

Marek Libura

Instytut Badań Systemowych PAN

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ DLA ZADANIA WYZNACZANIA
NAJKRÓTSZEJ DROGI HAMILTONA W GRAFIE

Streszczenie. W pracy badana jest wrażliwość rozwiązań optymalnych zadania wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie nieskierowanym na zmiany wag krawędzi tego grafu. Podana jest efektywna metoda znajdowania dla danej najkrótszej drogi Hamiltona takich zmian wag pojedynczych krawędzi grafu, które nie naruszają optymalności tej drogi.

1. Wprowadzenie

Rozważmy graf nieskierowany $G=(V,E)$ ze zbiorem wierzchołków $V=\{1,\dots,n\}$ i zbiorem krawędzi $E=\{e_1,\dots,e_m\}$. Każdej krawędzi e przypisana jest waga (długość) $c_e \in \mathbb{R}$; jeśli krawędź nie należy do grafu, to jej długość jest nieskończona.

Podgraf $G_H=(V,H)$, gdzie $H \subseteq E$, nazywany jest drogą Hamiltona w grafie G , jeśli jest drogą prostą i $|H|=n-1$. W dalszym ciągu będziemy rozważać drogi Hamiltona z ustalonymi końcami w wierzchołkach 1 oraz n . Będziemy również identyfikować drogę Hamiltona G_H z podzbiorem H krawędzi tej drogi. Oznaczmy symbolem $l(H)$ długość drogi Hamiltona H , to znaczy

$$l(H) = \sum_{e \in H} c(e)$$

Niech $\mathcal{H} = \{H \subseteq E: (V,H) \text{ jest drogą Hamiltona o końcach } 1 \text{ i } n\}$. Oznaczmy symbolem H^0 najkrótszą drogę Hamiltona w G przy założeniu ustalonych końców w wierzchołkach 1 i n , tzn.

$$H^0 = \arg \min_{H \in \mathcal{H}} l(H) \quad (1)$$

W [2] pokazano, że zadania wyznaczania drogi Hamiltona w grafie w przypadkach ustalonych końców oraz wolnych końców są algorytmicznie równoważne. Z tego powodu ograniczymy nasze rozważania do przypadku problemu z ustalonymi końcami.

Założmy, że dla danego grafu znana jest najkrótsza droga Hamiltona H^0 . Będziemy chcieli wyznaczyć zmiany wag krawędzi grafu, które nie naruszają optymalności tej drogi. Niech dla danej krawędzi $e \in E$ wielkości $c^+(e)$ oraz $c^-(e)$ oznaczają odpowiednio maksymalne zwiększenie oraz maksymalne zmniejszenie wagi krawędzi e , które to zmiany nie powodują usunięcia H^0 ze zbioru najkrótszych dróg Hamiltona. Zakładamy przy tym, że wagi pozostałych krawę-

dzi nie zmieniają się.

Wielkości $c^+(e)$, $c^-(e)$ noszą nazwę tolerancji krawędzi e . Zagadnienie wyznaczenia tolerancji parametrów jest typowym problemem z zakresu analizy poopytymalizacyjnej. Wyznaczenie dokładnych wartości $c^+(e)$ i $c^-(e)$ dla wszystkich $e \in E$ jest zagadnieniem co najmniej tak trudnym, jak pierwotne zadanie znalezienia najkrótszej drogi Hamiltona (które należy do klasy zadań NP-trudnych). Dlatego w dalszym ciągu zajmiemy się możliwością efektywnego wyznaczenia oszacowań od dołu wartości $c^+(e)$ i $c^-(e)$. Znajomość takich oszacowań jest interesująca z praktycznego punktu widzenia. Mając bowiem oszacowania $d^+(e)$ i $d^-(e)$ dla wartości $c^+(e)$ i $c^-(e)$ wiemy, że waga krawędzi e może się zmieniać w przedziale $[c(e)-d^-(e), c(e)+d^+(e)]$ bez naruszenia optymalności rozwiązania H^0 .

