

Krzysztof Kiwiel

Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa

Eugeniusz Toczyłowski

Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

SUBGRADIENTY ZAGREGOWANE W RELAKSACJACH LAGRANGE'A
ZADAŃ OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono wykorzystanie algorytmu subgradientowego Kiwiela (z selekcją subgradientów) w relaksacjach Lagrange'a zadań optymalizacji dyskretnej. Metoda ta umożliwia wyznaczenie zagregowanego rozwiązania zadania relaksacji Lagrange'a, spełniającego ograniczenia zrelaksowane. Rozwiązanie to ułatwia konstrukcję przybliżonego rozwiązania dopuszczalnego zadania pierwotnego. Wyznaczanie dopuszczalnego rozwiązania analizowane jest dla dwóch przykładowych zagadnień harmonogramowania produkcji: szeregowania zadań niezależnych na maszynach równoległych z uwzględnieniem podzielności i niezerowych czasów wznowienia oraz zagadnienie harmonogramowania produkcji przerywanej z uwzględnieniem kosztów przerywania produkcji oraz magazynowania. W rozważanych przykładach błąd otrzymanego rozwiązania przybliżonego maleje do zera w miarę wzrostu jednego z parametrów określających złożoność obliczeniową problemu (liczby jednostek produkcyjnych, liczby produktów).

1. Wprowadzenie

Zagadnienia harmonogramowania produkcji oraz sterowania dyskretnymi procesami przemysłowymi wymagają dokładnego lub przybliżonego rozwiązania zadań optymalizacji dyskretnej o szczególnej złożoności. Wiele skutecznych algorytmów optymalizacji dla trudnych problemów dyskretnych wykorzystuje metody relaksacji Lagrange'a, [2], [7], [9]. Rozwiązania zadań zrelaksowanych, otrzymywane metodami subgradientowymi, wykorzystywane są w metodach podziału i ograniczeń oraz algorytmach przybliżonych. Często istotnym ograniczeniem w skutecznym wykorzystywaniu relaksacji Lagrange'a jest fakt, że otrzymane najlepsze rozwiązanie zadania zrelaksowanego na ogół nie spełnia ograniczeń zrelaksowanych. Wyznaczenie przybliżonego rozwiązania dopuszczalnego wymaga utworzenia a następnie wykorzystania odpowiedniej heurystyki specyficznej dla danego problemu.

W pracy przedstawiono wykorzystanie algorytmu subgradientowego Kiwiela [4] do rozwiązywania zadań dyskretnych. Metoda ta, w odróżnieniu od powszechnie stosowanych prostych metod subgradientowych, umożliwia wyznaczenie zagregowanego rozwiązania zadania zrelaksowanego, spełniającego również ograniczenia zrelaksowane. Rozwiązanie to pozwala na łatwiejsze wyznaczenie

rozwiązania dopuszczalnego zadania pierwotnego.

W rozdziale 2 pracy sformułowano zadanie relaksacji Lagrange'a. W rozdziałach 3 i 4 omówiono algorytm z selekcją subgradientów do rozwiązywania zadań dualnych w przypadku ogólnym oraz dla zadań o strukturze blokowo-diagonalnej. W rozdziale 5 analizowane jest zagadnienie wyznaczania rozwiązań dopuszczalnych dla dwóch przykładowych problemów harmonogramowania produkcji. Rozważane są zagadnienia szeregowania zadań niezależnych na maszynach równoległych z uwzględnieniem podzielności i niezerowych czasów wznowienia oraz zagadnienie produkcji przerywanej z uwzględnieniem kosztów przerywania produkcji oraz magazynowania. Otrzymane, przybliżone rozwiązania dopuszczalne posiadają interesującą właściwość teoretyczną. W miarę wzrostu wartości jednego parametru określających złożoność obliczeniową problemu optymalizacji (np. liczby jednostek produkcyjnych, liczby zadań lub produktów) przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów, dokładność otrzymanego rozwiązania przybliżonego rośnie i w granicy niedokładność dąży do zera.

