ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol.894

Jan Pasiak
Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu

MINIMALNY CYKL USZEREGOWANIA ZADAŃ Z DODATKOWYMI ŻĄDANIAMI ZASOBOWYMI W SYSTEMIE PRZEPŁYWOWYM O TRZECH STANOWISKACH

Streszczenie. W artykule podano algorytm uszeregowania zadań w systemie przepływowym o trzech stanowiskach w sytuacji, gdy zadania zgłaszają dodatkowe żądania zasobu. Zasób jest dokładnie jeden; realizowane na stanowiskach operacje wykorzystują go kolejno jedna po drugiej. Czas obciążenia stanowiska przez każdą z operacji jest taki sam.

1. Wprowadzenie.

Rozważmy linię produkcyjną o trzech stanowiskach: s_1, s_2, s_3, która obciążana jest zadaniami $X \in \mathbb{Z}$ ($\mathrm{card}(\mathbb{Z}) = n$). Każde zadanie $X \in \mathbb{Z}$ wykonywane jest przez trzy stanowiska w jednakowej dla wszystkich zadań kolejności /system przepływowy/. Zbudowane jest więc ono z trzech operacji, a każda z nich realizowana jest przez kolejne ze stanowisk. Operacje zadań mogą wymagać nadzoru ze strony pracownika obsługującego linię - obsługę tę wykonuje jeden pracownik - przy czym wymaganie to jest określone z góry w stosunku do każdego z zadań $X \in \mathbb{Z}$.
Założymy, że czas wykonywania każdej operacji równy jest jednostce czasu $(t_j = 1)$, a stanowiska nie wymagają przezbrojeń $(tpz = 0)$. Pojawia się problem: w jakim porządku inicjowane powinny być zadania $X \in \mathbb{Z}$, aby wszystkie wykonane były w najkrótszym czasie, przy czym te z operacji, które wymagają nadzoru mogły być nadzorowane. Zakładamy, że pracownik w dowolnej chwili może nadzorować tylko jedną z operacji wykonywanych przez trzy stanowiska. W opracowaniu [5] wskazano pewne uporządkowania zadań $X \in \mathbb{Z}$, które prowadzą do wykonania n zadań w okresie k, k+1 lub k+2 jednostek czasu (gdzie: k - ilość żądań zasobowych zgłaszanych przez operacje zadań $X \in \mathbb{Z}$), Cykl ten, przewyższający k o co najwyżej dwie jednostki czasu, osiągają zadania charakteryzujące się: $k \geqslant n+2$. W przypadku, gdy ilość żądań zasobowych zadania $\mathbb{Z}$ jest mniejsza niż liczba zadań $(k < n)$, cykl wykonania $\mathbb{Z}$ równy jest wartości n + 2.
Powyższe uporządkowania $\bar{\mathbb{P}}$ zadań $X \in \mathbb{Z}$ charakteryzują się cyklem $|\bar{\mathbb{P}}|$:

$$\max(k, n+2) \leqslant |\bar{\mathbb{P}}| \leqslant 2 + \max(k, n) \qquad /1/$$

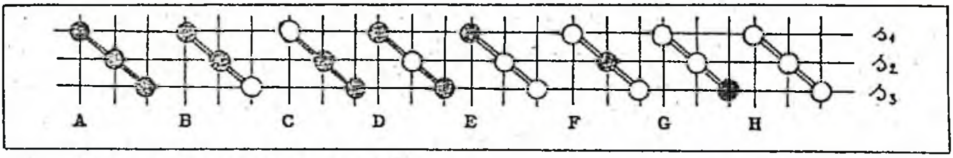
Cykl wykonania zadania $\mathbb{Z}$ (oznaczymy: $|\mathbb{Z}|$) jest nie mniejszy niż ilość żądań zasobowych, oraz jest większy o dwie jednostki czasu w stosunku do liczby zadań:

$$|\mathbb{Z}| \geqslant \max(k, n+2) \qquad /2/$$

Poszukujemy tu wartości minimalnego cyklu zadania $\mathbb{Z}$ $(|\mathbb{Z}|\min)$ oraz metody porządkowania zadań $X \in \mathbb{Z}$, określającej uporządkowanie zadań $X \in \mathbb{Z}$ o minimalnym cyklu.
W pracy [1] J.Błażewicz rozwiązuje problem, w którym występują dwa stanowiska $(m = 2)$.

