ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol. 894

Leon Słomiński
Instytut Badań Systemowych PAN

ALGORYTMICZNE PROBLEMY ROZWIĄZYWANIA MINIMAKSOWEGO ZAGADNIENIA PRZEPŁYWU W SIECI

Streszczenie. W pracy sformułowano zadanie znalezienia przepływu minimaksowego, w zbiorze przepływów o minimalnej wartości, określonym na sieci skierowanej z dodatnimi dolnymi ograniczeniami na przepustowości łuków. Podano pseudowielomianowy algorytm cykli redukujących dla rozwiązania postawionego zagadnienia. Algorytm zilustrowano przykładem liczbowym.

1. Wstęp

W pracy zajmujemy się problemem przepływów z kryterium minimaksowym w sieciach skierowanych z dodatnimi całkowitoliczbowymi ograniczeniami dolnymi na przepustowości łuków. Rozważane zagadnienie jest dane następująco: w zbiorze przepływów o minimalnej wartości znaleźć przepływ minimaksowy, to znaczy taki przepływ, dla którego maksimum przepływu łukowego (przepływu w pojedynczym łuku) osiąga wartość minimalną.

Postawione zagadnienie rozwiązujemy za pomocą algorytmu cykli redukujących należącego do klasy algorytmów progowych. Algorytm ten polega na tym, że po znalezieniu przepływu o wartości minimalnej, sukcesywnie są poszukiwane cykle zmniejszające przepływ w łukach o aktualnie największej jego wartości, nie zmieniając przy tym wartości przepływu ze źródła do ujścia. Rozwiązanie optymalne otrzymujemy wtedy, gdy takiego cyklu już nie ma.

Zaproponowany algorytm przedstawiony został w wersji algorytmu pseudowielomianowego, a algorytm wielomianowy otrzymuje się m.in. przez zastosowanie dychotomicznego sposobu zmiany progu. Działanie algorytmu jest zilustrowane na przykładzie.

2. Zagadnienie przepływu minimaksowego

Dana jest sieć skierowana $S(V,A)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami - źródłem s i ujściem t, zaś A jest zbiorem łuków, o którym zakładamy że nie zawiera pętli i łuków wielokrotnych. Moc zbioru wierzchołków $|V|$ wynosi n, a moc zbioru łuków - $|A|$ - m.

Zakładamy również, że w sieci nie ma dróg skierowanych z t do s.

Na zbiorze łuków A definiujemy całkowitoliczbową funkcję dodatnią $c\colon A \to N$, gdzie N jest zbiorem liczb naturalnych; liczbę naturalną $c(i,j)$ nazwiemy przepustowością łuku $(i,j) \in A$. Druga funkcja zdefiniowana na A jest funkcją całkowitoliczbową $f\colon A \to Z_+^m$, gdzie Z_+^m jest m-wymiarową przestrzenią wektorową, w której współrzędne wektorów są dodatnimi liczbami całkowitymi. . Funkcję f nazwiemy przepływem w sieci $S(V,A)$ jeżeli są spełnione następujące warunki:

$$\sum_{(i,j)\in A(i)} f(i,j) - \sum_{(j,i)\in B(i)} f(j,i) = \begin{cases} \vartheta_f & \text{dla } i=s, \\ 0 & \text{dla } i,j \;\; V\setminus\{s,t\}, \\ -\vartheta_f & \text{dla } i=t, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie: $f(i,j)$ jest wartością funkcji f na łuku (i,j),

$A(i)$ jest zbiorem łuków wychodzących z wierzchołka i,

$B(i)$ jest zbiorem łuków wchodzących do wierzchołka i,

ϑ_f jest wartością funkcji (przepływu) na zbiorze łuków opuszczających źródło,

$$0 < c(i,j) \leqslant f(i,j) \leqslant \infty \quad , \qquad \text{dla} \quad (i,j) \in A \;. \tag{2}$$

Warunek (2) różni naszą funkcję f od jej najpowszechniejszej postaci, w której nieujemne składowe są ograniczone od góry: $0 \leqslant f(i,j) \leqslant c(i,j)$, $(i,j) \in A$.