Przy konstrukcji oszacowań dla wartości tolerancji krawędzi jest wykorzystana ogólna idea użycia relaksacji zadania pierwotnego przy analizie poopytymalizacyjnej (patrz [3]).

Niech $G_T=(V,T)$ będzie dendrytem w G , to znaczy T jest drzewem w G i $|T|=n-1$. Niech ponadto

$$\mathcal{T} = \{T \subset E: (V,T) \text{ jest dendrytem w } G\}$$

Oznaczając długość dendrytu T symbolem $l(T)$ (tzn. $l(T) = \sum_{e \in T} c(e)$) możemy zapisać zadanie wyznaczania najkrótszego dendrytu T^0 w G w sposób następujący:

$$T^0 = \arg \min_{T \in \mathcal{T}} l(T) \quad (2)$$

Zadanie (2) jest relaksacją zadania (1), bowiem $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}$. Zadanie (2) jest znacznie łatwiejsze niż (1); również analiza poopytymalizacyjna dla tego zadania jest znacznie prostsza. Na to by wyniki analizy poopytymalizacyjnej dla zadania (2) mogły być wykorzystane do zadania (1) musi być spełniony następujący warunek:

(C) Zadanie (1) i zadanie (2) mają to samo rozwiązanie, tzn. $H^0 = T^0$.

Jeśli ten warunek jest spełniony i $t^+(e)$, $t^-(e)$, $e \in E$, oznaczają tolerancje krawędzie w najkrótszym dendrycie T^0 (to znaczy $t^+(e)$ i $t^-(e)$ są odpowiednio maksymalnym zwiększeniem i maksymalnym zmniejszeniem wagi krawędzie e , które nie naruszają optymalności T^0), wówczas $t^+(e)$, $t^-(e)$ są poszukiwanymi oszacowaniami dla wartości $c^+(e)$, $c^-(e)$, bowiem z faktu, że zadanie (2) jest relaksacją zadania (1) wynika, że

$$t^+(e) \leq c^+(e)$$

$$t^-(e) \leq c^-(e)$$

W rozdziale 2 zajmiemy się algorytmem wyznaczania tolerancji $t^+(e)$, $t^-(e)$ zakładając, że $T^0 = H^0$, natomiast w rozdziale 3 wrócimy do rozważania kiedy i w jaki sposób możemy uzyskać spełnienie warunku (C).

2. Wyznaczanie tolerancji krawędzi w dendrycie

Zagadnienie wyznaczania tolerancji krawędzi w najkrótszym dendrycie było rozważane w kilku pracach ([1,4,6]). Każda z metod tam podanych może być użyta do znalezienia dla danego najkrótszego dendrytu T^0 wartości $t^+(e)$, $t^-(e)$, $e \in E$. W rozdziale tym przedstawimy bardzo proste podejście do wyznaczania tolerancji łuków w dendrycie, wykorzystujące fakt, że spełnienie warunku $T^0 = H^0$ powoduje, że mamy do czynienia ze szczególnym dendrytem, który jest jednocześnie drogą w G .

Rozważmy dendryt T^0 i krawędź $e \notin T^0$. Niech $U(e) \subset T^0$ będzie zbiorem krawędzi tworzących w T^0 (jedyną) drogę łączącą końce krawędzi e . Zdefiniujmy ponadto dla $e \in T^0$ zbiór $W(e)$ w sposób następujący:

$$W(e) = \{w \in E \setminus T^0 : e \in U(w)\}$$

Poniższy znany lemat (patrz np. [6]) podaje warunki konieczne i dostateczne optymalności dendrytu T^0 w zadaniu (2):

Lemat 1 T^0 jest najkrótszym dendrytem w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $e \notin T^0$

$$c(e) \geq c(w) \quad \text{dla każdego } w \in U(e)$$

Bezpośrednią konsekwencją tego lematu jest następujący wniosek, który daje podstawę do określania tolerancji łuków przy danym optymalnym dendrycie T^0 :

Wniosek 1 Dla $e \in T^0$

$$t^+(e) = \min_{w \in W(e)} c(w) - c(e)$$

$$t^-(e) = \infty$$

Dla $e \notin T^0$

$$t^+(e) = \infty$$

$$t^-(e) = c(e) - \max_{w \in U(e)} c(w)$$

Wprowadźmy oznaczenie krawędzi e grafu poprzez parę (i, j) , $i, j \in V$, wierzchołków, które ona łączy i ponumerujmy wierzchołki grafu w taki sposób, aby $H^0 = T^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)\}$.

