1,0} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $A^{0,1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]$

można sformułować warunki konieczne i wystarczające sterowalności układu /5.1/ w prostokącie $[(0,0), (r,s)]$.

Twierdzenie 5.1. [27], [48] Układ /5.1/ jest sterowalny w prostokącie $[(0,0), (r,s)]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd} \left[M(1,0) \mid M(0,1) \mid \ldots \mid M(i,j) \mid \ldots \mid M(r,s) \right] = n + p \qquad /5.3/$$

$$\text{gdzie} \quad M(i,j) = A^{i-1,j} B^{1,0} + A^{i,j-1} B^{0,1} \qquad /5.4/$$

Macierze $M(i,j)$ zdefiniowane wzorem /5.4/ są macierzami $(n+p) \times m$ - wymiarowymi, a zatem macierz występująca po lewej stronie równości /5.3/ jest macierzą $(n+p) \times m((r+1)(s+1) - 1)$ - wymiarową. Nosi ona nazwę macierzy sterowalności układu typu 2-D.

Wniosek 5.1. [27], [48] Jeżeli układ /5.1/ jest sterowalny w prostokącie $[(0,0), (r,s)]$, to jest on również sterowalny w każdym prostokącie $[(0,0), (v,w)]$, gdzie $(v,w) > (r,s)$.

Wynikanie odwrotne do przedstawionego we wniosku 5.1. jest na ogół nieprawdziwe.

Oprócz sterowalności w prostokącie określonej definicją 5.1., dla układów typu 2-D definiuje się również inne rodzaje sterowalności, takie jak : sterowalność horyzontalną i wertykalną [6],[27],[33],[41], globalną [27],[41] oraz modalną [5],[6],[27],[41] . Rozszerzenia tych definicji na przypadek układów typu 3-D i ogólnie układów typu M-D oraz odpowiednie kryteria badania sterowalności znajdują się między innymi w pracach [26], [27],[34] oraz [37]. Sterowalność układu typu 2-D określonego w nieskończenie-wymiarowych przestrzeniach Hilberta analizowana jest w pracy [35].

Podobnie jak dla układów dynamicznych typu 1-D analizowanych w drugim podrozdziale niniejszej pracy, także w przypadku układów typu 2-D i ogólnie typu M-D, można przy założeniu sterowalności w odpowiednim prostokącie rozwiązać efektywnie zagadnienie sterowania z minimalną energią [26],[27], [35],[36],[37]. W rozwiązaniu podaje się zarówno analityczną postać sekwencji sterowań z minimalną energią, jak i odpowiadającą tej sekwencji minimalną wartość energii. Należy podkreślić, że rezultaty dotyczące sterowania z minimalną energią układami typu 2-D i ogólnie typu M-D zostały uzyskane w oparciu jedynie o podstawowe własności normy i iloczynu skalarnego w przestrzeni euklidesowej, bez stosowania zaawansowanego aparatu teorii sterowania. Uzasadnienie tego faktu jest identyczne jak w przypadku układów typu 1-D analizowanych w drugim podrozdziale .

W literaturze poświęconej układom typu 2-D oprócz modelu Roessera danego równaniami /5.1/ spotyka się również inne modele układów 2-D, w szczególności modele Attasiego [27] oraz kilka modeli Fornasiniego Marchesiniego [11], [12], [13]. Wzajemne związki pomiędzy poszczególnymi modelami analizowane są szczegółowo w obszernej monografii [27].

LITERATURA

[1] Anzai Y. : A note on reachability of discrete-time quantized control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-19, no.5, 1974, pp. 575-577 .

[2] Barr-Ness Y., Langholz G. : Preservation of controllability under sampling. International J. Control, vol.22, no.1, 1975,pp.39-48.

[3] Busłowicz M. : Controllability of linear discrete delay systems. Proceedings Symposium Functional Differential Systems and Related Topics - I, Zielona Góra 1981, pp.47-51 .

[4] Chen C.T. : Introduction to linear system theory . Holt Rinehart and Winston Inc. , New York 1970 .

[5] Ciftibasi T.,Yuksel O. : Sufficient or necessary conditions for modal controllability and observability of Roesser's 2D system model. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-28,no.3,1983, pp.527-529.

[6] Eising R. : Controllability and observability of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, no.1 , 1979.pp.132-133.

