ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol.894

Jan Magott
Politechnika Wrocławska

CZASOWE SIECI PETRIEGO - MOŻLIWOŚCI, OGRANICZENIA, ROZSZERZENIA

Streszczenie. W artykule przedstawiono zasady reprezentacji deterministycznych problemów szeregowania zadań bez dodatkowych zasobów i z ich uwzględnieniem, stochastycznych problemów szeregowania zadań oraz sieci kolejkowych za pomocą czasowych sieci Petriego.

1. Wstęp

Czasowe sieci Petriego są formalizmem możliwym do wykorzystania w zagadnieniach rozdziału zasobów - w celu rozwiązywania konfliktów zasobowych oraz optymalizacji wykorzystania zasobów. W sieciach tych - czas wykonania operacji najczęściej jest odwzorowywany za pomocą czasu palenia przejścia, znacznie rzadziej w postaci czasu przypisanego miejscu. Czasowe sieci Petriego podzielić można na deterministyczne i stochastyczne. W sieciach deterministycznych - czas operacji wyrażony jest nieujemną liczbą rzeczywistą, natomiast w sieciach stochastycznych - zmienną losową o rozkładzie wykładniczym.

Celem pracy jest wskazanie możliwości zastosowania sieci czasowych w zagadnieniach będących obiektem badań innych dziedzin oraz podanie rozszerzeń sieci dla zwiększenia ich zdolności opisowych.

Za pomocą sieci deterministycznych wyrażono deterministyczne problemy szeregowania zadań: zależnych i niezależnych, podzielnych i niepodzielnych, o identycznych i dowolnych chwilach przybywania; przy realizacji zadań na procesorach identycznych, jednorodnych i dowolnych. Ponadto opisano deterministyczne problemy szeregowania z uwzględnieniem dodatkowych zasobów.

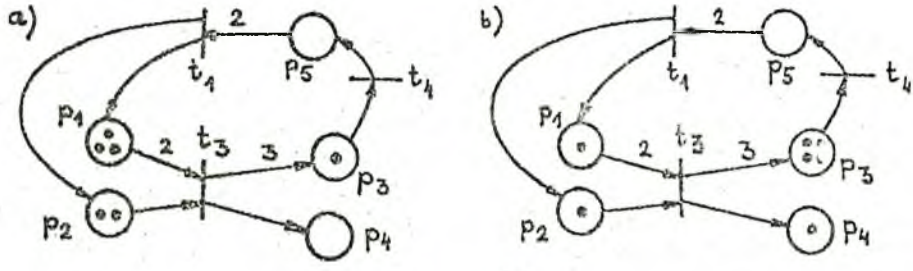
Za pomocą sieci stochastycznych wyrażono stochastyczne problemy szeregowania zadań o czasach wykonania zadanych rozkładami wielostopniowymi Cox'a, w których każdy stopień opisany jest rozkładem wykładniczym.

Z wykorzystaniem sieci stochastycznych przeanalizowano możliwości opisu sieci kolejkowych dla różnych dyscyplin szeregowania i stanowisk obsługi o czasie obsługi zadanym rozkładem wielostopniowym Cox'a oraz ze zgłoszeniami jednej i wielu klas.

Porównano również wymienione dziedziny z problematyką czasowych sieci Petriego.

2. Definicje

$N = \{0,1,\ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych. Sieć Petriego (SP) jest piątką uporządkowaną $\mathcal{N} = \langle P,T,F,W,M_0 \rangle$, gdzie P - zbiór miejsc, T - zbiór przejść, $F \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ jest zbiorem łuków, $W: F \longrightarrow N$ jest funkcją krotności łuku, $M_0: P \longrightarrow N$ jest markowaniem początkowym. Miejsca sieci oznaczamy kółkami, przejścia - kreskami. W przypadku krotności łuku $f \in F$ większej od jedności ($W(f) > 1$), w reprezentacji graficznej - łukowi przypisana jest liczba $W(f)$. Gdy $W(f)=1$, symbol 1 pomijamy. Liczba $M_0(p_i)$ określa liczbę kropek w miejscu p_i. Rozważmy sieć prezentowaną rys. 1a.