2. Sformułowanie zadania relaksacji

Rozważmy następujące zadanie programowania mieszane

$$\min c^T x + d^T v \quad (2.1a)$$

$$\text{przy } Ax + Bv = b \quad (2.1b)$$

$$Cx + Dv < e, \quad x > 0, \quad (2.1c)$$

$$v \in V, \quad (2.1d)$$

gdzie $x, c \in \mathbb{R}^{n_x}$, $v, d \in \mathbb{R}^{n_v}$, $b \in \mathbb{R}^N$, V jest skończonym zbiorem dyskretnym, zaś macierze A, B, C, D mają odpowiednie wymiary. Zakładamy, że zadanie (2.1) ma rozwiązanie.

Relaksacja Lagrange'a problemu (2.1) ze względu na ograniczenie (2.1b) wymaga wyznaczenia wartości funkcji dualnej

$$L(y) = \inf(c^T x + d^T v + y^T(Ax + Bv - b); (v, x) \in VX), \quad (2.2)$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem mnożników Lagrange'a zaś VX jest zbiorem par (v, x) spełniających ograniczenia (2.1c, d). Dla dowolnego y , $L(y)$ jest dolnym oszacowaniem wartości optymalnej zadania (2.1). Najlepsze oszacowanie odpowiada rozwiązaniu y^* zadania dualnego

$$\max\{L(y); y \in \mathbb{R}^N\}. \quad (2.3)$$

Zadanie dualne można rozwiązać minimalizując funkcję celu

$$f(y) = -L(y) = \sup\{-c^T x - d^T v - y^T (Ax + Bv - b) : (v, x) \in VX\}, \quad (2.4)$$

która jest wypukła i kawałkami liniowa na R^N [8]. Załóżmy, że dla każdego $y \in R^N$ potrafimy wyznaczyć pewne rozwiązanie $(v(y), x(y))$ zadania minimalizacji (2.2). Odpowiada to wyznaczeniu w y wartości f oraz jej pojedynczego subgradientu

$$g_f(y) = -Ax(y) - Bv(y) + b \quad (2.5)$$

czyli elementu subróżniczki

$$\partial f(y) = \{g \in R^N : f(y) \geq f(y) + \langle g, y - y \rangle \quad \forall y \in R^N\}.$$

W tym przypadku do minimalizacji f można wykorzystać jedną z metod optymalizacji nieróżniczkowalnej: algorytm subgradientowy [8], metodę płaszczyzn odcinających [3] lub algorytmy spadku [5].

Rozwiązanie zadania relaksacji Lagrange'a problemu (2.1) polega na wyznaczeniu rozwiązania $(v(y^*); x(y^*))$ zadania minimalizacji (2.2) dla optymalnej wartości mnożników y^* . W przypadku prostego algorytmu subgradientowego otrzymane rozwiązanie na ogół nie spełnia ograniczenia (2.1b), co może utrudnić znalezienie rozwiązania dopuszczalnego. Wady tej nie posiadają algorytmy spadku.

3. Algorytm z selekcją subgradientów

Metoda linearyzacji z selekcją subgradientów [5] jest iteracyjnym algorytmem spadku do minimalizacji wypukłej funkcji f . Startując z danego punktu y^1 , wyznacza ona ciąg punktów y^2, y^3, \dots w R^N , zbieżny do punktu minimalnego f . Ponadto generowany jest ciąg punktów próbnych $\{y^k\} \subset R^N$ z $y^1 = y^1$.

W k -tej iteracji korzysta się z następującej kawałkami liniowej aproksymacji funkcji f

$$\hat{f}^k(y) = \max\{f(y^j) + \langle g_f(y^j), y - y^j \rangle : j \in J^k\}, \quad (3.1)$$

gdzie $J^k \subset \{1, \dots, k\}$ ma co najwyżej $N+2$ elementy. Zauważmy, że $f(\cdot) \geq \hat{f}^k(\cdot)$ oraz $f(y^j) = \hat{f}^k(y^j)$ dla $j \in J^k$. Następny punkt próbny y^{k+1} rozwiązuje zadanie