2. Struktury podstawowe zadania $\mathbb{Z}$

Jeśli rozważymy dowolne zadanie elementarne $X \in \mathbb{Z}$, to zauważmy, że zapotrzebowanie zasobowe może być zgłoszone przez operację pierwszą lub /i drugą lub/ i trzecią. Rozróżnijmy zadania elementarne ze względu na właściwy im schemat żądań zasobowych operacji (Rys. 1), utożsamiając tę własność z pojęciem typu zadania elementarnego. Identyfikujemy osiem typów zadań, oznaczając je odpowiednio: A,B,C,D,E,F,G,H, a liczebność zadań danego typu w zbiorze $\mathbb{Z}$ odpowiednio: a,b,c,d,e,f,g,h. Zadanie $\mathbb{Z}$ charakteryzuje się licznością żądań zasobowych $k = 3a + 2(b+c+d)$ $c + f + g$. Cykl wykonania zadania $\mathbb{Z}$ $(|\mathbb{Z}|)$ jest nie mniejszy niż k i jednocześnie nie mniejszy niż wartość n+2, gdzie $n = \mathrm{card}\,(\mathbb{Z})$.
Określmy ciąg zadań $\mathbb{P} = \{X_1, X_2, \ldots X_r\}$ utworzonych z zadań $X \in \mathcal{A}$, (gdzie $\mathcal{A}$ jest zbiorem typów zadań elementarnych) taki, że X_i inicjowane jest przed zadaniem X_{i+1}, chwile rozpoczynania kolejnych zadań dzieli jedna jednostka czasu oraz w każdej jednostce czasu występuje co najwyżej jedno żądanie zasobu zgłaszane przez operację. Ciąg taki nazywać będziemy pęczkiem $\mathbb{P}$, a cykl wykonania zadań $\mathbb{P}$ oznaczymy symbolem $|\mathbb{P}| = r + 2$.
Jeśli $\mathbb{P} = \{X_1, \ldots X_r\}$ oraz $\mathbb{P}' = \{X_1', \ldots X_r'\}$ są pęczkami, to ciąg zadań $\{X_1, \ldots, X_r, X_1', \ldots X_r'\} = \mathbb{P} \circ \mathbb{P}'$ nazwiemy złożeniem pęczków $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{P}'$, gdy utworzony ciąg zadań jest pęczkiem. Rozróżnijmy złożenia lewostronne $(\mathbb{P}' \circ \mathbb{P})$ oraz złożenia prawostronne $(\mathbb{P} \circ \mathbb{P}')$.
Rozważmy zadanie $\mathbb{Z}^* = \{A, A, F\}$. Żaden ciąg zadań: A,A,F nie jest pęczkiem, który wskazałby harmonogram obciążania stanowisk w systemie przepływowym o równych czasach wykonywanych operacji. Dla uruchomienia zadań: A,A,F np. w tej przypadkowej kolejności należy: po rozpoczęciu w chwili $t=1$ zadanie typu A "odczekać" chwilę $t = 2$ oraz $t = 3$, a dopiero w chwili $t = 4$ uruchomić kolejne zadanie A. Teraz ponownie "przeczekamy" chwilę $t = 5$, aby w chwili $t = 6$ uruchomić zadanie typu F. Zadanie to zakończy się w chwili $t = 8$, wyznaczając cykl wykonania zadania $|\mathbb{Z}^*| = 8$ jednostek czasu. W chwilach $t = 2,3,5$ nie uruchomiono na stanowisku s_1 żadnego z zadań $X \in \mathbb{Z}^*$ i tym samym poniesiona została strata czasowa. Wprowadźmy dodatkowo nowy typ zadania: J, charakteryzujący się nie występowaniem żądań zasobowych w żadnej z operacji (tę samą własność mają zadania typu H). Dysponując nieograniczoną liczbą zadań typu J, określić możemy teraz pęczek (harmonogram), który zapewni realizację zadania, np. $A \circ J \circ J \circ A \circ J \circ F$



Rys. 1. Typy zadań $X \in \mathbb{Z}$
/ Type's of job $X \in \mathbb{Z}$ /

lub inny $A \circ J \circ F \circ J \circ A$, albo $F \circ J \circ A \circ J \circ J \circ A$.
Rozważmy pewien zbiór zadań $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$, przy czym symbolem $\mathbb{Z}H$ oznaczymy podzbiór zadań typu H w $\mathbb{Z}$ $(\mathrm{card}(\mathbb{Z}H) = h)$. Konstrukcja pęczka $\mathbb{P}$, który odpowiadałby harmonogramowi realizacji zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$, wymagała będzie dołączenia j zadań typu J do zadań $X \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$. Cykl wykonania zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ według harmonogramu $\mathbb{P}$ określi zależność:

$$\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H = |\mathbb{P}| = n - h + 2 + j; \text{ gdzie } j \geqslant 0 \qquad /3/$$