Rys.1 Fig.1

Aby przejście t_3 mogło być zapalone - muszą istnieć co najmniej dwie kropki w miejscu p_1 oraz co najmniej jedna kropka w miejscu p_2. Po zapaleniu tego przejścia, dwie kropki są pobierane z miejsca p_1 oraz jedna - z miejsca p_2, ponadto trzy kropki są dodawane do miejsca p_3 oraz jedna - do miejsca p_4. Sieć z nowym markowaniem ilustruje rys. 1b.

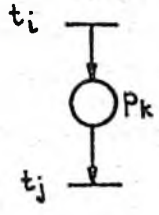
Deterministyczna czasowa sieć Petriego (DCSP) jest szóstką $\mathcal{N}^t = \langle P,T,F,W,M_0,\mathcal{T} \rangle$, gdzie $\mathcal{T}: T \longrightarrow R_+$ (R_+ - zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych) jest funkcją czasu palenia przejścia. W przypadku powyższej sieci, rozważana zmiana markowania może nastąpić nie wcześniej niż po czasie $\mathcal{T}(t_3)$ od chwili, w której zaistniały warunki palenia przejścia t_3.

Pojęcie stochastycznej czasowej sieci Petriego [7], [12] zostało sprowadzone do postaci uogólnionej stochastycznej czasowej sieci Petriego [1] (USCSP). Zbiór przejść USCSP podzielony jest na dwa podzbiory: T_1 - podzbiór przejść czasowych, T_2 - podzbiór przejść nieczasowych ($T_1 \cap T_2 = \emptyset$). Czas palenia przejścia czasowego zadany jest rozkładem wykładniczym z parametrem λ_i. Przejścia nieczasowe palą się w przedziale czasu o zerowej długości. Jeśli dane markowanie uniemożliwia palenie przejść czasowych ze zbioru $T_1' \subset T_1$ oraz przejść nieczasowych ze zbioru $T_2' \subset T_2$, to przejścia czasowe mogą palić się dopiero po zapaleniu przejść nieczasowych.

Wybór przejścia nieczasowego - palonego dla zadanego markowania dokonywany jest w oparciu o rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze T_2'. Stąd USCSP zadana jest ósemką $\mathcal{K}^t = \langle P, T_1, \Lambda, T_2, H, F, W, M_0 \rangle$, gdzie Λ jest zbiorem parametrów λ_i, natomiast H jest zbiorem rozkładów prawdopodobieństw dla zbiorów $T_2' \subset T_2$.

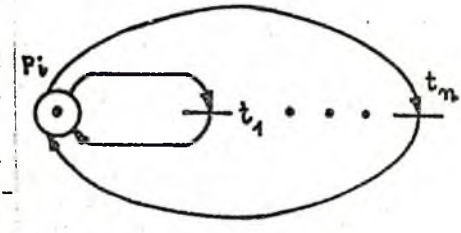
3. Deterministyczne problemy szeregowania zadań

Rozważać będziemy zbiór n zadań $\mathcal{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ oraz zbiór m procesorów $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Zadanie Z_j przedstawione jest za pomocą przejścia t_j. Określone w zbiorze $\mathcal{Z}$ ograniczenie kolejnościowe $Z_i \prec Z_j$ (zadanie Z_i musi być zakończone przed rozpoczęciem zadania Z_j) odwzorowujemy za pomocą struktury przedstawionej na rys.2



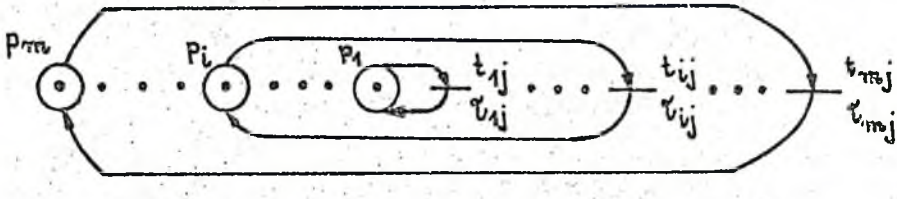
Rys.2 Fig. 2

Procesorowi P_i zostaje przypisane miejsce p_i zawierające jedną kropkę. Możliwość realizacji zadań ze zbioru $\mathcal{Z}$ za pomocą procesora P_i wyraża rys. 3.