[7] Elliot D.L., Tarn T.J., Goka T. : Controllability of discrete bilinear systems with bounded controls. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no.2, 1973, pp.298-301.

[8] Evans M.E., Murthy D.N. : Controllability of a class of discrete-time bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no.1, 1977, pp.78-83 .

[9] Evans M.E., Murthy D.N. : Controllability of discrete-time systems with positive controls. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 6, 1977, pp.942-945 .

[10] Evans M.E., Murthy D.N. : Controllability of discrete-time inhomogeneous bilinear systems. Automatica, vol.14, no.2, 1978, pp.147-151 .

[11] Fornasini E., Marchesini G. : State-space realization theory of two-dimensional filters. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no.4, 1976, pp.484-492 .

[12] Fornasini E., Marchesini G. : Doubly-indexed dynamical systems : state space models and structural properties. Mathematical system Theory, vol.12, no.1, 1978, pp.59-72 .

[13] Fornasini E., Marchesini G. : Global properties and duality in 2-D systems. Systems and Control Letters, vol.2, no.1, 1983, pp.30-38.

[14] Frazho A.E. : A shift operator approach to bilinear system theory. SIAM J.Control and Optimization, vol.18, no.6, 1980,pp.640-658.

[15] Frazho A.E. : Abstract bilinear systems : the forward shift approach. Mathematical Systems Theory, vol.14, no.1, 1981, pp.83-94 .

[16] Fuhrmann P. : On weak and strong reachability and controllability of infinite-dimensional linear systems. JOTA, vol.9, no.2, 1972, pp.77-89 .

[17] Fuhrmann P. : On series and parallel coupling of a class of discrete-time infinite-dimensional systems. SIAM J.Control and Optimization, vol. 14, no.2, 1976, pp.339-358.

[18] Fuhrmann P. : Exact controllability and observability and realization theory in Hilbert spaces. J.Mathematical Analysis and Applications, vol.53, no.2, 1976, pp.337-392 .

[19] Goka T., Tarn T.J., Zaborski J. : On the controllability of a class of discrete bilinear systems. Automatica,vol.9,no.4, 1979 , pp.615-622 .

[20] Grasselli O.M., Isidori A., Nicolo P. : Dead-beat control of discrete-time bilinear systems. International J. Control, vol.32, no.1, 1980, pp.31-39.

[21] Harris S.E. : Stochastic controllability of linear discrete systems with multiplicative noise. International J. Control, vol.27, no.2, 1978, pp.213-227 .

[22] Helton J.W. : Discrete time systems, operators models and scattering theory. J.Functional Analysis, vol.16, no.1, 1971, pp.15-38.

[23] Hollis P., Murthy D.N. : Study of uncontrollable discrete bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-27, no.1, 1982, pp. 184-186.

[24] Inouye Y. : Notes on controllability and constructibility of linear discrete-time systems. International J. Control, vol.35, no.6, 1982, pp.1081-1084.

[25] Kaczorek T. : Teoria układów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa 1974 .

[26] Kaczorek T. : Minimum energy control for 3-D systems. Control and Cybernetics, vol. 12, no.3-4, 1983, pp. 53-58 .

[27] Kaczorek T. : Two-Dimensional Linear Systems. Springer-Verlag, Berlin 1985 .

[28] Kalman R.E. : On the general theory of control systems. Proceedings of 1 IFAC Congress, London 1960, pp.481-493 .

[29] Klamka J. : Relative and absolute controllability of discrete systems with delays in control. International J. Control, vol.26, no.1, 1977, pp.65-74 .

[30] Klamka J. : Minimum energy control of discrete systems with delays in control. International J.Control, vol. 26, no.5, 1977, pp.737-744 .

[31] Klamka J. : Controllability of linear infinite dimensional discrete systems delays in control. Analele Universitati Timisoara, seria Mathematika, vol. XVI, z.1, 1978, pp. 49-61.

[32] Klamka J. : Sterowalność biliniowych procesów dyskretnych. Z.N.Pol. Śl. z. Automatyka, no.54, 1980, str. 99-107 .

[33] Klamka J. : Sterowalność układów dynamicznych typu 2D. Z.N. Pol. Śl., z. Automatyka, no.63, 1982, str. 51-68.