W pracach [4,6,8] rozważane jest zagadnienie znalezienia takiego przepływu f_m, który zapewnia minimalną wartość funkcji ϑ_{f_m}. Niech F_m oznacza zbiór wszystkich przepływów, dla których $\vartheta_f = \vartheta_{f_m}$, i niech $f^o = \max\limits_{(i,j)\in A} \{f_m(i,j)\}$. Formułujemy następujące zadanie minimaksowe na sieci $S(V,A)$:

$$\min_{f_m \in F_m} f^o = \min_{f_m \in F_m} \max_{(i,j)\in A} \{ f_m(i,j) \} \tag{3}$$

Niech $f_o = \min\limits_{(i,j)\in A} \{f_m(i,j)\}$; zadaniu (3) można nadać postać maksyminową:

$$\max_{f_m \in F_m} f_o = \max_{f_m \in F_m} \min_{(i,j)\in A} \{ f_m(i,j) \} \tag{4}$$

Aby zadanie [4] miało rozwiązanie skończone należy przyjmować dodatkowo, że sieć $S(V,A)$ nie zawiera cykli skierowanych.

W dalszych rozważaniach skupimy uwagę na algorytmie rozwiązania zadania (3). Ideę algorytmu dla rozwiązania zadania (4) przedstawiono w pracy [7] i rekapitulujemy ją krótko w zakończeniu punktu 5.

3. Istnienie przepływu w S(V,A)

W naszych rozważaniach przyjmujemy, że dla sieci S(V,A) istnieje chociażby jeden przepływ, to znaczy funkcja f spełniająca warunki (1) i (2). Przepływ f w sieci S(V,A) istnieje wtedy i tylko wtedy, [8], kiedy każdy łuk $(i,j) \in A$: albo leży na drodze od s do t, albo należy do pewnego cyklu skierowanego. W [5] podano warunek konieczny i dostateczny istnienia przepływu w ogólniejszej sieci S'(V,A), dla której warunek (2) ma postać:

$$-\infty \leqslant c(i,j) \leqslant f(i,j) \leqslant b(i,j) \leqslant +\infty \tag{2'}$$

W następnym punkcie zajmiemy się najważniejszymi aspektami efektywnego znajdowania przepływu f w sieci S(V,A), tutaj nadmieńmy, że algorytmy wyznaczania tego przepływu w sieci ogólniejszej S'(V,A) podane są w [2,4], a ich nakład obliczeń jest O(mn).

4. Znalezienie przepływu minimalnego w S(V,A)

Przypływ f_m o wartości minimalnej można wyznaczyć w sieci S(V,A) za pomocą algorytmów podanych w [2,3,6] o nakładzie obliczeń O(mn). W pracy [8] przedstawiono modyfikację algorytmu z [6], polegającą na zaadaptowaniu, znanej dla zagadnienia przepływu maksymalnego [1], metody grafu warstwowego. W rezultacie modyfikacji, na każdej iteracji algorytmu, wyznaczany jest graf wszystkich aktualnie najkrótszych dróg redukujących, nakładem obliczeń $O(n^2)$, a nakład całego algorytmu jest $O(n^3)$ lub $O(n^2\sqrt{m})$.

Ponieważ znajdowanie przepływu o wartości minimalnej stanowi istotną część algorytmu rozwiązania zadania (3), to podamy w skrócie zmodyfikowane zasady wyznaczania grafu warstwowego.

a). Niech f będzie przepływem w sieci S(V,A). Nowe wartości przepustowości łuków wyznaczamy następująco:

- $\{(i,j) \in A\} \wedge \{(j,i) \notin A\} \Rightarrow A := A \cup \{(j,i)\}$, $c'(j,i) := \infty$,
- $\{(i,j) \in A\} \wedge \{(j,i) \in A\} \Rightarrow c'(i,j) = c'(j,i) := \infty$, (5)
- $c(i,j) < \infty \Rightarrow c'(i,j) := f(i,j) - c(i,j)$,
- wszystkie łuki, dla których otrzymamy $c'(i,j) = 0$ usuwamy z A otrzymując zbiór A_f.

Sieć otrzymaną po wykonaniu korekt (5) oznaczymy $S_f(V,A_f)$. Załóżmy, że w sieci tej znaleźliśmy drogę redukującą P, i niech $\varepsilon_* = \min_{(i,j)\in P} \{c'(i,j)\}$.

b). Nowy przepływ f' o wartości $\vartheta_{f'} < \vartheta_f$ otrzymujemy według wzorów:

- $\{(i,j) \in P\} \wedge \{c(i,j) < \infty\} \Rightarrow f'(i,j) := f(i,j) - \varepsilon_*$,
- $\{(i,j) \in P\} \wedge \{c(i,j) = \infty\} \Rightarrow f'(j,i) := f(j,i) + \varepsilon_*$, (6)
- $f'(i,j) := f(i,j)$ dla pozostałych łuków.

c). Zmieniwszy przepływ f na f′ korygujemy przepustowości łuków:

- $\{(i,j)\in P\}\wedge\{c(i,j)<\infty\}\Rightarrow c'(i,j):=c(i,j)-\varepsilon_*$,
- $\{(i,j)\in P\}\wedge\{c(i,j)=\infty\}\wedge\{c(j,i)<\infty\}\Rightarrow c'(j,i):=c(j,i)+\varepsilon_*$, (7)
- $\{(i,j)\in P\}\wedge\{c(i,j)=\infty\}\wedge\{(j,i)\notin A\}\Rightarrow A:=A\cup\{(j,i)\}$,
  oraz $c'(j,i):=\varepsilon_*$,
- usuwa się wszystkie łuki, dla których $c'(i,j)=0$,
- $c'(i,j):=c(i,j)$ dla pozostałych łuków.

Przepływ f_m jest przepływem minimalnym w sieci $S(V,A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w sieci $S_{f_m}(V,A_{f_m})$ nie ma żadnej drogi redukującej względem f_m.

5. Metoda rozwiązania zadania minimaksowego

Zadanie przedstawione wzorami (1) ÷ (3) będziemy rozwiązywać następująco:

ETAP1. Znaleźć w sieci $S(V,A)$ przepływ f (funkcję spełniającą warunki (1) i (2)), otrzymując sieć $S_f(V,A)$.

ETAP2. W sieci $S_f(V,A)$ znaleźć przepływ f_m o wartości minimalnej ϑ_{f_m}, otrzymując sieć $S_{f_m}(V,A)$.

ETAP3. W sieci $S_{f_m}(V,A)$ znaleźć przepływ minimaksowy f_{mm}, $f_{mm}\in F_m$, otrzymując sieć $S_{f_{mm}}(V,A)$ będącą rozwiązaniem zadania.

Sposoby wyznaczenia przepływu f i przepływu minimalnego f_m są w literaturze znane i stosowne źródła podaliśmy w punktach 3 i 4. Nakład obliczeń w każdym przypadku jest proporcjonalny do $n^2\sqrt{m}$.

Zajmiemy się sposobem rozwiązania zadania ETAPU3. Niech będzie dany przepływ minimalny f_m oraz odpowiadająca mu wartość f^o. Chcemy znaleźć przepływ $f_m' \in F_m$, taki że $f^{o\prime}<f^o$ lub stwierdzić, że takiego przepływu nie ma, co kończy rozwiązywanie zadania.

Wprowadzimy dodatkowe pojęcia. Łuk (i,j) nazwiemy łukiem nasyconym od góry, jeżeli $f(i,j)=f^o$, - łukiem nasyconym od dołu jeżeli $f(i,j)=c(i,j)$ i łukiem nasyconym jeżeli $f^o=c(i,j)$. Łuk nasycony nazywamy także łukiem rozwiązującym, gdyż przepływ $f_m\in F_m$, dla którego mamy choćby jeden łuk nasycony jest przepływem minimaksowym f_{mm}.

Załóżmy, że sieć $S_{f_m}(V,A)$ nie zawiera łuku rozwiązującego. Cyklem redukującym dla łuku (i_1,j_1) nasyconego od góry nazwiemy zamkniętą sekwencję łuków, które spełniają poniższe warunki:

- łuk (i_1,j_1) należy do cyklu i on wyznacza jego orientację: inne łuki nasycone od góry mogą wchodzić do cyklu tylko wtedy, gdy mają orientację cyklu,
- łuki nienasycone od góry, jeżeli mają orientację cyklu (łuki zgodne) muszą być łukami nienasyconymi od dołu,
- każdy łuk o orientacji przeciwnej orientacji cyklu musi być łukiem nienasyconym od góry i co więcej, musi zachodzić $f(i,j)\leq f^o-2$.

Znając cykl redukujący C oznaczmy:

$$\overrightarrow{\Delta f} = \min_{(i,j)\in \overrightarrow{A}_C} \{f(i,j) - c(i,j)\},$$

$$\overleftarrow{\Delta f} = \min_{(j,i)\in \overleftarrow{A}_C} \{(f^o-2) - f(j,i)\}, \tag{8}$$

$$\Delta f = \min\{\overrightarrow{\Delta f}, \overleftarrow{\Delta f}\},$$

gdzie: $\overrightarrow{A}_C$ - podzbiór łuków cyklu redukującego zgodnych z jego orientacją,
$\overleftarrow{A}_C$ - podzbiór łuków cyklu redukującego o orientacji przeciwnej.