Rys.3 Fig. 3

W przypadku procesorów dowolnych, czas wykonywania zadania Z_j na procesorze P_i równy jest τ_{ij}. W tym przypadku każdemu sposobowi realizacji zadania Z_j podyktowanemu wyborem procesora P_i przyporządkowane jest przejście t_{ij} deterministycznej czasowej sieci Petriego z czasem jego palenia równym $\tau(t_{ij}) = \tau_{ij}$. Dla zadania Z_j, wyrażeniu możliwych jego sposobów i czasów realizacji służy struktura przedstawiona na rys. 4.



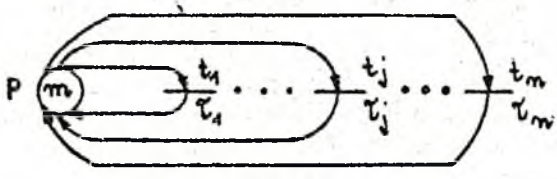
Rys. 4 Fig.4

W czasie realizacji zadania Z_j na procesorze P_i - kropka w miejscu p_i jest zarezerwowana przez czas τ_{ij}. Stąd żadne z zadań wymagających tego procesora nie może być w tym czasie realizowane. Po czasie τ_{ij}, przejście t_{ij} zostaje zapalone, kropka zarezerwowana w miejscu p_i jest z tego

miejsca usuwana oraz niezarezerwowana kropka jest lokowana w tym miejscu. Od tej chwili procesor p_i jest dostępny dla innych zadań.

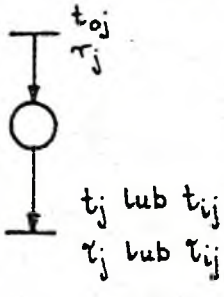
W przypadku procesorów jednorodnych stosujemy również reprezentację z rys. 4.

Dla procesorów identycznych czas wykonywania zadania Z_j na każdym z procesorów wynosi τ_j. Stąd w tym przypadku nie musimy każdemu z procesorów przypisywać odrębnego miejsca, wystarcza bowiem struktura z rys. 5, gdzie miejsce p opisujące zbiór procesorów $\mathcal{P}$ zawiera m kropek.



Rys.5 Fig.5

Dla dowolnych chwil przybywania zadań - symbolem r_j oznaczamy chwilę pojawienia się zadania Z_j. W tym przypadku wprowadzamy przejście t_{oj} o czasie palenia równym $\mathcal{T}(t_{oj})=r_j$ w sposób pokazany na rys. 6.

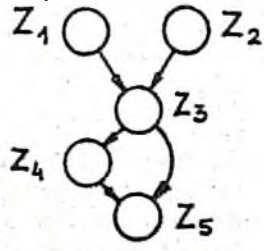


Rys. 6 Fig. 6

Modelowanie zadań podzielnych wymaga wprowadzenia przejść, których proces palenia może być podzielony na podprocesy o sumarycznym czasie trwania równym czasowi wykonywania zadania.

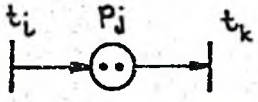
Celem ilustracji wyrazimy w języku deterministycznych czasowych sieci Petriego - problem szeregowania zbioru zadań zależnych niepodzielnych o dowolnych chwilach przybywania na dwóch identycznych procesorach. Danych jest pięć zadań Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 o czasach realizacji $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ i chwilach przybywania r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Ograniczenia kolejnościowe przedstawia rys. 7. DCSP dla tego problemu opisano na rys.8 (rys. 8 znajduje się na końcu artykułu).