Wyznaczenie wartości $t^+(e), t^-(e)$ dla $e \in E$ zgodnie z Wnioskiem 1 wymaga obliczenia wartości $\min_{w \in W(e)} c(w)$ dla wszystkich $e \in T^0$ oraz $\max_{w \in U(e)} c(w)$ dla $e \notin T^0$.

Zauważmy, że wprowadzona numeracja wierzchołków powoduje, że zbiory $W(e)$ i $U(e)$ można opisać następująco:

Dla $e \in T^0$, tzn. dla $e = (i, i+1)$, gdzie $i = 1, \dots, n-1$, mamy

$$W(e) = \{(k, l) : 1 \leq k \leq i, i < l \leq n, (k, l) \neq (i, i+1)\} \quad (3)$$

Dla $e \notin T^0$, tzn. dla $e = (k, l)$, gdzie $k = 1, \dots, n-2, l = k+2, \dots, n$,

$$U(e) = \{(i, i+1) : k \leq i \leq l-1\} \quad (4)$$

Tolerancje łuków $t^+(e)$ dla $e \in T^0$ i $t^-(e)$ dla $e \notin T^0$ mogą być teraz wyznaczone według następującego algorytmu:

Wyznaczanie $t^+(e)$ dla $e \in T^0$

```
1° for i:=1 step 1 until n-1 do w(i, n+1):=∞;
   for j:=2 step 1 until n do w(0, j):=∞;
2° for i:=1 step 1 until n-2 do
   for j:=n step -1 until i+1 do
     w(i, j):= min{w(i-1, j), c(i, j), w(i, j+1)}
3° for i:=1 step 1 until n-1 do
   t+(i, i+1):= min{w(i-1, i+1), w(i, i+2)} - c(i, i+1)
```

Wyznaczanie $t^-(e)$ dla $e \notin T^0$

```
1° for i:=1 step 1 until n-1 do u(i, i+1):= c(i, i+1);
2° for i:=2 step 1 until n-1 do
   for j:=1 step 1 until n-1 do
     begin
       u(j, j+1):= max{u(j, j+1-1), u(j+1, j+1)};
       t-(j, j+1):= c(j, j+1) - u(j, j+1)
     end
```

Powyższy algorytm pozwala wyznaczyć $t^+(e)$, $t^-(e)$ dla wszystkich $e \in E$ w $D(n^2)$ krokach, a tym samym jest optymalny dla grafów nierozrzedzonych, tzn. jeśli $m=O(n^2)$. Dla grafów rzadkich możliwe są algorytmy o niższej złożoności (patrz np. [4,5]). Otwarty jest natomiast problem czy możliwe jest wyznaczenie wszystkich tolerancji krawędzi ze złożonością $O(m+n)$.

3. Wybór relaksacji zadania

Jak już wspomniano w rozdziale 1 na to, by wyznaczyć oszacowania $c^+(e)$, $c^-(e)$, $e \in E$, korzystając z relaksacji (2) zadania (1), potrzebne jest spełnienie warunku (C), to znaczy osiągnięcie równości $\bar{h}^0 = T^0$. W tym rozdziale dyskutujemy kiedy i w jaki sposób warunek ten może być spełniony. Prezentowane podejście jest oparte na następującym znanym lemacie (patrz np. [2]).