Wartość f^o, dla wszystkich łuków nasyconych od góry i należących do C, można zmniejszyć o Δf, a nowe wartości przepływów łukowych wzdłuż C wyniosą:

$$f(i,j) := f(i,j) - \Delta f, \quad \text{dla} \quad (i,j)\in \overrightarrow{A}_C,$$

$$f(j,i) := f(j,i) + \Delta f, \quad \text{dla} \quad (j,i)\in \overleftarrow{A}_C, \tag{9}$$

$f(i,j)$ pozstaje bez zmiany dla innych łuków.

Z definicji cyklu redukującego oraz ze wzorów (8) i (9) widać, że wartości przepływów po redukcji w łukach należących do C są mniejsze od f^o przynajmniej o jedność.

Niepusty podzbiór cykli redukujących $PC = \{C_1, C_2, \ldots, C_K\}$, których suma teoriomnogościowa łuków zawiera wszystkie łuki nasycone od góry sieci $S_{f_m}(V,A)$ i taki, że w wyniku redukcji wzdłuż jego elementów otrzymujemy sieć $S_{f'_m}(V,A)$, $f'_m \in F_m$, $f^{o\prime} < f^o$, nazwiemy podzbiorem redukcji globalnej. Zauważmy, że cykle należące do PC nie muszą być łukowo rozłączne, możliwe są więc przypadki znoszenia się efektów redukcji wzdłuż oddzielnych cykli. Możliwa jest wobec tego sytuacja, w której dla każdego łuku nasyconego od góry cykl redukujący istnieje, ale redukcja łączna nie jest możliwa. Mówimy wówczas, że podzbiór redukcji globalnej jest podzbiorem pustym, $PC = \emptyset$. Jeżeli dla danego f_m mamy $PC = \emptyset$, to mówimy że przepływ f_m jest nieredukowalny minimaksowo. Udowodnimy:

TWIERDZENIE. Przepływ minimalny f_m jest przepływem minimaksowym f_{mm} wtedy i tylko wtedy, gdy dla sieci $S_{f_m}(V,A)$ mamy $PC = \emptyset$.

DOWÓD. Konieczność dowodzimy natychmiast, zauważając że istnienie podzbioru $PC \neq \emptyset$ świadczy o tym, że przepływ f_m nie jest przepływem minimaksowym.

Wystarczalność dowodzimy przez sprowadzenie do sprzeczności. Pokażemy, że jeżeli $PC = \emptyset$ to założenie o nieminimaksowości przepływu f_m prowadzi do sprzeczności. Z założenia o minimalności f_m wynika, iż sieć $S_{f_m}(V,A)$ nie zawiera, względem f_m, żadnej drogi redukującej, a stąd wniosek o nieistnieniu cyklu redukującego obejmującego równocześnie źródło i ujście. Z założenia, że $PC = \emptyset$ wynika, że jeżeli nawet znajdziemy cykle redukujące dla pewnej liczby łuków nasyconych od góry, to jednak musi istnieć łuk, np.

(i_1,j_1), $f(i_1,j_1)=f^o$, dla którego redukcja wzdłuż cyklu, nie jest możliwa względem przepływu f_m otrzymanego w wyniku dotychczasowych zmniejszeń, nawet o wielkość $\Delta f^o=1$. Łuk (i_1,j_1) nie może leżeć na żadnej drodze redukującej z s do t, gdyż takiej nie ma. Nie ma więc możliwości zmniejszenia przepływu w tym łuku bez naruszenia warunków (1) i (2). Niemniej, z założenia o nieminimaksowości f_m przepływ w łuku (i_1,j_1) musi być zmniejszony - a więc sprzeczność. Dlatego mamy $f_m=f_{mm}$.
c.b.d.o.

Uzyskany wynik pozwala zaproponować algorytm znajdowania przepływu minimaksowego.

ALGORYTM

DANE: Sieć $S_{f_m}(V,A)$, $f_m \in F_m$, ϑ_{f_m}, f^o, $c^o = \max\limits_{(i,j)\in A}\{c(i,j)\}$ oraz $A^o = \{(i,j) \mid f_m(i,j)=f^o\}$.

KROK1. Jeżeli $f^o=c^c$, to przejdź do KROKU 5.

KROK2. Dla kolejnego łuku z A^o znajdź cykl redukujący i przejdź do KROKU 3. Jeżeli takiego cyklu nie ma, to przejdź do KROKU 5.

KROK3. Zmień wartość przepływu (wzór (9)) wzdłuż cyklu. Usuń z A^o łuki, które weszły do cyklu. Jeżeli $A^o=\emptyset$, to przejdź do KROKU 4, w przeciwnym przypadku wróć do KROKU 2.