Rysunek ten jest stosunkowo złożony. Możliwość jego uproszczenia wynika z alternatywnej reprezentacji podklasy sieci Petriego zwanej klasą grafów markowanych. W grafie markowanym do miejsca jest skierowany dokładnie jeden łuk oraz z miejsca wychodzi dokładnie jeden łuk - rys. 9.

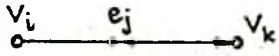


Rys.7 Fig.7

Alternatywnym sposobem reprezentacji grafu markowanego jest trójka $G = \langle V, E, M_0 \rangle$, gdzie V - zbiór wierzchołków v_i odpowiadających przejściom t_i, E - zbiór łuków e_j wyrażających miejsca p_j wraz z dwoma łukami incydentnymi z p_j, M_0 jest markowaniem początkowym opisującym liczbę kropek na łuku e_j równą liczbie kropek w miejscu p_j. Stąd fragment z rys. 9 można przedstawić w postaci ilustrowanej rys. 10.



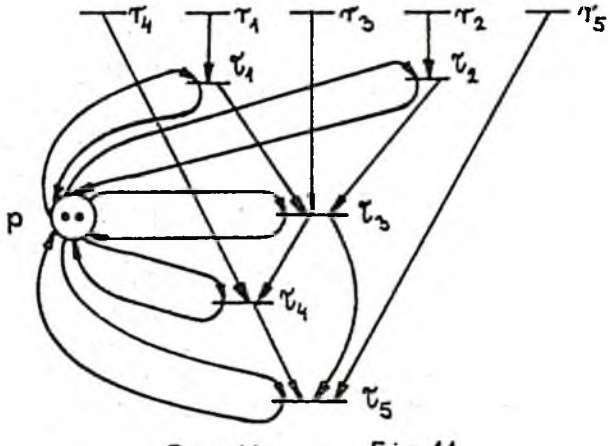
Rys. 9. Fig. 9



Rys. 10 Fig. 10

Jeśli w sieci Petriego do miejsca jest skierowany więcej niż jeden łuk lub z miejsca wychodzi więcej niż jeden łuk, to powyższego uproszczenia nie możemy wprowadzić.

W celu uproszczenia rysunków przyjmujemy konwencję: jeśli do miejsca p_j jest skierowany jeden łuk i z tego miejsca wychodzi jeden łuk, to miejsce to wraz z dwoma incydentnymi z nim łukami zastępujemy łukiem. Uproszczoną wersję sieci z rys. 8 przedstawia rys. 11.



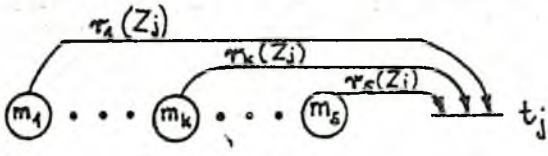
Rys. 11 Fig. 11

W pracy [3] rozważana jest reprezentacja ograniczeń kolejnościowych oraz przypadku identycznych procesorów za pomocą czasowych sieci Petriego.

4. Deterministyczne problemy szeregowania zadań z uwzględnieniem dodatkowych zasobów

Poza zbiorem n zadań oraz m procesorów, zakłada się istnienie s dodat-

kowych zasobów $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_s\}$. Zasobowi R_k dostępnemu w liczbie m_k jednostek przypisane zostaje miejsce p_k zawierające w chwili początkowej m_k kropek. Żądania zasobowe dla zadania Z_j wyrażone są wektorem $r(Z_j) = \langle r_1(Z_j), \ldots, r_s(Z_j) \rangle$, gdzie $r_k(Z_j) \leq m_k$ oznacza liczbę jednostek zasobu R_k potrzebną do wykonania zadania Z_j. Żądania zasobowe dla zadania Z_j można opisać strukturą z rys.12.