$$\min\{\hat{f}^k(y) + \frac{1}{2}|y - y^k|^2 : y \in R^N\}, \quad (3.2)$$

gdzie składnik kary $|y - y^k|^2/2$ utrzymuje y^{k+1} w obszarze dobrej zgodności $\hat{f}^k(\cdot)$ z $f(\cdot)$; zaś $|\cdot|$ oznacza normę euklidesową. Jeżeli $\hat{f}^k(y^{k+1}) = f(y^k)$, to y^k minimalizuje f i algorytm kończy działanie; w przeciwnym przypadku $\hat{f}^k(y^{k+1}) < f(y^k)$. Algorytm wykonuje krok istotny do $y^{k+1} = y^{k+1}$ jeżeli

$$f(y^{k+1}) \leq f(y^k) + \bar{m}[\hat{f}^k(y^{k+1}) - f(y^k)],$$

gdzie $\bar{m} \in (0, 1)$ jest parametrem; w przeciwnym przypadku zachodzi krok zerowy z $y^{k+1} = y^k$. Krok istotny wymaga istotnego zmniejszenia wartości f . Natomiast krok zerowy umożliwia wykorzystanie nowego subgradientu $g_f(y^{k+1})$ do wzbogacenia następnej aproksymacji \hat{f}^{k+1} , co umożliwi wygenerowanie lepszego punktu próbnego y^{k+2} . Wyznaczenie odpowiedniego $J^{k+1} \subset \{1, \dots, k+1\}$ pozwala przejść do następnej iteracji.

Akumulacja subgradientów zgodnie z regułą $J^{k+1} = J^k \cup \{k+1\}$, czyli $J^{k+1} = \{1, \dots, k+1\}$, prowadziłyby do trudności z zajętością pamięci i nakładem obliczeń przy wzroście liczby iteracji. Wady tej nie ma selekcja subgradientów oparta na regule

$$J^{k+1} = \hat{J}^k \cup \{k+1\}$$

gdzie zbiór $\hat{J}^k \subset J^k$ z $|\hat{J}^k| \leq N+1$ określamy następująco. Punkt y^{k+1} można otrzymać z rozwiązania (y^{k+1}, u^k) następującego zadania programowania kwadratowego, równoważnego zadaniu (3.1) z $u^k = \hat{f}^k(y^{k+1})$:

$$\text{minimalizować } u + \frac{1}{2}|y - y^k|^2 \text{ względem } (y, u) \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (3.3a)$$

$$\text{spełniających } f(y^j) + \langle g_f(y^j), y - y^j \rangle \leq u \text{ dla } j \in J^k \quad (3.3b)$$

Niech $\lambda^k = (\lambda_j^k)_{j \in J^k}$ oznacza wektor mnożników Lagrange'a ograniczeń (3.3b). Niezależnie od ewentualnej niejednoznaczności, λ^k spełnia relacje

$$\sum_{j \in J^k} \lambda_j^k = 1, \quad \lambda_j^k \geq 0 \quad \text{dla } j \in J^k,$$

wynikające ze struktury (3.3). Ponadto, rozwiązując zadanie (3.3) jednym z algorytmów ograniczeń aktywnych (zob. [1]), można wyznaczyć λ^k z co najwyżej $N+1$ niezerowymi składowymi, ponieważ zadanie (3.3) ma $N+1$ zmiennych. Przyjęcie

$$\hat{J}^k = \{j \in J^k : \lambda_j^k \neq 0\}$$

odpowiada zachowaniu kawałków liniowych \hat{f}^k , które są aktywne w rozwiązaniu zadania (3.2); pozostałe kawałki są odrzucane.

Przy założeniach poprzedniego punktu, ciąg $\{y^k\}$ zbiega do pewnego rozwiązania y^* zadania dualnego (2.2), natomiast subgradienty zagregowane

$$p^k = \sum_{j \in \hat{J}^k} \lambda_j^k g_f(y^j)$$

zbiegają do wektora zerowego [5]. Określając rozwiązanie zagregowane zadania zrelaksowanego (2.2)

$$x^k = \sum_{j \in \hat{J}^k} \lambda_j^k x(y^j), \quad v^k = \sum_{j \in \hat{J}^k} \lambda_j^k v(y^j),$$

gdzie: $\sum_{j \in \hat{J}^k} \lambda_j^k = 1, \lambda_j^k > 0$ dla $j \in \hat{J}^k, |\hat{J}^k| \leq N+1,$

oraz korzystając z (2.5) i definicji $(v(\cdot), x(\cdot))$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} Ax^k + Bv^k - b^k &= -p^k \\ Cx^k + Dv^k &\leq e, \quad x^k \geq 0. \end{aligned}$$

Tak więc $p^k \rightarrow 0$ oznacza asymptotyczne znikanie błędu spełnienia ograniczeń relaksowanych (2.1b) przez rozwiązania zagregowane, spełniające ograniczenia (2.1c). Oczywiście, ograniczenie dyskretne (2.1d) nie jest zwykle spełnione przez v^k ze względu na niewypukłość V .