KROK4. Znaleziono przepływ $f'_m \in F_m$; $f_m:=f'_m$; $f^o:=\max\limits_{(i,j)\in A}\{f_m(i,j)\}$, Utwórz A^o. Wróć do KROKU 1.

KROK5. Przepływ f_m o wartości ϑ_{f_m} jest przepływem minimaksowym f_{mm}, zaś $f^*=f^o$ jest wartością optymalną zadania (3).

Ponieważ zachodzi nierówność $c^o \leq f^* \leq f^o$, to równość $f^o=c^o$ świadczy o optymalności rozwiązania (KROK 1).

W pierwszej iteracji KROKU 2 zawsze ma miejsce $A^o \neq \emptyset$, przy czym $1 \leq |A^o| \leq m$. Jeżeli $|A^o| = m$, to z minimalności f_m wynika, że $f_m=f_{mm}$ i $f^*=f_m(i,j)= f^o = \text{const}$, $(i,j) \in A$. Do poszukiwania cyklu redukującego (KROK 2) można wykorzystać metodę przeszukiwania grafu w głąb - nakład obliczeń $O(n^2)$. Niech łuk $(j_1,j_2)\in A^o$, łuk ten określa orientację poszukiwanego cyklu i w stosunku do niego określamy przydatność napotykanych w trakcie przeszukiwania łuków. Na przykład łuk (j_2,j_3) jest użyteczny w przód jeżeli $f(j_2,j_3) > c(j_2,j_3)$, zaś łuk (j_3,j_2) jest użyteczny w tył, gdy $f(j_3,j_2) \leq (f^o-2)$. Następujące reguły mogą służyć efektywnemu poszukiwaniu cyklu redukującego:

- zakładamy, że w przyjętej strukturze danych reprezentacji sieci, np. listowej lub gwiaździstej, przechowywane są oddzielnie: najpierw numery wierzchołków, do których prowadzą łuki z danego wierzchołka j_1, w kolejności malejących wartości $f(j_1,j_k)$, a następnie numery wierzchołków, z których łuki wchodzą do j_1, w kolejności rosnących wartości $f(j_k,j_1)$:
- z wyjątkiem wierzchołka początkowego, powrót do wierzchołków już wizytowanych w trakcie przeszukiwania następuje tylko przez cofnięcie się, co ma

miejsce wówczas gdy z danym wierzchołkiem nie jest związany żaden łuk użyteczny (w przód lub w tył). Przez pominięcie łuków użytecznych prowadzących do wcześniej wizytowanych wierzchołków eliminowane są wszelkie podcykle. Możliwość powrotu do wierzchołka początkowego sygnalizuje znalezienie cyklu redukującego. Cofnięcie się do wierzchołka początkowego świadczy o nieistnieniu cyklu redukującego;
- każdy wierzchołek, z którego nastąpiło cofnięcie staje się wierzchołkiem zamkniętym, to znaczy że jest on bezużyteczny w dalszym poszukiwaniu aktualnego cyklu redukującego.

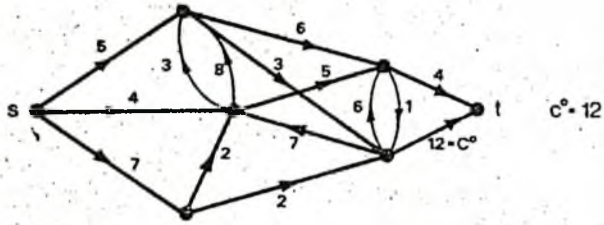
Ocenimy nakład obliczeń ALGORYTMU dla najgorszego przypadku. Liczba powrotów z KROKU 4 do KROKU 1 jest proporcjonalna do wartości $\Delta = (f^o - c^o)$. Liczba powrotów z KROKU 3 do KROKU 2 jest $O(|A^o|) = O(m)$. Nakład obliczeń w KROKU 2 jest $O(n^2)$. Nakład obliczeń innych działań (KROK 3 i KROK 4) jest $O(m)$. Łączny nakład obliczeń ALGORYTMU jest więc $O(mn^2)$.

Ponieważ nakłady obliczeń ETAPU 1 i ETAPU 2 są $O(n^2\sqrt{m})$, to całe zadanie znalezienia przepływu minimaksowego w zbiorze przepływów minimalnych w sieci $S(V,A)$ wymaga $O(mn^2\Delta)$ obliczeń - co jest oceną pseudowielomianową.