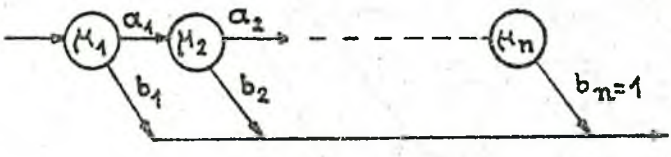


Rys. 12 Fig.12

5. Stochastyczne problemy szeregowania zadań

Jeśli czas wykonywania zadania opisany jest rozkładem wykładniczym, wówczas zadaniu przypisujemy przejście czasowe stochastycznej czasowej sieci Petriego. Pozostałe warunki możemy wyrazić podobnie jak warunki deterministycznych problemów szeregowania.

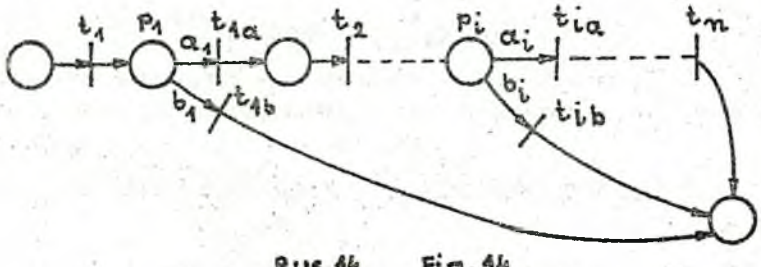
Rozważmy przypadek ogólniejszy, gdy czas wykonywania zadania zadany jest rozkładem wielostopniowym Cox'a. W rozkładzie tym każdy stopień opisany jest rozkładem wykładniczym - rys. 13.



Rys. 13 Fig. 13

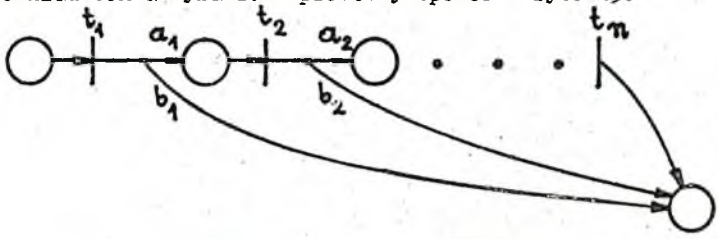
Liczba μ_i jest parametrem rozkładu wykładniczego i-tego stopnia, b_i jest prawdopodobieństwem ukończenia zadania po i-tym stopniu, a_i jest prawdopodobieństwem realizacji stopnia (i+1) po stopniu i-tym. Szczególnymi przypadkami rozkładu Cox'a są rozkłady: wykładniczy, hiperwykładniczy, Erlanga.

Stosując formalizm uogólnionych stochastycznych czasowych sieci Petriego możemy rozkład Cox'a wyrazić siecią z rys. 14.



Rys.14 Fig.14

Przejścia t_i są przejściami o czasie palenia zadanym rozkładem wykładniczym z parametrem μ_i. Czas palenia przejść t_{ia}, t_{ib} jest równy zeru. Dla markowania zawierającego kropkę w miejscu p_i - prawdopodobieństwa palenia przejść t_{ia}, t_{ib} są równe odpowiednio a_i, b_i. Powyższa sieć jest stosunkowo złożona. Wprowadzając odstępstwa od definicji USCSP możemy rozkład Cox'a wyrazić w prostszy sposób - rys. 15.



Rys. 15 Fig. 15

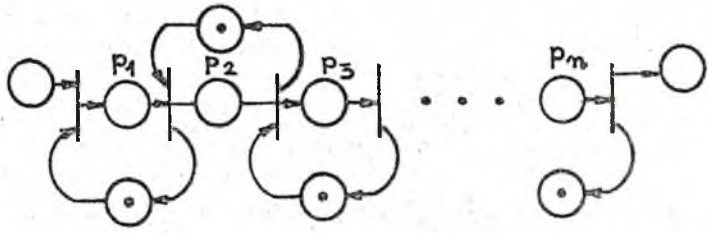
Zbliżone koncepcje nie mieszczące się w ramach USCSP zawarte są w pracach [12], [16].