Lemat 2. Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (1) pozostaje niezmienny jeśli dokonamy następującej modyfikacji wag krawędzi grafu:

$$c'(i, j) = c(i, j) + p(i) + p(j), \quad i, j=1, \dots, n \quad (5)$$

gdzie $p(i), p(j)$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Wielkości $p(i)$, $i \in V$, będziemy w dalszym ciągu nazywali karami przypisanymi wierzchołkom grafu.

Łatwo pokazać następujący fakt:

Lemat 3. Tolerancje krawędzi $c^+(e)$, $c^-(e)$, $e \in E$, dla danej najkrótszej drogi Hamiltona nie ulegają zmianie w wyniku modyfikacji wag łuków grafu zgodnie z (5).

Dowód. Modyfikacja wag krawędzi grafu zgodnie z (5) nie powoduje zmiany wartości różnicy $l(H') - l(H'')$ dla dowolnej pary dróg Hamiltona $H', H'' \in \mathcal{H}$. Każda z kar $p(i)$, $i \in V$, wystąpi bowiem w tej różnicy tę samą liczbę razy ze znakiem plus i minus. Dla dowodu lematu wystarczy więc zauważyć, że wartość każdej z tolerancji $c^+(e)$, $c^-(e)$, $e \in E$, może być wyrażona jako różnica długości dwóch dróg Hamiltona. Tak istotnie jest, bowiem na przykład dla dowolnego $e \in H^0$ mamy $c^+(e) = l(H') - l(H^0)$, gdzie $H' = \arg \min l(H)$, a $\mathcal{H}_e \in \mathcal{H}$ jest zbiorem dróg Hamiltona nie zawierających krawędzi e . Podobnie, dla $e \notin H^0$ mamy $c^-(e) = l(H'') - l(H^0)$, gdzie $H'' = \arg \min l(H)$, a $\mathcal{H}_e \in \mathcal{H}$ jest zbiorem dróg Hamiltona zawierających krawędź e .

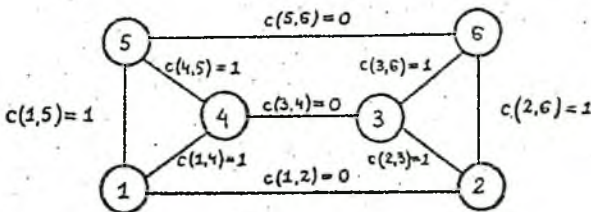
Dla dendrytów nie będących jednocześnie drogami Hamiltona odpowiedniki lematów 2 i 3 nie są prawdziwe i fakt ten jest podstawą następującego naszego algorytmu ([2]) wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie G.

Algorytm CH

- 1° Rozwiąż zadanie (2) dla grafu G wyznaczając T^0 .
- 2° Jeśli $T^0 \in \mathcal{H}$, to $H^0 = T^0$ — STOP;

w przeciwnym przypadku wybierz odpowiednie kary $p(i)$, $i \in V$, zmodyfikuj wagi krawędzi grafu zgodnie z (5) i idź do 1°.

Zaproponowano różne strategie wyboru kar w kroku 2° (patrz [2]). Algorytm wyznacza optymalną drogę Hamiltona, jeśli się kończy. W tym przypadku osiągamy spełnienie warunku (C): $H^0 = T^0$ dla zmodyfikowanych wag krawędzi. Praktyczne eksperymenty ([2]) pokazują, że typowe strategie wyboru kar prowadzą zwykle do uzyskania optymalnej drogi Hamiltona. W pracy [5] podano jednak przykład grafu (patrz rys. [1]), dla którego typowe strategie wyboru kar nie prowadzą do zakończenia algorytmu i wyznaczenia H^0 . Jednakże w tym przypadku odpowiedni system kar $p(i)$, $i \in V$, istnieje. Wystarczy bowiem wziąć $p(1) = p(6) = 1$, $p(i) = 0$, $i=2,3,4,5$.