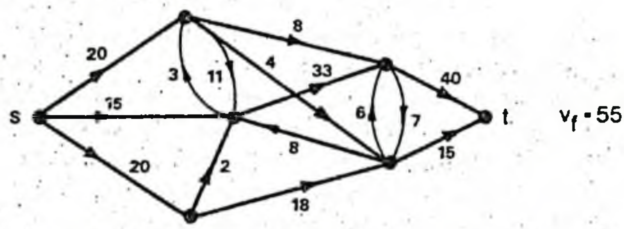
Ocenę wielomianową dla całego algorytmu można uzyskać zmieniając w zaprezentowanej metodzie ETAP 3. Nowy algorytm (można go także użyć do rozwiązania zadania (4)) opiszemy w odrębnej publikacji, tutaj ograniczmy się tylko do jego krótkiego scharakteryzowania. Po znalezieniu przepływu $f_m \in F_m$ (ETAPY 1 i 2) połowimy przedział Δ i wartość $c^o + \lceil \Delta/2 \rceil$ przyjmujemy jako ograniczenie górne na przepustowości wszystkich łuków. W sieci z dwustronnymi ograniczeniami szukamy przepływu o wartości ϑ_{f_m} (nakład obliczeń - $O(n^2\sqrt{m})$). Jeżeli przepływ taki istnieje, to wartość ograniczenia górnego zmniejszamy, a w przypadku przeciwnym - zwiększamy o połowę wartości $\lceil \Delta/2 \rceil$. Postępowanie to kontynujemy do uzyskania najmniejszej wartości ograniczenia górnego przepustowości, dla której jeszcze istnieje przepływ o wartości ϑ_{f_m}. Otrzymany przepływ $f'_m \in F_m$ jest przepływem minimaksowym, a ostatnia wartość ograniczenia górnego, jest szukanym minimaksowym przepływem łukowym. Nakład obliczeń wszystkich trzech etapów będzie teraz $O(n^2\sqrt{m}\log_2\Delta)$, a więc - wielomianowy.

6. Przykład liczbowy

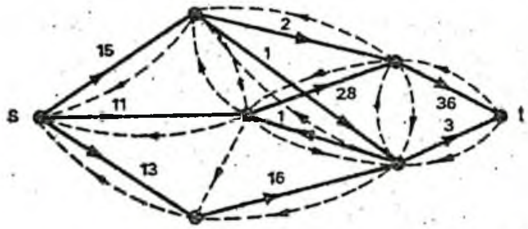
Przepływ minimaksowy jest poszukiwany w sieci przedstawionej na rys. 1. Na rys. 2 pokazana jest sieć po zakończeniu ETAPU 1. Kolejne iteracje ETAPU 2 są przedstawione na rys. 3 ÷ 7. Linie przerywane na rys. 3 i 5 odpowiadają łukom o $c(i,j) = \infty$. Przerywane linie pionowe na rys. 4 i 6 pokazują warstwy wierzchołków. Wierzchołek s leży w warstwie zerowej. Znak S na rys. 4 i 6 pokazuje łuki, decydujące o wartości Δf_i na i-tej drodze.



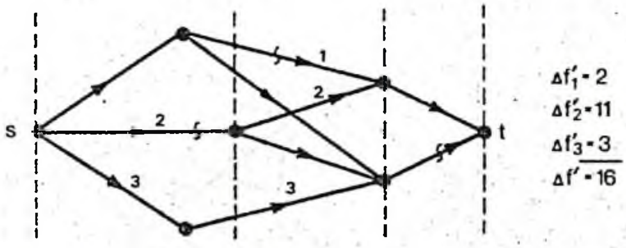
Rys. 1. Sieć S(V,A). Liczby oznaczają dolne przepustowości łuków
Fig. 1. Network S(V,A). Numbers denote lower arc capacities



Rys. 2. Sieć $S_f(V,A)$. Liczby oznaczają wartość przepływu w łukach
Fig. 2. The network $S_f(V,A)$. Numbers denote arc flow values

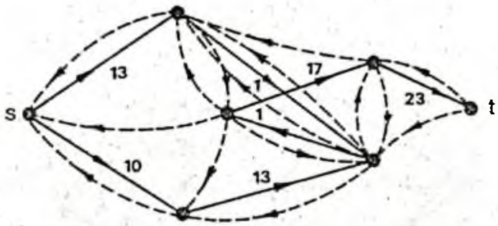


Rys. 3. Sieć $S_f(V,A_f)$. Liczby oznaczają przepustowości łuków, skorygowane według wzorów (5)
Fig. 3. The network $S_f(V,A_f)$. Numbers denote the arc capacities, corrected according to the formulas (5)