Przy dodatkowych założeniach można zapewnić zakończenie działania algorytmu po skończonej liczbie iteracji z optymalnym y^k i $p^k=0$, a więc z (v^k, x^k) spełniającym (2.1b). Wystarcza do tego skończoność zbioru wartości odwzorowania algorytmicznego $g_f(\cdot)$, zależąca od sposobu wyznaczania rozwiązań zadań (2.1). Zachodzi ona, na przykład wtedy, gdy $x(y)$ jest zawsze punktem wierzchołkowym zbioru $\{x: Cx \leq e - Dv, x \geq 0\}$.

4. Zadania o strukturze blokowo-diagonalnej

W praktyce często ograniczenia (2.1c) mają postać

$$\begin{aligned} C_1 x_1 + D_1 v_1 &\leq e_1 \quad \text{dla } i=1, \dots, n, \\ x_1 &\geq 0, \quad v_1 \in V_1 \quad \text{dla } i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie $(\cdot)_1$ oznacza i -tą składową wielkości (\cdot) z (2.1), niekoniecznie jednoelementową. Oznaczmy przez VX_1 zbiór (v_1, x_1) spełniających (4.1). Wtedy funkcję celu (2.4) można przedstawić jako

$$f(y) = \sum_{i=1}^n f_{i1}(y) + b^T y, \quad (4.2)$$

gdzie każda składowa

$$f_{i1}(y) = -\inf\{c_1^T x_1 + d_1^T v_1 + y^T (A_1 x_1 + B_1 v_1) : (v_1, x_1) \in VX_1\} \quad (4.3)$$

jest wypukłą, kawałkami liniową funkcją, mającą w y subgradient

$$g_{f_{i1}}(y) = -A_1 x_1(y) - B_1 v_1(y)$$

odpowiadający rozwiązaniu $(v_1(y), x_1(y))$ zadania (4.3).

Algorytm minimalizacji z poprzedniego punktu może wykorzystywać addytyw-

na strukturę f w następujący sposób. Podobnie do (2.1), każdą składową f_i aproksymujemy funkcją kawałkami liniowa

$$\hat{f}_i^k(y) = \max\{f_i(y^j) + \langle g_{f_i}(y^j), y - y^j \rangle : j \in J_i^k\}, \quad (4.4)$$

gdzie $J_i^k \subset \{1, \dots, k\}$ dla $i=1, \dots, n$. W zadaniu generacji punktu próbnego (2.2) wykorzystujemy

$$\hat{f}^k(y) = \sum_{k=1}^n f_i^k(y) + \langle b, y \rangle.$$

Analogiem zadania (3.2) jest zadanie

$$\min b^T y + \sum_{i=1}^n u_i + \frac{1}{2} |y - y^k|^2, \quad (4.5)$$

$$\text{przy } f_i(y^j) + \langle g_{f_i}(y^j), y - y^j \rangle \leq u_i \text{ dla } j \in J_i^k, i=1, \dots, n$$

o mnożnikach Lagrange'a λ_{ij}^k spełniających

$$\sum_{j \in J_i^k} \lambda_{ij}^k = 1, \quad \lambda_{ij}^k \geq 0 \text{ dla } j \in J_i^k, i=1, \dots, n. \quad (4.6)$$

W tym przypadku selekcja subgradientów polega na doborze

$$J_i^k = \{j \in J_i^k : \lambda_{ij}^k \neq 0\},$$

$$J_i^{k+1} = J_i^k \cup \{k+1\},$$

przy czym możemy zapewnić (por. [1])

$$\sum_{n=1}^n |J_i^k| \leq N+n, \quad (4.7)$$

ponieważ zadanie (4.5) ma $N+n$ zmiennych.