6. Sieci kolejkowe

W pierwszej kolejności rozważymy wybrane dyscypliny szeregowania.

W przypadku wielu kropek w miejscu, wybór kropki wykorzystywanej dla palenia przejścia jest przypadkowy. Stąd dyscyplinę RANDOM (losowego wyboru z kolejki) możemy wyrazić jednym miejscem.

Reprezentacja kolejki FIFO o pojemności n miejsc przedstawiona jest na rys. 16.



Rys. 16 Fig. 16

Ze względu na skomplikowanie tej sieci warto wprowadzić miejsce ilustrujące kolejkę FIFO o postaci zadanej (rys. 17).

Rys. 17 Fig. 17

Idea miejsca wyrażającego podsieć zwanego makromiejscem zawarta jest w pracy [13].

W celu uzyskania sieci prostszych - warto pozostałe dyscypliny szeregowania opisywać za pomocą makromiejsc.

Jeśli czas wykonywania zadania dany jest rozkładem Cox'a, to możemy wykorzystać rozważania poprzedniego punktu.

W przypadku systemów kolejkowych z zadaniami wielu klas można wykorzystać kolorowane stochastyczne czasowe sieci Petriego, natomiast w przypadku jednej klasy wystarczające są sieci niekolorowane.

7. Relacje między problematyką czasowych sieci Petriego a analizowanymi dziedzinami

Przed przeprowadzeniem porównań, wprowadzimy pojęcia z zakresu cykliczności dla sieci Petriego.

Sekwencją palenia nazywamy taką sekwencję przejść $\sigma = t_{i_1} \dots t_{i_s}$, dla której istnieją markowania $M_p, M_{p+1}, \dots, M_{p+s}$ spełniające warunek: w wyniku palenia przejścia t_{ij} dla markowania M_{p+j-1} osiągane jest markowanie M_{p+j} dla $j \in \{1,\dots,s\}$. Markowania $M_{p+1},\dots,M_{p+s}$ nazywamy markowaniami osiągalnymi z markowania M_p.

T-invariant jest wektorem o $|T|$ składowych takim, że

$$\sum_{t_i \in {}^{\bullet}p_j} I(t_i) = \sum_{t_i \in p_j^{\bullet}} I(t_i)$$

gdzie ${}^{\bullet}p_j$ ($p_j^{\bullet}$) jest zbiorem przejść wejściowych (wyjściowych) miejsca p_j, $I(t_i)$ jest nieujemną składową całkowitą T-invarianta I dla przejścia t_i.

Obecnie zinterpretujemy pojęcie T-invarianta. Niech $\sigma = t_a \dots t_i$ będzie sekwencją palenia. Wektorem palenia dla sekwencji σ nazywamy wektor $f(\sigma)$ o $|T|$ składowych taki, że $f(t_i)$ jest liczbą wystąpień przejścia t_i w sekwencji σ. Zatem T-invariant jest wektorem palenia dla sekwencji nie zmieniającej markowania sieci. Dzięki tej własności, T-invariant jest przydatny w opisie działania cyklicznego. Dla danej sieci może istnieć wiele T-invariantów. Każdy z nich określa pewien tryb cyklicznego działania. Stąd badanie działania sieci wymaga określenia T-invarianta.

Czasową sekwencją palenia jest sekwencja

$$x = \langle t_a, t_a(1)\rangle \langle t_i, t_i(1)\rangle \dots \langle t_j, t_j(k)\rangle \dots \langle t_i, t_i(m)\rangle \dots$$

gdzie: $\sigma = t_a t_i \dots t_j \dots t_i \dots$ jest sekwencją palenia, $t_i(m)$ - chwilą rozpoczęcia palenia przejścia t_i po raz m-ty.