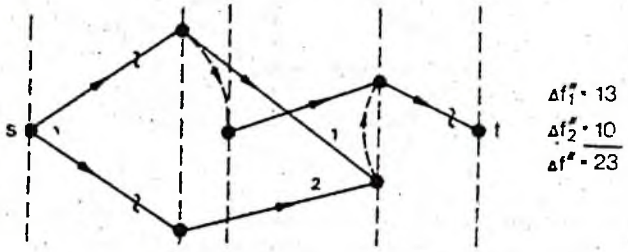
Rys. 4. Graf warstwowy najkrótszych dróg redukujących (długość=3). Cyfry oznaczają numery dróg wykorzystanych do zmniejszenia przepływu o $\Delta f'=16$. $\vartheta_{f'}=39$.

Fig. 4. The layerd graph of the shortest flow reducing paths (lenght=3). Numbers denote the paths used to reduce the flow value by $\Delta f'=16$. $\vartheta_{f'}=39$.



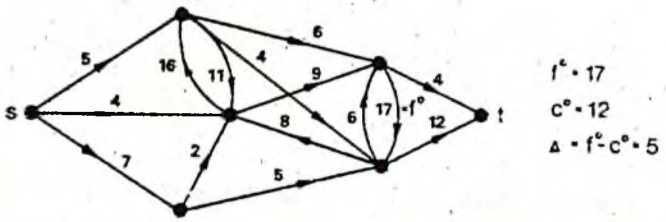
Rys. 5. Sieć $S_{f'}(V,A_{f'})$. Przepustowości łuków skorygowane według wzorów(7).

Fig. 5. The network $S_{f'}(V,A_{f'})$. The arc capacities are reduced according to the formulas (7).



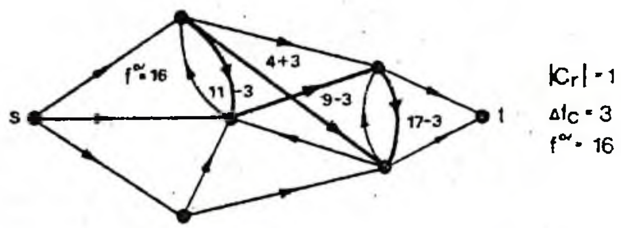
Rys. 6. Graf warstwowy najkrótszych dróg redukujących (długość=4), otrzymany z sieci $S_{f'}(V,A_{f'})$. Przepływ zredukowano o $\Delta f''=23$. $\vartheta_{f''}=16$.

Fig. 6. The layerd graph of the shortest flow reducing paths (length=4) extracted from the network $S_{f'}(V,A')$. The flow value is reduced by $\Delta f''=23$. $\vartheta_{f''}=16$.



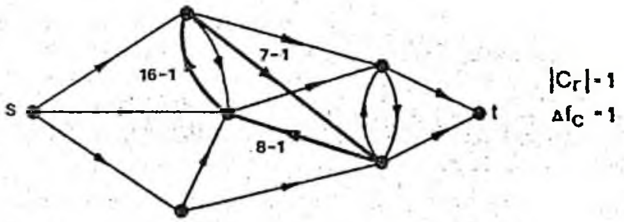
Rys. 7. Sieć $S_{f_m}(V,A)$. f_m jest przepływem minimalnym, $\vartheta_{f_m}=16$ $|A^o|=1$.

Fig. 7. The network $S_f(V,A)$. f_m is the minimal flow. $\vartheta_{f_m}=16$. $|A^o|=1$.

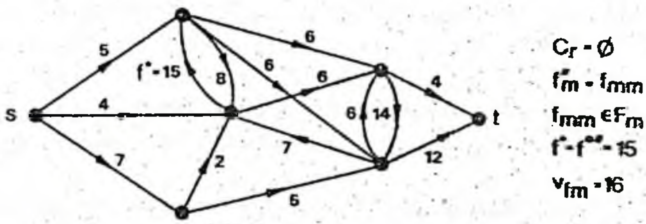


Rys. 8. Sieć $S_{f_m}(V,A)$. Linią pogrubioną pokazano cykl redukujący.

Fig. 8. The network $S_{f_m}(V,A)$. The bolded lines show an arc flow reducing cycle.



Rys. 9. Sieć $S_{f_m'}(V,A)$. Linią pogrubioną pokazano cykl redukujący. $|A^o|=1$.
Fig. 9. The network $S_{f_m'}(V,A)$. The bolded lines show an arc flow reducing cycle. $|A^o|=1$.