Pozostałe relacje punktu 2 mają naturalne uogólnienia. Subgradient zagregowany

$$p^k = b + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \hat{J}_i^k} \lambda_{ij}^k g_{f_i}(y^j)$$

oraz rozwiązania zagregowane

$$x_i^k = \sum_{j \in \hat{J}_i^k} \lambda_{ij}^k x_i(y^j), \quad v_i^k = \sum_{j \in \hat{J}_i^k} \lambda_{ij}^k v_i(y^j) \quad (4.8)$$

spełniają

$$Ax^k + Bv^k - b = -p^k,$$

$$C_i x_i^k + D_i v_i^k \leq e_i, \quad x_i^k \geq 0 \text{ dla } i=1, \dots, n,$$

$$\sum_{j \in \hat{J}_i^k} \lambda_{ij}^k = 1, \quad \lambda_{ij}^k > 0 \text{ dla } j \in \hat{J}_i^k, i=1, \dots, n.$$

W dalszym ciągu $p^k \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$ oraz $p^k = 0$ dla pewnego k jeżeli odwzorowania $g_{f_i}(\cdot)$ są skończone wartościowe.

Dodajmy, że w ogólnym przypadku funkcja celu (2.4) może przybierać wartość $+\infty$ dla y spoza pewnego zbioru Y . Dysponując opisem zbioru Y w postaci układu liniowych ograniczeń indukowanych, można minimalizować f na Y , modyfikując odpowiednio opisane metody; zob. [6].

5. Wyznaczanie rozwiązań dopuszczalnych

Rozwiązania zagregowane (4.8) w punkcie optymalnym zadania (4.5) spełniają ograniczenia (2.1b), ponadto ograniczenie dyskretne (2.1d) może być spełnione przez wiele współrzędnych wektora v . Pokażemy teraz na przykładach jaki ma to wpływ na jakość otrzymanego rozwiązania dopuszczalnego.

5.1. Rozdział niezależnych i podzielnych zadań między jednostki produkcyjne

Rozważany jest rozdział n podzielnych na porcje zadań wykonywanych na m niejednorodnych jednostkach produkcyjnych pracujących równolegle, gdzie $n > m$. Porcje tego samego zadania mogą być wykonywane jednocześnie na kilku jednostkach. Kolejność wykonywania porcji jest dowolna. Niech x_{il} , $0 \leq x_{il} \leq 1$, oznacza porcję i -tego zadania przydzieloną do jednostki l , oraz zmienna binarna v_{il} oznacza odpowiedni przydział. Przydzielenie niezerowej porcji x_{il} kosztuje $s_{il}v_{il} + q_{il}x_{il}$, gdzie s_{il} jest składnikiem stałym kosztów oraz q_{il} współczynnikiem składnika liniowego kosztów. Analogicznie czas produkcji porcji x_{il} na linii l wynosi $e_{il}v_{il} + p_{il}x_{il}$. Przyjmujemy, że każda linia pracuje T jednostek czasu oraz, że dla każdej linii l możliwy jest przydział dodatkowych jednostek czasu o_l z jednostkowym kosztem c_l . Zadanie polega na podziale zadań i ich rozdziale między jednostki produkcyjne aby minimalizować koszt

$$\min F = \sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (s_{il}v_{il} + q_{il}x_{il}) + c_l o_l \right] \quad (5.1a)$$

$$\sum_{i=1}^n (e_{il}v_{il} + p_{il}x_{il}) \leq T + o_l \quad l=1, \dots, m \quad (5.1b)$$

$$\sum_{l=1}^m x_{il} = 1 \quad i=1, \dots, n \quad (5.1c)$$

$$0 \leq x_{il} \leq v_{il}, \quad v_{il} = 0, 1 \quad i=1, \dots, n, \quad l=1, \dots, m \quad (5.1d)$$

$$o_l \geq 0 \quad l=1, \dots, m \quad (5.1e)$$

Rozważmy relaksację ograniczeń (5.1b). Zadanie dualne rozwiązujemy minimalizując funkcję (4.2) na zbiorze ograniczeń indukowanych $o \leq y \leq c$, gdzie

$$f_1(y) = -\min \sum_{i=1}^m [(s_{i1} + y_1 r_{i1})v_{i1} + (q_{i1} + y_1 p_{i1})x_{i1}] \quad (5.2a)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i1} = 1 \quad (5.2b)$$

$$0 \leq x_{i1} \leq v_{i1}, \quad v_{i1} = 0, 1, \quad l=1, \dots, m. \quad (5.2c)$$