Liczba τ jest czasem cyklu DCSP dla T-invarianta I, jeśli istnieje taka czasowa sekwencja palenia x, dla której istnieje taka chwila τ, że dla każdego przejścia t_i i każdej chwili $t_i(m) \geqslant \tau$ prawdziwa jest zależność

$$t_i(m+I(t_i)) = t_i(m) + \tau.$$

Jako kryterium przyjmujemy minimalny czas cyklu

$$\min \tau.$$

Tak sformułowany problem optymalizacyjny nie jest rozpatrywany w klasycznej teorii szeregowania deterministycznego [2], [4], [6]. Wyniki dla tego problemu zawarte są w pracach [3], [5], [9], [10], [11], [14], [15], [17].

Ponieważ teoria szeregowania deterministycznego jest znacznie bardziej rozbudowana niż problematyka deterministycznych czasowych sieci Petriego, stąd warto metody tej teorii wykorzystywać dla potrzeb sieci.

Dla USCSP możemy wprowadzić kryterium minimalnej wartości oczekiwanej czasu cyklu

$$\min E(\gamma).$$

Relacje między teorią szeregowania stochastycznego a problematyką uogólnionych stochastycznych czasowych sieci Petriego są podobne jak dla zagadnień deterministycznych.

Zaletą wielu modeli kolejkowych jest umiarkowana złożoność obliczeniowa metod analitycznych. Wynika to z możliwości dekompozycji układu równań stanu stacjonarnego w oparciu o warunki równowagi lokalnej. Zaleta ta opłacona jest ograniczeniami zdolności wyrażania systemów za pomocą modeli kolejkowych. Modele te nie są przystosowane do reprezentacji zasobów pasywnych, synchronizacji między zadaniami, zadań zawierających podzadania. Ograniczenia te przezwyciężone są w przypadku sieci Petriego - kosztem większej złożoności obliczeniowej. Obecnie podejmowane są próby łączenia modeli kolejkowych z sieciami Petriego.

LITERATURA

[1] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, G. Conte; A class of generalized stochastic Petri nets for the performance evaluation of multiprocesor systems, ACM Trans. Comput. Systems 2, 1984, 93-122.

[2] J. Błażewicz, W. Cellary, R. Słowiński, J. Węglarz; Badania operacyjne dla informatyków, WNT, Warszawa 1983.

[3] J. Carlier, Ph. Chretienne, C. Girault; Modeling sequencing problems with timed Petri nets, w: 4th European Workshop on Applications and Theory of Petri nets, Toulouse, France 1983.

[4] G. Coffman, Jr., red.; Teoria szeregowania zadań, WNT, Warszawa 1980.

[5] J.E. Coolahan, Jr., N. Roussopoulos; Timing requirements for time-driven systems using augmented Petri nets, IEEE Trans. Software Engrg, SE-9, 5, 1983, 603-616.

[6] M.A.H. Dempster, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnoy Kan, eds.; Deterministic and Stochastic Scheduling, Reidel 1982.

[7] G. Florin, S. Natkin; Les reseaux de Petri stochastiques, Technique et Science Informatiques, Vol. 4, No. 1, 1985, 143-160.

[8] P. Heidelberger, S. Lavenberg; Computer performance evaluation methodology, IEEE Trans. Comput., C-33, 12, 1984, 1195-1220.

[9] J. Magott; Performance evaluation of concurrent systems using Petri nets, Information Processing Letters, 18, Jan., 1984, 7-13.

[10] J. Magott; Performance evaluation of systems of cyclic sequential processes with mutual exclusion using Petri nets, Information Processing Letters, 21, Nov., 1985, 229-232.

[11] J. Magott; New NP-complete problems in performance evaluation of concurrent systems using Petri nets, praca przyjęta do druku w IEEE Trans. Software Engrg.