Rys. 10. Sieć $S_{f_m}(V,A) = S_{f_{mm}}(V,A)$. Liczby oznaczają przepływ łukowy. Optymalną wartością minimaksową jest $f^*=15$.

Fig. 10. The network $S_{f_m} = S_{f_{mm}}(V,A)$. Numbers denote the arc flows of a minimax flow f_{mm}. The optimal solution is $f^*=15$.

LITERATURA

[1] Adelson-Welskij G.N., Dinic E.A., Karżanow A.N.: Potokowyje ałgoritmy, Nauka, Moskwa 1976.

[2] Berge C.: Graphs and Hypergraphs, North-Holland, Paris-Amsterdam 1973.

[3] Christofides N.: Graph Theory: An Algorithmic Approach, Academic. Press, London 1975.

[4] Ford L.R., Fulkerson D.R.: Flows in Networks, Princeton Univ. Press, New Jersey 1962.

[5] Hoffman A.J.: in C.Berge - Theorie des Graphes, Paris 1958.

[6] Kofman A.: Wwiedienije w prikładnuju kombinatoriku (tłum. z francuskiego), Nauka, Moskwa 1975.

[7] Słomiński L.: Nachożdienije minimaksnych potokow w sieti s niżnimi ograniczenijami na propusknyje sposobnosti dug. Ukaże się w pracach: IX-te Polsko-Bułgarskie Sympozjum nt. "Optymalizacja i Sterowanie w Systemach Cybernetycznych", Warszawa 30IX-5X 1985.

[8] Wojtiszyn Ju.W.: Zadacza o minimalnom potokie w sieti i algoritm jejo reszenija. Kibiernietika No. 1, 1980, str. 116-118.

Recenzent: Doc.dr h.inż.Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РЕШЕНИЯ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ О ПОТОКЕ В СЕТИ

Р е з ю м е

В направленной сети о положительными целочисленными ограничениями на нижние значения пропускных способностей дуг сформулирована следующая задача.

В множестве потоков минимальной стоимости найти поток минимизирующий самое большое значение потока по отдельным дугам (минимаксная задача). Для решения этой задачи предложен алгоритм порогового типа, основан на методе уменьшающих циклов с объёмом вычислений пропорциональным $m n^2 \Delta$, где Δ - значение разницы между максимальным потоком в дуге и максимальной пропускной способностью, m и n соответственно число дуг и число вершин в графе.

Указана возможность снизить оценку количества вычислений для худшего случая, до величины $O(n^2\sqrt{m}\log_2 \Delta)$, применяя выбор целочисленного значения порога методом деления пополам предела Δ.

ALGORITHMIC ISSUES OF SOLVING THE MINIMAX FLOW PROBLEM IN A NETWORK

S u m m a r y

We are given a directed network S (V,A),where V is the set of vertices of cardinality n,and A is the set of arcs of cardinality m .Each arc has a positive integer, associated with it ,called the lower arc capacity. A positive real - valued flow - function is defined on the set A : for each vertex,except the source s and the sink t ,the flow conservation law holds, the outflow the source equals ,with negative sign,to the flow entering the source equals ,with negative sign,to the flow entering the sink;for arc the flow is not smaller then the arc capacity.In presented network the following minimax problem is defined: over the set consisting of all flows of the minimal value we would like to find a such one that minimizes the maximum of arc flows (the minimax problem). To solve the problem we have proposed a flow reducung cycles method. After establishing the flow of the minimal value (the amount of computation is of O ($n^2\sqrt{m}$))we try to find a flow reducing cycle for each maximal arc flow. If such a cycle has been

foun the maximal arc flow is reduced by at least one (over different arc in the cycle flow may be decreased or increased). Finding flow reducing cycles for all arcs with maximal flows complete one phase of reductions and allows us to start the next one. We have prooved that the flow of minimal value is the minimax one if and only if there is at least one maximal arc which does not allow any flow reducing cycle. We employ a modification of the depth-first search method to establish a reducing cycle. Computational complexity of our method for solving the minimax flow problem is of $O\ (m\ n^2\Delta)$ -that means a pseudopolynomial boundis obtained; Δ is the difference beetwen the maximal arc flow value and the maximum of the arc capacities. The flow reducing cycles algorithm is explained by demonstating an example. A desired polynomial bound od computations $-O\ (\ n\ \sqrt{m}\ \log_2\Delta\ )$ may be obtained when the flow reducing cycles algorithm is replaced by an algorithm solving a sequence of maximal flow problems in the network $S(V,A)$ with upper and bounds imposed upon the arcs.