<u>Pęczkiem zadania</u> $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ nazywać będziemy pęczek $\mathbb{P}$, gdy: jeśli $X \in \mathbb{P}$ to $X \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ lub X jest zadaniem typu J. Dysponując pęczkiem $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ utworzyć możemy pęczek $\overline{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}$, np. w następujący sposób:

1: dokonaj konstrukcji pęczka $\mathbb{P}'$, wymieniając w pęczku $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ dowolne zadania typu J na dowolne zadania typu H dysponowane w ilości $\mathrm{card}(\mathbb{Z}H) = h$. $(|\mathbb{P}'| = |\mathbb{P}|)$;
2: jeśli: $h - j = i > 0$, to utwórz pęczek $\mathbb{P}'' = H_1 \circ H_2 \circ \ldots \circ H_i = (H)^i$; wykorzystując pozostałe "i" zadań typu H;
3: pęczek $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P}' \circ \mathbb{P}''$ jest pęczkiem zadania $\mathbb{Z}$, przy czym $|\overline{\mathbb{P}}| = |\mathbb{P}'| + |\mathbb{P}''| = n - h + 2 + j + i$; gdzie $i = h - \min(j, h)$.

Pozostaje do rozstrzygnięcia problem ilości zadań typu J, które dołączyć należy do zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ przy konstrukcji pęczka $\mathbb{P}$ tego zadania. Jak wynika z definicji pęczka, w każdej jego jednostce czasu może wystąpić co najwyżej jedno żądanie zasobowe $(|\mathbb{P}| \geqslant k)$. Stąd za /3/ : $n - h + 2 + j \geqslant k = 3a + 2 \cdot (b + c + d) + e + f + g$; a dalej: $j \geqslant 2a + b + c + d - 2 = M$;
Dla utworzenia pęczka zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$ ponieść więc należy co najmniej M strat czasowych. Parametr M jest charakterystycznym dla zadania $\mathbb{Z}$.
Straty te mogą być, jak wskazano, wyeliminowane wymianą zadań typu J na zadania typu H, jeśli $h > 0$. Istnieją takie sytuacje, gdy w danej chwili $t \in (1, r+2)$ wykonywane na stanowiskach s_1, s_2, s_3 operacje nie zgłaszają żądań zasobowych. Zasób jest w tej jednostce czasu wolny (nie jest wykorzystywany). Sytuację taką nazywać będziemy <u>stratą zasobową</u>. <u>Liczność strat zasobowych w pęczku $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}H$</u> oznaczymy symbolem q .
Uszeregowanie zadań $X \in \mathbb{Z}$ charakteryzowało będzie się minimalnym cyklem wykonania $(|\mathbb{Z}|_M)$, jeśli $|\overline{\mathbb{P}}| = |\mathbb{P}'| + |\mathbb{P}''| = n + 2 + j - \min(j, h)$ osiągnie wartość minimalną. W konstrukcji $\mathbb{P}$ minimalizujemy ilość zadań typu J.

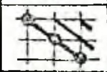
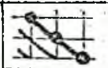
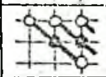
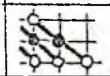
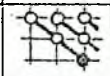
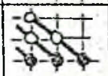
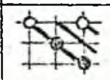
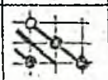
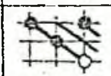
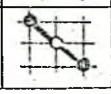
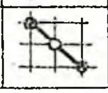
$\mathbb{P}$	Postać pęczka $\mathbb{P}$	r	p	j	q
$^{\bullet}\mathbb{P}A$	$((A\circ J\circ J)^{a'}\circ A)^{k'}$	$3a'+k'$	$r+2$	$2a'$	0
$\mathbb{P}A^{\bullet}$	$(A\circ(J\circ J\circ A)^{a''})^{k''}$	$3a''+k''$	$r+2$	$2a''$	0
$\mathbb{P}B$	$((B\circ J)^{b'}\circ B)^{v'}$	$2b'+v'$	$r+1$	b'	1
$\mathbb{P}C$	$((C\circ J)^{c''}\circ C)^{w''}$	$2c''+w''$	$r+1$	c''	1
$^{\bullet}\mathbb{P}D$	$((D\circ D\circ J\circ J)^{d'}\circ D\circ D)^{u'}$	$4d'+2u'$	$r+2$	$2d'$	0
$\mathbb{P}D^{\bullet}$	$(D\circ D\circ(J\circ J\circ D\circ D)^{d''})^{u''}$	$4d''+2u''$	$r+2$	$2d''$	0
$\mathbb{P}E$	$(E)^{e'}$	e'	r	0	2
$^{\bullet}\mathbb{P}F$	$(F)^{f'}$	f'	r	0	2
$\mathbb{P}F^{\bullet}$	$(F)^{f''}$	f''	r	0	2
$\mathbb{P}G$	$(G)^{g''}$	g''	r	0	2
$\mathbb{P}_1$	$G\circ D$	2	3	0	1
$\mathbb{P}_2$	$D\circ E$	2	3	0	1
$\mathbb{P}_3$	D	1	2	0	1
$\mathbb{P}_4$	$(G\circ E)^{i}$; $i\leq \min(g,e)$	$2i+2$	$2i$	0	2