[12] M.K. Molloy; On the integration of delay and throughput measures in distributed processing models, Ph.D., UCLA, 1981.

[13] J.D. Noe, G.J. Nutt; Macro E-nets for representation of parallel systems, IEEE Trans. on Comput., C-22, August 1973, 718-727.

[14] C.V. Ramamoorthy, G.S. Ho; Performance evaluation of asynchronous concurrent systems by Petri nets, IEEE Trans. Software Engrg., SE-6,5, 1980, 440-449.

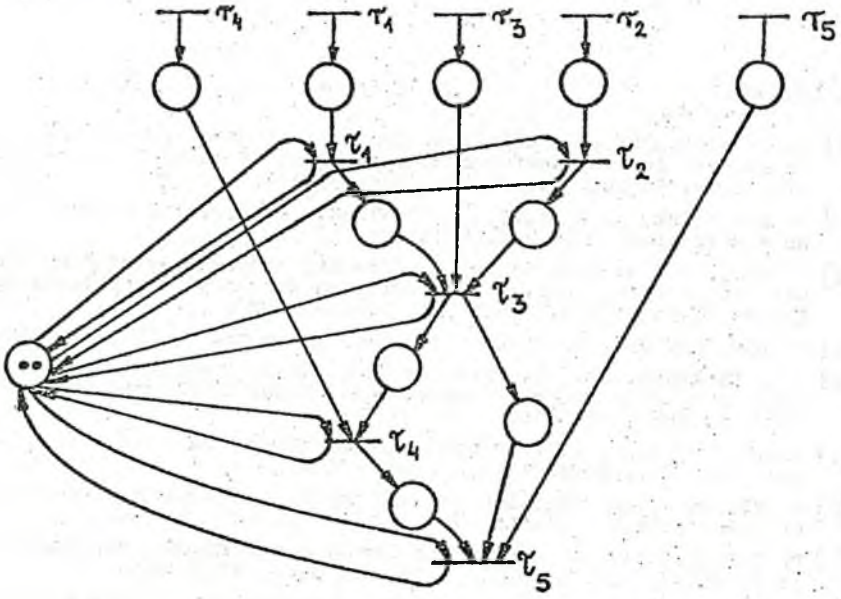
[15] C. Ramchandani; Analysis of asynchronous concurrent systems by Petri nets, Project MAC, TR-120, MIT, Cambridge, MA, 1974.

[16] S.D. Shapiro; A stochastic Petri net with applications to modelling occupancy times for concurrent task systems, Networks, Vol. 9, 1979, 375-379.

[17] J. Sifakis; Performance evaluation using nets, w: W. Brauer, ed., Net Theory and Applications, Lecture Notes in Computer Science 84, Springer, 1980.

[18] A. Zennie; Coloured stochastic Petri nets, w: Timed Petri Nets, International Workshop, IEEE Computer Society Press, 1985, 262-271.

Recenzent: Prof.dr inż.Henryk Kowalowski
Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30



Rys. 8 Fig. 8

ВРЕМЕННЫЕ СЕТИ ПЕТРИ - ВОЗМОЖНОСТИ , ОГРАНИЧЕНЯ , РАСШИРЕНИЯ

Р е з ю м е

В статье описаны принципы представления детерминированных и стохастических проблем расписания задач без добавочных ресурсов и с их учётом, а также сетей очередей с помощью временных сетей Петри.

TIMED PETRI NETS - CAPABILITIES, LIMITATIONS, EXTENSIONS

S u m m a r y

Timed Petri nets are useful tool in resource allocation problems - - in the order to solve the resource conflicts and to optimize the resource utilization. Timed Petri nets can be divided into deterministic and stochastic ones. In detrministic nets - operation time is expressed by non-negative real number. In stochastic case - operation time is described by exponential random variable.

In the paper the use of timed Petri nets for modeling the deterministic and stochastic scheduling problems with or without resource constraints and for queuing networks is analysed. Some relations between timed Petri nets and the above problems are shown.