Rys. 1. Przykład Helda i Karpa
 Fig. 1. Example of Held and Karp

Powstaje więc następujące pytanie:

(Q) Czy dla danego grafu G i danej optymalnej drogi Hamiltona H^0 istnieje system kar $p(i)$, $i \in V$, taki że dla grafu G z wagami krawędzi zmodyfikowanymi zgodnie z (5), H^0 jest równocześnie najkrótszym dendrytem? Jest to równoważne pytaniu czy zawsze za pomocą modyfikacji wag krawędzi możemy zagwarantować spełnienie warunku (C), tzn. uzyskać równość $H^0 = T^0$. Odpowiedź jest, niestety, negatywna. Aby to pokazać udowodnimy twierdzenie, które formułuje warunki konieczne i dostateczne istnienia odpowiedniego systemu kar $p(i)$, $i \in V$.

Twierdzenie. Niech $H^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)\}$ będzie najkrótszą drogą Hamiltona w grafie $G = (V, E)$. Na to, aby istniał system kar $p(i)$, $i \in V$, taki, że w grafie G z wagami krawędzi zmodyfikowanymi według formuły $c'(i,j) = c(i,j) + p(i) + p(j)$, $i, j \in V$, H^0 jest równocześnie najkrótszym dendrytem potrzeba i wystarcza, aby dla i, j, k , gdzie $(i,j) \in E$, $i=1, \dots, n-2$, $j=i+2, \dots, n$, $k=i+1, \dots, j-1$, zachodziła nierówność

$$p(i) + p(j) - p(k) - p(k+1) \geq c(k, k+1) - c(i, j) \quad (6)$$

Dowód Rozważmy najkrótszą drogę Hamiltona H^0 w grafie G . Na to, aby zbiór H^0 wyznaczał również najkrótszy dendryt w grafie G ze zmodyfikowanymi wagami, potrzeba i wystarcza, aby były spełnione warunki Lematu 1 dla H^0 i wag krawędzi określonych formułą (5). Indeksy i, j w twierdzeniu przebiegają wszystkie krawędzie grafu nie należące do H^0 . Dla każdej pary (i, j) odpowiadającej takiej krawędzi musi być spełniony warunek $c(i, j) \gg c(w)$ dla każdego $w \in U(i, j)$. Ponieważ zgodnie z (4) $U(i, j) = \{(k, k+1) : k=i, i+1, \dots, j-1\}$ zatem warunek powyższy dokładnie odpowiada nierównościom (6) dla i, j, k określonych w twierdzeniu i dla wag krawędzi danych przez (5).

Zagadnienie istnienia odpowiedniego systemu kar jest więc równoważne zagadnieniu niesprzeczności układu nierówności liniowych (6). Liczba tych nierówności jest rzędu $O(mn - n^2)$ i mają one szczególną strukturę.

Na rysunku 2 podany jest przykład grafu, dla którego odpowiedni system kar nie istnieje. $H^0 = \{(1,2), \dots, (6,7)\}$ jest w tym grafie najkrótszą drogą Hamiltona łączącą wierzchołki 1 i n . Pokażemy, że odpowiedni układ nierówności (6) dla tego grafu jest sprzeczny.

Wypiszemy warunki (6) dla następujących podzbiorów indeksów i, j, k :

$$i=1, \quad j=6, \quad k=1$$

$$i=2, \quad j=5, \quad k=3$$

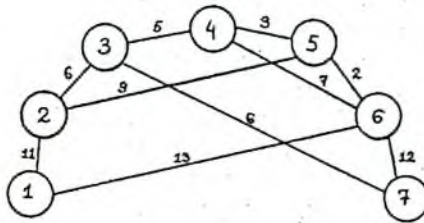
$$i=3, \quad j=7, \quad k=6$$

$$i=4, \quad j=6, \quad k=5$$

Odpowiednie nierówności mają postać

$$\begin{array}{rcl} -p(2) & + p(6) & \geq -2 \\ p(2) - p(3) - p(4) + p(5) & & \geq -4 \\ p(3) & - p(6) & \geq 6 \\ & p(4) - p(5) & \geq -5 \end{array}$$

Sumując powyższe nierówności stronami otrzymujemy sprzeczność $0 \geq -5$, a zatem dla grafu przedstawionego na rys. 2 i najkrótszej drogi Hamiltona H^0 odpowiedni system kar nie istnieje.