Oznaczenia: $\mathbb{P}=\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$; r - ilość zadań pęczka $\mathbb{P}$; $|\mathbb{P}|=r+2$; p = ilość żądań zasobowych pęczka $\mathbb{P}$; j - ilość strat czasowych w $\mathbb{P}$; q - ilość strat zasobowych w $\mathbb{P}$; $q=|\mathbb{P}|-p$; $k', k'', v', w'', u', u''\in\{0,1\}$; $a=a'+a''+2$; $b=b'+1$; $c=c''+1$; $d|2 \Rightarrow d=2d'+2d''+4$; $\neg d|2 \Rightarrow d=2d'+2d''+3$; $e=e'+i$, $g=g''+i$; $f=f'+f''$;

Rys. 2. Charakterystyka pęczków struktur podstawowych /Characteristic of primary structure of splice /

Zależność: $|\mathcal{Z}|_H\geq k$, skłania do poszukiwania pęczka $\mathbb{P}$ zadania $\mathcal{Z}-\mathcal{Z}H$ charakteryzującego się minimalną ilością strat zasobowych $(q\rightarrow \min)$. Poszukiwany pęczek $\mathbb{P}$ zadania $\mathcal{Z}-\mathcal{Z}H$ oznaczymy symbolem $\mathbb{P}_M$. Zauważmy, że złożenia pewnych typów zadań /Rys. 2/ tworzą pęczki charakteryzujące się własnościami:

- ilość żądań zasobowych w pęczku jest nie mniejsza od jego długości o więcej niż dwie jednostki czasu;
- straty zasobowe w obszarze pęczka umiejscowione są w dwu pierwszych lub dwu ostatnich jednostkach czasu w cyklu wykonania pęczka;
- pewne pęczki charakteryzują się identycznymi schematami strat zasobowych w dwu pierwszych i dwu ostatnich jednostkach czasu w cyklu wykonania pęczka /patrz: rysunek 2 i 3/.

Symbol struktury	Schematy		q		j	Reprezentanci :
	WE	WY	WE	WY		
ǂ			0	0	2a+d-2	$^\bullet\mathbb{P}A, \mathbb{P}A^\bullet, \mathbb{P}D^\bullet, {}^\bullet\mathbb{P}D$;
ł			1	1	0	$^\bullet\mathbb{P}F, \mathbb{P}F^\bullet, \mathbb{P}_4$;
⊤			0	2	0	$\mathbb{P}E$;
⊥			2	0	0	$\mathbb{P}G$;
ƚ			1	0	c-1	$\mathbb{P}C, \mathbb{P}_1$;
ŧ			0	1	b-1	$\mathbb{P}B, \mathbb{P}_2$;
I			1	1	0	$\mathbb{P}_3$;

Rys. 3. Struktury podstawowe i ich charakterystyka
/Primary structure`s and characteristic/

To spostrzeżenia (rys. 2) prowadzą do identyfikacji pęczków struktur podstawowych oznaczonych symbolami ǂ , ł , ⊤ , ⊥ , ƚ , ŧ , I (Rys. 3). Dysponując zadaniami $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, utwórzmy możliwe do konstrukcji pęczki struktur podstawowych (wykorzystując wszystkie zadania elementarne $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$), a następnie dokonajmy złożenia tak utworzonych pęczków struktur podstawowych tworząc pęczek struktur podstawowych $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$. Czynności tej może towarzyszyć konieczność wprowadzenia dalszych zadań typu J, ponad zawarte w pęczkach struktur podstawowych. Straty związane ze złożeniami pęczków struktur podstawowych prezentuje schemat (Rys. 4.) Wśród możliwych do utworzenia pęczków struktur podstawowych $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, jest pęczek $\widetilde{\mathbb{P}}_M$, tego zadania, charakteryzujący się pośród pęczków $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ minimalnym cyklem wykonania $(|\widetilde{\mathbb{P}}_M|)$.