Stosując metodę linearyzacji z selekcją subgradientów otrzymujemy w kroku k zbiór punktów $x_i(y^j)$, $v_i(y^j)$, $j \in J_i^k$ będących rozwiązaniami zadania (5.2) dla y^j , $j \in J_i^k$. Można przyjąć, że wybierane są tylko te rozwiązania zadania (5.2), dla których tylko jedna współrzędna $x_{i1} = v_{i1} = 1$, gdzie $l = l(y^j)$, natomiast pozostałe współrzędne są równe zero. W rozwiązaniu zagregowanym (4.8) co najwyżej $n+m$ współrzędnych jest różnych od 0, stąd ze względu na (4.6), co najmniej $n-m$ współrzędnych musi być równe 1. Rozwiązanie zagregowane spełnia również ograniczenie (5.1b). W celu uzyskania rozwiązania dopuszczalnego zadania (5.1) należy zaokrąglić ułamkowe współrzędne wektora v do jedynek co dla zmiennej v_{i1} , $0 \leq v_{i1} \leq 1$, kosztuje $(s_{i1} + c_{i1} \cdot e_{i1})(1 - v_{i1})$. Łatwo zauważyć, że względny błąd otrzymanego w ten sposób dopuszczalnego rozwiązania zadania (5.1) dąży do 0, gdy $n \rightarrow \infty$.

5.2. Produkcja przerywana z uwzględnieniem kosztów produkcji i magazynowania

Harmonogramowanie produkcji n wyrobów na linii produkcyjnej w T okresach czasu: Niech d_{it} będzie zapotrzebowaniem na i -ty wyrób w okresie t realizowanym na koniec okresu, s_{it} - kosztem wznowienia produkcji w okresie t , h_i - kosztem magazynowania jednostki produktu w przeciągu okresu czasu, p_{it} - czasem produkcji jednostki produktu i w okresie t , R_t - czasem pracy linii produkcyjnej w okresie t . Wprowadzamy zmienne decyzyjne: x_{it} - produkcja wyrobu i w okresie t , oraz I_{it} - stan magazynu wyrobu i -tego na koniec okresu t . Zadanie polega na wyznaczeniu harmonogramów produkcji takich, że minimalizowany jest łączny koszt produkcji i magazynowania n wyrobów

$$F = \min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (s_{it}v_{it} + q_{it}x_{it} + h_i I_{it}) \quad (5.3a)$$

przy ograniczeniach

$$I_{i,t-1} + x_{it} - I_{it} = d_{it} \quad (5.3b)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{it} x_{it} \leq R_t, \quad t=1, \dots, T \quad (5.3c)$$

$$0 \leq x_{it} \leq M v_{it}, \quad v_{it} = 0, 1, \quad i=1, \dots, n, t=1, \dots, T \quad (5.3d)$$

$$0 \leq I_{it} \quad (5.3e)$$

gdzie $I_{i,0} = 0$, $i=1, \dots, n$ oraz M - dostatecznie duża liczba. Rozważmy relaksację ograniczeń (5.3c). Niech y_t będzie mnożnikiem Lagrange'a dla ograniczenia t . Zadanie dualne (2.3) rozwiązujemy minimalizując funkcję (4.2) dla $y \geq 0$, gdzie

$$f_i(y) = -\min_{x_{it}} \sum_{t=1}^T [s_{it} v_{it} + (q_{it} + y_t p_{it}) x_{it} + h_i I_{it}] \quad (5.4a)$$

przy ograniczeniach

$$I_{i,t-1} + x_{it} - I_{it} = d_{it} \quad t=1, \dots, T \quad (5.4b)$$

$$0 \leq x_{it} \leq M v_{it}, \quad v_{it} = 0, 1, \quad t=1, \dots, T \quad (5.4c)$$