Rys. 2. Przykład grafu, dla którego odpowiedni system kar nie istnieje
 Fig. 2. Example of graph for which an appropriate system of penalties does not exist

4. Zakończenie

W pracy przedstawiono metodę wyznaczania oszacowań dolnych dla tolerancji krawędzi najkrótszej drogi Hamiltona w grafie. Oszacowania te otrzymuje się wyznaczając tolerancje krawędzi dla najkrótszego dendrytu w grafie ze zmodyfikowanymi wagami krawędzi. Modyfikacja ta polega na znalezieniu kar dla wierzchołków. Wprowadzenie tych kar powoduje, że wynikiem rozwiązania zadania wyznaczania najkrótszego dendrytu jest dana droga Hamiltona. Pokazano warunki konieczne i dostateczne pokazujące, kiedy taka konstrukcja jest możliwa.

Przy praktycznym stosowaniu opisanego wyżej podejścia należy rozróżnić trzy przypadki:

Przypadek pierwszy dotyczy sytuacji, w której do znalezienia najkrótszej drogi Hamiltona użyto algorytmu (CH) wyznaczającego równocześnie system kar dla wierzchołków grafu. W tym przypadku $H^0 = T^0$ i możemy bezpośrednio zastosować algorytm z rozdziału 2 do obliczenia tolerancji krawędzi.

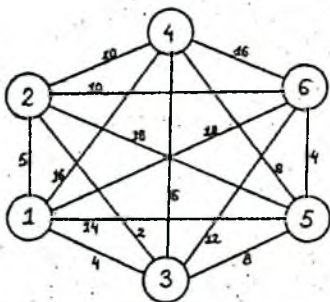
Przypadek drugi odpowiada sytuacji, kiedy znamy najkrótszą drogę Hamiltona H^0 , ale nie mamy systemu kar $p(i)$, $i \in V$, który gwarantuje $H^0 = T^0$, mimo że taki system istnieje. Możemy wówczas, stosując podejście opisane w rozdziale 3, wyznaczyć odpowiedni system kar znajdując dowolne rozwiązanie dopusz-

czalne układu nierówności (6). Każde z tych rozwiązań daje poprzez wyznaczenie $t^+(e)$, $t^-(e)$, $e \in E$, oszacowanie tolerancji krawędzi w optymalnej drodze Hamiltona, przy czym (patrz przykład w rozdz. 5) oszacowania otrzymane na podstawie różnych systemów kar mogą nie być takie same.

Przypadek trzeci odpowiada sytuacji, kiedy odpowiedni system kar nie istnieje. Możemy się o tym przekonać stwierdzając, że układ nierówności (6) jest sprzeczny. Zwykle przy badaniu niesprzeczności układu (6) uzyskujemy również pewien system kar $p(i)$, $i \in V$, który narusza niewielką liczbę nierówności i daje małą (choć niezerową) różnicę $d = l(H^0) - l(T^0)$. Można wówczas pokazać, że wyznaczając tolerancje $t^+(e)$, $t^-(e)$ dla najkrótszego dendrytu T^0 uzyskujemy również pewne oszacowania od dołu dla tolerancji krawędzi w najkrótszej drodze Hamiltona. W stosunku do omawianych wyżej przypadków występują tu pewne różnice: Zamiast wartości $t^+(e)$, $t^-(e)$ jako oszacowania od dołu $c^+(e)$ i $c^-(e)$ należy teraz wziąć $t^+(e) - d$, $t^-(e) - d$. Ponadto oszacowania te są uzyskiwane tylko dla krawędzi grafu należących do zbioru $(H^0 \cap T^0) \cup (E - H^0) \cap (E - T^0)$.

5. Przykład

Rozważmy graf K_6 z wagami krawędzi jak na rys. 3. Optymalną drogą Hamiltona w tym grafie jest $H^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (5,6)\}$, natomiast najkrótszym dendrytem jest $T^0 = \{(1,3), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$. Zatem $H^0 \neq T^0$.