Określono powyżej pęczek $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ oraz wskazano sposób konstrukcji pęczka $\widetilde{\mathbb{P}}$ tego zadania. Jeśli wykażemy, że dla dowolnego pęczka $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ zachodzi związek: $|\mathbb{P}| \geqslant |\widetilde{\mathbb{P}}_M|$, to tym samym wskażemy wartość $|\mathbb{Z}|_M = |\overline{\mathbb{P}}|_M = n + 2 + j_M - \min(j_M, h) \geqslant n + 2 + M - \min(M,h)$; gdyż $j \geqslant M$, a wartości n, M, h są stałymi parametrami zadania $\mathbb{Z}$.

Wskazując konkretną konstrukcję pęczka $\widetilde{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ czynić to będziemy prezentując ciąg pęczków struktur podstawowych złożonych w pęczek $\widetilde{\mathbb{P}}$. Symbolem: $\langle U', U'', \ldots, \overline{U} \rangle$, gdzie $U \in \{$ǂ, ł, ⊤, ⊥, ƚ, ŧ, I$\}$ oznaczać będziemy złożenie $U' \circ V' \circ U'' \circ V'' \circ \ldots \circ \overline{V} \circ \overline{U}$, w którym pęczki $V', V'', \ldots \overline{V}$ są postaci $(J)^i$, gdzie $i \in \{0,1,2\}$, a wartości parametru i pokazano w tablicy strat w złożeniach pęczków struktur podstawowych (Rys. 4).

3. Straty czasowe i zasobowe w pęczku zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$

W dotychczasowych rozważaniach nie określono zależności pomiędzy ponoszonymi stratami czasowymi (dołączone zadania typu J w pęczku zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$) a stratami zasobowymi (jednostka czasu w pęczku $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, w której nie występuje żądanie zasobu na żadnym z trzech stanowisk). Uczynimy to formułując następujące twierdzenie:

Tw. 1. Jeśli w pęczku $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ istnieje q strat zasobowych, to cykl wykonania zadań tego pęczka $|\mathbb{P}| = k + q$, a jego konstrukcja wymaga użycia $j = M + q$ zadań typu J. $\square$

Dowód: Pęczek $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ zbudowany jest z $n-h$ zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ oraz j zadań typu J. Cykl pęczka $|\mathbb{P}| = r + 2$, gdzie $r = n - h + j$, przy czym $j \geqslant M$.
Określmy pole obserwacji ograniczone pierwszą i ostatnią chwilą, w których rozpoczyna się i kończy wykonywanie operacji zadań $X \in \mathbb{P}$. W polu tym odnajdziemy $(r + 2) \cdot m$ pozycji, które mogą być wypełnione operacjami obciążającymi m stanowisk. Operacji takich w zadaniu $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ jest $m \cdot (n - h)$, a wśród nich jedynie k żąda zasobu.
Wystąpienie żądania zasobu w chwili t, jednej z chwil pola obserwacji, rezerwuje przypisane tej chwili $m - 1$ pozycji dla operacji bez żądań zasobowych. Wystąpienie w chwili t straty zasobowej rezerwuje m pozycji dla operacji bez żądań zasobowych. Ponieważ w każdej chwili t w polu obserwacji występuje strata zasobowa lub żądanie zasobu, to ilość pozycji pola obserwacji równa jest $m \cdot (k + q)$. W polu obserwacji znajduje się $m \cdot (n - h)$ operacji zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ oraz $m \cdot j$ operacji zadań dołączonych typu J. Ponadto w chwilach "napełniania" systemu produkcyjnego / $t = 1,2, \ldots m-1$/ oraz "wygasania" w tym systemie o m stanowiskach wykonywania zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, wystąpi $m \cdot (m-1)$ pozycji, które nie mogą być obsadzane, ani operacjami zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, ani operacjami zadań typu J. Ilość pozycji pola obserwacji ω jest niezmienna. Stąd:

$$\omega = m \cdot (r + 2) = m \cdot (k + q) = m \cdot (n - h) + m \cdot j + m \cdot (m - 1) ;$$

$$|\mathbb{P}| = k + q; \text{ oraz } j = M + q, \text{ gdyż } M = k - (n - h) - 2; \blacksquare$$

Powyższe twierdzenie udowodniono przy założeniu $m = 3$, jednak jak wynika z przebiegu dowodu jest ono prawdziwe dla dowolnej wartości m. Wymagane jest jedynie zdefiniowanie wartości charakterystycznych zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$: k, $n - h$, M dla systemu o m stanowiskach. Twierdzenie to uzależnia ilość strat czasowych oraz zasobowych pęczka $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$. W szczególności takim pęczkiem jest pęczek $\tilde{\mathbb{P}}$ tego zadania. Stąd: $|\tilde{\mathbb{P}}| = k + q$ oraz $\tilde{j} = M + q$.