[34] Klamka J. : Controllability of M-dimensional linear systems. Foundations of Control Engineering, vol. 8, no.2, 1983, str. 65-74 .

[35] Klamka J. : Minimum energy control of 2-D systems in Hilbert spaces. Systems Science. vol. 9, no.1-2, 1983, pp.33-42 .

[36] Klamka J. : Controllability and optimal control of 2-D linear systems. Foundations of Control Engineering, vol.9, no.1, 1984, pp. 15-24 .

[37] Klamka J. : Sterowalność i sterowanie optymalne układów typu M-D. Z.N. Pol. Śl., z. Automatyka, no.74, 1984, str. 121-133 .

[38] Klamka J. : Controllability of linear infinite dimensional discrete systems with delays . Foundations of Control Engineering, vol. 10, no. 3, 1985, pp.123-133 .

[39] Klein B. : Sterowanie optymalne nieliniowymi układami dyskretnymi. Rozprawa doktorska, Pol. Warszawska, Wydz.Elektroniki, 1983.

[40] Kucera V. : Testing controllability and constructi-bility in discrete linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-25, no.2, 1980, pp.297-298.

[41] Kung S., Levy B., Morf M., Kailath T. : New results in 2D systems theory : 2D state space models realization and the notions of controllability, observability and minimality. Proceedings IEEE, vol. 65, no. 6, 1977, pp. 945-961 .

[42] Mallela P. : State controllability and identifiability of discrete stationary linear systems with arbitrary lag. Mathematical Modelling, vol. 3, no. 1, 1982, pp. 59-67 .

[43] Mitter S.K., Foulkes R. : Controllability and pole assignment for discrete time linear systems defined over arbitrary fields. SIAM J. Control, vol.9, no.1, 1971 , pp. 1-7 .

[44] Mullis C. : On the controllability of discrete linear systems with output feedback. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-18, no. 6, 1973, pp. 608-615 .

[45] Niederliński A. : Systemy i sterowanie. Wstęp do automatyki i cybernetyki technicznej, PWN, Warszawa 1983 .

[46] Panda S. : Controllability of discrete composite systems. Automatica, vol. 6, no. 3, 1970, pp. 309-313 .

[47] Panda S., Chen C.T., Desoer C.A. : Comments on controllability and observability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-15, no.2, 1970, pp. 280-281.

[48] Roesser R. : A discrete state-space model for linear image processing. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-20,no.1, 1975, pp. 1-10 .

[49] Sontag E. : Linear systems over commutative rings : a survey. Richerche di Automatica, vol.7, no.1, 1976, pp. 1-34 .

[50] Sorenson E. : Controllability and observability of linear stochastic, time discrete control systems. Advances in Control Systems, vol.6, 1968, pp. 95-158.

[51] Staroświecki M. : Domaines de commandabilite des processus echantillonnes non lineaires. Podstawy Sterowania, tom 4, z.2, 1974, str. 101-114 .

[52] Tarn T.J., Elliot D.L., Goka T. : Controllability of discrete bilinear systems with bounded control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no. 2, 1973, pp. 298-301 .

[53] Weiss L. : Controllability, realization and stability of discrete-time systems. SIAM J.Control, vol. 10, no.2, 1972, pp.230-251.

[54] Younlong Y., Laixiang S., Huisheng Z. : Controllability and observability of discrete systems. Chineese Annales of Mathematic, vol. 3, no. 3, 1982, pp. 273-278 .

[55] Zadeh L.A., Desoer C.A. : Linear System Theory. The State Space Approach. McGraw-Hill, New York 1963 .

Recenzent: Doc.dr h.inż.Wojciech Mitkowski

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

Статья является обзором проблем управляемости дискретных динамических систем, разработанным на основе опубликованных за последние годы работ. Представлены условия управляемости для линейных, нелинейных и билинейных дискретных динамических систем. Представлены также системы типа 2-Д. Рассмотрена связь между разными типами управляемости с минимально-энергетическим управлением.

CONTROLLABILITY OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS - A SURVEY

S u m m a r y

The paper presents a survey of problems associated with the controllability of discrete-time dynamical systems. It has been prepared on the basis of recent publications. The controllability conditions for linear, nonlinear and bilinear discrete dynamical systems are given. 2-D systems are also considered. Relationships among various kinds of controllability and minimal-energy control are discussed.