Rys. 3. Graf K_6 z wagami krawędzi

Fig. 3. Graph K_6 with weights of edges

Wypisując układ nierówności (6) łatwo znaleźć system kar gwarantujący, że w zmodyfikowanym grafie H^0 jest najkrótszym dendrytem. Biorąc np. $p(3) = 1$, $p(1) = 0$ dla $i \neq 3$ i stosując algorytm z rozdziału 2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} t^+(1,2) &= 0, & t^+(2,3) &= 2, & t^+(3,4) &= 2, & t^+(4,5) &= 3, & t^+(5,6) &= 6 \text{ oraz} \\ t^-(1,3) &= 0, & t^-(1,4) &= 9, & t^-(1,5) &= 7, & t^-(1,6) &= 11, & t^-(2,4) &= 3, \\ t^-(2,5) &= 11, & t^-(2,6) &= 3, & t^-(3,5) &= 2, & t^-(3,6) &= 6, & t^-(4,6) &= 10 \end{aligned}$$

Biorąc inny możliwy system kar, np. $p(3)=2$, $p(1)=0$, $i \neq 3$ mamy:

$$\begin{aligned} t^+(1,2) &= 1, & t^+(2,3) &= 2, & t^+(3,4) &= 2, & t^+(4,5) &= 4, & t^+(5,6) &= 6 & \text{oraz} \\ t^-(1,3) &= 1, & t^-(1,4) &= 8, & t^-(1,5) &= 6, & t^-(1,6) &= 10, & t^-(2,4) &= 2 \\ t^-(2,5) &= 10, & t^-(2,6) &= 3, & t^-(3,5) &= 2, & t^-(3,6) &= 6, & t^-(4,6) &= 10 \end{aligned}$$

LITERATURA

- [1] Chin F.Y., Houck D.J.: Algorithm for updating minimal spanning trees, J. Comptr. Syst. Sci. 16(1978) 33-344.
- [2] Christofides N.: Graph theory. An algorithmic approach. Academic Press 1975 New York, London, San Francisco.
- [3] Geoffrion A.M., Nauss R.: Parametric and postoptimality analysis in integer programming, Manag. Sci., 23(1977) 453-466.
- [4] Gusfield D.: A note on arc tolerances in sparse shortest-path and network flow problems, Networks 13(1983) 191-196.
- [5] Held M., Karp R.M.: The travelling salesman problem and minimum spanning trees, Opns. Res., 18, 1138-1162, 1970.
- [6] Tarjan R.E.: Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest-path trees, Inf. Process. Lett. 14(1982) 30-33.

Recenzent: Doc.dr h.inż. Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШЕЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ПУТИ В ГРАФЕ

Р е з ю м е

Представлен метод нахождения изменений длины дуг неориентированного графа, при которых данная кратчайшая гамильтонова путь остается оптимальной.

SENSITIVITY ANALYSIS OF OPTIMAL SOLUTIONS FOR SHORTEST HAMILTONIAN PATH PROBLEM

S u m m a r y

The problem of computing edge tolerances in the shortest Hamiltonian path is considered. It is assumed that an undirected weighted graph and the shortest Hamiltonian path H^0 in it is given. The problem consists in finding for any edge e of the graph the so called edge tolerances $c^+(e)$ and $c^-(e)$, which are defined as maximum increase /maximum decrease - respectively/ of the weight of the edge e which do not destroy the optimality of

the path H^0 . In the paper a method of computing lower bounds of edge tolerances of the shortest spanning tree in the graph with modified edge weights. The modification consists in adding to the edge weight so called penalties associated with vertices of the graph. The problem of existence of appropriate penalties is considered. With such penalties the shortest spanning tree in the modified graph is also a Hamiltonian path. Necessary and sufficient conditions of existence of the system of appropriate penalties are formulated and an example of graph for which such a system does not exist is given. The approach is illustrated by an example of graph for which edge tolerances are calculated.