U∘V	ǀ	Ɨ	ϯ	ƭ	ɭ	ƚ	Ŧ	Ɪ
ǀ	-	0	*	0	**	*	0	0
Ɨ	0	-	1	2	0	1	2	2
ϯ	*	1	-	1	*	0	1	1
ƭ	**	0	*	-	**	*	0	-
ɭ	0	2	1	2	-	1	2	-
ƚ	0	2	1	2	0	-	2	2
Ŧ	*	1	0	1	*	0	-	1
Ɪ	0	2	1	-	-	1	2	-

1: Ɪ $\subset \widetilde{\mathbb{P}} \Rightarrow$ ƭ, ɭ $\not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$

2: ze strukturą Ɪ związana jest strata zasobowa $q^{\bullet} = 1$ niezależna od umiejscowienia tej struktury w uszeregowaniu

3: ƭ $\subset \widetilde{\mathbb{P}} \vee$ ɭ $\subset \widetilde{\mathbb{P}} \Rightarrow$ Ɪ $\not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$

4: "*" lub "**" straty zasobowe ponoszone w złożeniu struktur

5: liczba wpisana w tablicy oznacza ilość strat czasowych

Rys. 4. Straty w złożeniach struktur podstawowych
/Losses in assumption of primary structures/

4. Minimalny cykl uszeregowań struktur podstawowych $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H

Będziemy uważali, że pęczek struktur podstawowych $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H nie zawiera struktury U $(U \not\subset \widetilde{\mathbb{P}})$, jeśli wśród zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H nie istnieją zadania, umożliwiające utworzenie tej struktury $(U \in \{$Ɨ, Ŧ, ƚ, ϯ, ƭ, ɭ, Ɪ$\})$. Przykładowo zapis: Ɨ $\not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$ stwierdza, że zadania $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H nie tworzą złożeń postaci: $(A \circ J \circ J)^i \circ A$ oraz $(D \circ D \circ J \circ J)^i \circ D \circ D$, (gdzie $i = 0,1,2,\ldots$). Sytuacja przeciwna: Ɨ $\subset \widetilde{\mathbb{P}}$, gwarantuje istnienie co najmniej jednego z wymienionych złożeń.

Podamy teraz twierdzenia o minimalnym cyklu uszeregowań struktur podstawowych zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H, uzależniające wartość minimalnego cyklu $\widetilde{\mathbb{P}}$ tego zadania od jego własności. Dowody tych twierdzeń zawiera opracowanie [6], a tu ze względu na brak miejsca zostały one pominięte.

Tw. 2. Minimalny cykl wykonania $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H, równy jest $k + 2$, jeśli Ɨ, Ŧ, ƚ, Ɪ $\not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$.

Tw. 3. Minimalny cykl wykonania $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H, równy jest k, jeśli Ŧ, ƚ $\subset \widetilde{\mathbb{P}} \wedge$ Ɨ, Ɪ $\not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$.

Tw. 4. Minimalny cykl wykonania $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$H, równy jest k, jeśli Ɪ $\not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$ i jednocześnie spełniony jest co najmniej jeden z warunków:

4.1: Ŧ, ƚ $\subset \widetilde{\mathbb{P}}$; (tzn. $b \geqslant 1 \wedge c \geqslant 1$)

4.2: Ɨ $\subset \widetilde{\mathbb{P}} \wedge a + d/2 > 1$;

4.3: Ɨ, Ŧ $\subset \widetilde{\mathbb{P}}$;

4.4: Ɨ, ƚ $\subset \widetilde{\mathbb{P}}$;.

<u>Tw. 5.</u> Minimalny cykl wykonania $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ równy jest k + 1 jednostek czasu, jeśli $I \not\subset \widetilde{\mathbb{P}}$ i spełniony jest jeden z warunków:

5.1: $\bar{I}, \pm \not\subset \widetilde{\mathbb{P}} \wedge \bar{F} \subset \widetilde{\mathbb{P}}$;

5.2: $\bar{I}, \bar{F} \not\subset \widetilde{\mathbb{P}} \wedge \pm \subset \widetilde{\mathbb{P}}$;

<u>Tw. 6.</u> Jeśli $I, \bar{F}, \pm \not\subset \widetilde{\mathbb{P}} \wedge$ a + d/2 = 1, to minimalny cykl $\widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ równy jest:

6.1: $\dagger \not\subset \widetilde{\mathbb{P}} \Rightarrow |\widetilde{\mathbb{P}}_M| = k$;

6.2: $\dagger \subset \widetilde{\mathbb{P}} \Rightarrow |\widetilde{\mathbb{P}}_M| = k + 1$;.