Dla ustalonego y zadanie (5.4) rozwiązywane jest za pomocą algorytmu Wagnera-Wittina [10] o złożoności $O(T^2)$. Analogicznie jak w zadaniu poprzednim można pokazać, że w rozwiązaniu zagregowanym co najwyżej $2T$ zadań lokalnych (5.4) wymagać będzie zaokrąglenia ułamkowych wartości zmiennych binarnych v_{it} do jedynki. Zatem dla ustalonego T przy $n \rightarrow \infty$ względny błąd otrzymanego rozwiązania dopuszczalnego dąży do 0 (jeżeli $F \rightarrow \infty$ przy $n \rightarrow \infty$).

6. Zakończenie

Wyznaczenie rozwiązania zagregowanego spełniającego ograniczenie (2.1b) jest metodą pomocną w znajdowaniu rozwiązania dopuszczalnego w metodzie podziału i ograniczeń lub metodach przybliżonych. Należy jednak zauważyć, że skuteczność metody zależy od specyficznych cech rozważanego zadania i nie w każdym przypadku pozwala na uzyskanie dostatecznie zadowalającego rozwiązania. W zadaniach o bardziej złożonej strukturze często dopiero zastosowanie wielu zróżnicowanych algorytmów i technik strukturalnych, por. [9], pozwala na otrzymanie rozwiązania o zadowalającej dokładności.

LITERATURA

- [1] Best, M.J.: Equivalence of some quadratic programming algorithms. Math. Programming 30, 71-87, 1984.
- [2] Fisher, M.L.: The Lagrangean relaxation method for solving integer programming problems. Manag. Sci. 27, 1-18, 1981.
- [3] Kelley, J.E.: The cutting plane method for solving convex programs. J. SIAM 8, 703-712, 1960.
- [4] Kiwiel, K.C.: An aggregate subgradient method for nonsmooth convex minimization. Math. Programming 27, 320-341, 1983.
- [5] Kiwiel K.C.: Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. Lecture Notes in Mathematics 1133, Springer, Berlin 1985.
- [6] Kiwiel, K.C.: An algorithm for linearly constrained convex nondifferentiable minimization problems, J. Math. Anal. Appl. 105, 452-465, 1985.
- [7] Shapiro, J.F.: Mathematical Programming: Structures and Algorithms. Wiley, New York 1979.
- [8] Shor, N.Z.: Minimization Methods for Nondifferentiable Functions Springer, Berlin 1985.
- [9] Toczyłowski, E.: Lagrangean relaxation algorithm for simultaneous lot scheduling and allocation in single stage multifacility batch production systems. 12th Symposium Math. Programming, Boston, sierpień 1985.
- [10] Wagner, H.M.; Whittin, T.: Dynamic version of the economic lot size model. Manag. Sci. 5, 89-96, 1958.

Recenzant: Doc.dr h.inż. Józef Grabowski

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

СУБГРАДИЕНТЫ АГРЕГИРОВАННЫЕ В РЕЛАКСАЦИЯХ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Р е з ю м е

В работе представлено использование субградиентного алгоритма Кивеля в релаксации Лагранжа для задач дискретной оптимизации. Метод этот минимизирует дуальную функцию, путём её конструкции через кусочно - линейную аппроксимацию и решения вспомогательных задач квадратичного программирования. Алгоритм определяет агрегированное решение задачи релаксации Лагранжа, удовлетворяющее дуальным требованиям. Решение это способствует нахождению приближенного допустимого решения первичной задачи. Рассмотрены две примерные задачи.

PROGRAMMING PROBLEMS

S u m m a r y

This paper presents the use of the subgradient descent method of Kiwiel in Lagrangean relaxation of mixed integer programming problems. The method maximizes the dual function by constructing its piecewise linear approximations and solving quadratic programming subproblems. In computer an aggregate solution of the relaxed problem that satisfies the dualized constraints. Such a solution facilitates finding near - optimal feasible solutions to the original problem. Two production scheduling problems are considered as example :sequencing of pre-emptive tasks on parallel machines with set-up times ,and a constrained version of the lot size scheduling problem. For these problems the inaccuracy of the feasible solution found by the method converges to zero as the complexity of the problem (number of machines or products) increases.