<u>Tw.7.</u> Jeśli $I \subset \widetilde{\mathbb{P}}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, to minimalny cykl wykonania $\widetilde{\mathbb{P}}$ równy jest k + 1 jednostek czasu, za wyjątkiem sytuacji, gdy $\widetilde{\mathbb{P}}$ tworzą wyłącznie struktury I i $\dagger$. W tym przypadku minimalny cykl wykonania $\widetilde{\mathbb{P}}$ równy jest k + 2 jednostek.

Powyższy zespół twierdzeń wyznacza cykl minimalny zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ w przypadku, gdy pęczek tego zadania jest pęczkiem struktur podstawowych $(\widetilde{\mathbb{P}})$. Dalej pokażemy, że ilość strat zasobowych ponoszonych w pęczku struktur podstawowych jest najmniejszą z możliwych, a t, , że nie istnieje pęczek $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, którego cykl może byc mniejszy niż $|\widetilde{\mathbb{P}}_M|$.

5. <u>Minimalny cykl uszeregowań zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$</u>

Zrezygnujmy ze specyficznego uporządkowania zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ w struktury podstawowe. Rozważmy pęczek $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, charakteryzujący się cyklem równym k+q (gdzie $q \geqslant 0$).

<u>Tw. 8.</u> Cykl wykonania pęczka $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ jest nie mniejszy niż minimalny cykl wykonania pęczka struktur podstawowych $\widetilde{\mathbb{P}}_M$ tego zadania. □

<u>Dowód:</u> W konstrukcji pęczków $\mathbb{P}$ oraz $\widetilde{\mathbb{P}}_M$ wykorzystano j oraz $\tilde{j}$ zadań typu J, a także poniesiono straty zasobowe q oraz $\tilde{q}$. Pęczki te zawierają n - h zadań różnych typów zgłaszających k żądań zasobowych.

$|\mathbb{P}| = n - h + M + q + 2 = k + q$; oraz $|\widetilde{\mathbb{P}}_M| = k + \tilde{q} = n - h + M + \tilde{q} + 2$;

Tezę: $|\mathbb{P}| \geqslant |\widetilde{\mathbb{P}}_M|$ wyrazi zależność: $q \geqslant \tilde{q} \geqslant 0$. Rozważmy czy istnieje pęczek $\mathbb{P}$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, w którym poniesionych zostanie mniej strat zasobowych niż w pęczku struktur podstawowych $\widetilde{\mathbb{P}}_M$, charakteryzującym się minimalnym cyklem. Jeśli $|\widetilde{\mathbb{P}}_M| = k$, to $\tilde{q} = 0$ i $q \geqslant 0$. Jeśli $|\widetilde{\mathbb{P}}_M| = k + \tilde{q}$, gdzie $\tilde{q} \in \{1,2\}$, straty zasobowe w pęczku $\widetilde{\mathbb{P}}_M$ występują w dwóch pierwszych lub dwu ostatnich chwilach czasu $(t \in \{1,2,r+1, r-2\})$. Straty te występują jedynie wtedy, gdy brak jest zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ z żądaniami zasobowymi:

- w pierwszej operacji $(\bar{I}, \bar{F}, T, I \not\subset \widetilde{\mathbb{P}}_M)$, wtedy $q \geqslant \tilde{q}$;
- w trzeciej operacji $(\bar{I}, \pm, \perp, I \not\subset \widetilde{\mathbb{P}}_M)$, także $q \geqslant \tilde{q}$.

Jeśli $I \subset \widetilde{\mathbb{P}}_M$, to zadanie typu D /bez pary/ występuje w pęczku $\mathbb{P}$, a wraz z nim strata zasobowa $(q \geqslant \tilde{q})$, gdyż $T, \perp \not\subset \widetilde{\mathbb{P}}_M$.

W każdym układzie zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ jest $q \geq \tilde{q}$.
Tak więc w dowolnym uszeregowaniu zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ poniesionych zostanie co najmniej taka ilość strat zasobowych jaką poniesiemy w uszeregowaniu struktur podstawowych tego zadania charakteryzującym się cyklem minimalnym

Tw. 9. Minimalny cykl wykonania zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$ równy jest wartości minimalnego cyklu wykonania pęczka struktur podstawowych $\tilde{\mathbb{P}}_M$ tego zadania $\left(|\mathbb{P}_M| = |\tilde{\mathbb{P}}_M|\right)$.

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z tw. 8.

6. Podsumowanie.

Badając struktury podstawowe zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, w oparciu o przedstawione tu twierdzenia, określić można cykl minimalny uszeregowania zadań $X \in \mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$. Jeśli: $\operatorname{card}(\mathbb{Z}H) = h > \tilde{j} = M + \tilde{q}$, gdzie $\tilde{j}$, $\tilde{q}$ są parametrami uszeregowania $\tilde{\mathbb{P}}_M$ zadania $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}H$, to cykl minimalny realizacji zadania $\mathbb{Z}$ równy jest: $|\mathbb{Z}|_M = |\tilde{\mathbb{P}}_M| + h - \min(\tilde{j},h)$; . Dla konstrukcji pęczka $\mathbb{P}$ o cyklu $|\mathbb{Z}|_M$ wystarczy zadania typu J w pęczku $\tilde{\mathbb{P}}_M$ wymienić na zadania typu H oraz dołączyć prawostronnie lub lewostronnie do pęczka $\tilde{\mathbb{P}}_M$ pęczek $(H)^1$ zawierający pozostałe nie umiejscowione w uszeregowaniu zadania typu H. Inne metody konstrukcji pęczka $\tilde{\mathbb{P}}_M$ zadania $\mathbb{Z}$ opisane zostały w pracy [5].

Niniejsze rozważania zakończymy hipotezą rozszerzającą przyjęte tu założenia: w systemie przepływowym o m stanowiskach, minimalny cykl wykonania zadań jest nie większy niż k + m - 1 jednostek czasu (gdzie k jest ilością żądań zasobowych zgłaszanych przez operacje obsługiwanych zadań, a żądania zasobowe dwóch dowolnych operacji nie mogą być zaspokojone w jednej jednostce czasu).

LITERATURA:

[1] Błażewicz J: Nowe algorytmy szeregowania zadań na dedykowanych maszynach. ZN Politechniki Śląskiej, Seria: Automatyka nr 54/1980, str. 9 - 16.

[2] Błażewicz J.: Złożoność obliczeniowa algorytmów i problemów szeregowania zadań. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Seria: Rozprawy nr 104/1979.

[3] Słowiński R.: Algorytmy sterowania rozdziałem zasobów różnych kategorii w kompleksie operacji. Wyd. Politechniki Poznańskiej, seria: Rozprawy nr 114/1980.

[4] Węglarz J.: Sterowanie w systemach typu kompleks operacji, PWN, 81.

[5] Pasiak J.: Szeregowanie zadań z dodatkowymi żądaniami zasobowymi w systemie przepływowym o trzech stanowiskach. ZN. WSI, Radom /w druku/.

[6] Pasiak J.: Struktury podstawowe zadań z dodatkowymi żądaniami zasobowymi w systemie przepływowym o trzech stanowiskach. ZN. WSI, Radom /w przygotowaniu/.

Recenzent: Prof.dr inż.Henryk Kowalowski
Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

МИНИМАЛЬНЫЙ ЦИКЛ УПОРЯДОЧЕНИЯ ЗАДАЧ С ДОБАВОЧНЫМИ РЕСУРСАМИ В ПОТОКОВОЙ СИСТЕМЕ С ТРЕМЯ РАБОЧИМИ МЕСТАМИ

Р е з ю м е

В потоковой системе с тремя рабочими местами реализируются задания, требующие добавочного уникального ресурса (напр. работник , манипулятор итд.) . Несоответствующее расположение заданий , выполняемых в системе, влияет на величину простоев на рабочих местах (временные потери)и величину простоев уникальных ресурсов (потери ресурсов). Существует зависимость между величиной потерь ресурсов и временем а минимальной величиной потерь, которая появится во время выполнения группы заданий.

В статье представлены эти зависимости а также алгоритмы упорядочения заданий в последовательность , характеризующуюся минимальными потерями времени и ресурсов.

MINIMAL CYCLE OF TASKS SEQUENCING WITH ADDITIONAL RESOURCES REQUIREMENT IN THREE OPERATION FLOW-SHOP SYSTEM

S u m m a r y

In flow-shop system of three work station are realized jobs three operation in every job - requiring additional reserves. Such reserve is in system only one /for example worker, manipulator/. Among the jobs, in accordance to requirement of reserves of jobs to operation of every job discriminates types of jobs /fig.1/. An unsuitable of arrangement of jobs executed at that system, has an effect on make use of work station /losses of time/ and idle time of curio sity eesevves /losses reserves/. There is a relationships between number of time losses and reserves and minimal numbers of losses which appears in realization groups of jobs in that system. In the paper those relationships and the algorithm of putting jobs in order characterized it self minimal of time losses.