ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol.894

Stanisław Zdrzałka
Politechnika Wrocławska
Instytut Cybernetyki Technicznej

ANALIZA PROBABILISTYCZNA ALGORYTMÓW HEURYSTYCZNYCH DLA ZAGADNIEŃ PAKOWANIA I SZEREGOWANIA ZADAŃ - PRZEGLĄD*

Streszczenie. W pracy przedstawiono przegląd wyników związanych z analizą probabilistyczną algorytmów heurystycznych dla zagadnień pakowania i szeregowania zadań. Pokazano typowe podejścia oraz podano obszerną bibliografię.

1. Wstęp

Kiedy po pracach Cooka i Karpa ustanawiających podwaliny teorii złożoności obliczeniowej - początek lat 70, ruszyła lawina prac rozpatrujących złożoność obliczeniową problemów kombinatorycznych, okazało się, że większość z nich należy do klasy problemów NP-trudnych, a więc takich, dla których "prawdopodobnie" nie można znaleźć algorytmów znajdujących rozwiązanie w czasie ograniczonym przez wielomian od rozmiaru problemu - algorytmy te zwykło się nazywać wielomianowymi lub efektywnymi. W klasie tej znalazła się również większość problemów optymalizacji dyskretnej związanych ze sterowaniem dyskretnymi procesami produkcyjnymi, na przykład większość zagadnień szeregowania zadań na maszynach. Charakterystyczne jest również to, że im bardziej model matematyczny zbliżony jest do rzeczywistego procesu, tym szybciej problem staje się NP-trudny. Chociaż w wielu przypadkach udaje się znaleźć stosunkowo szybkie algorytmy dla tych problemów, to na ogół jednak ich czas obliczeń, przy rozmiarach problemów odpowiadających rzeczywistym procesom, jest tak duży, że wyklucza ich stosowanie w ogóle, a najczęściej wyklucza ich stosowanie do sterowania w czasie rzeczywistym.

Sytuacja ta przydała algorytmom heurystycznym nowego znaczenia. Heureza stała się w wielu przypadkach jedynym podejściem umożliwiającym otrzymanie rozwiązania, w jakimś sensie zbliżonego do optymalnego w wielomianowym czasie. W przypadku sterowania "on line" algorytmy heurystyczne stanowią często jedyną dopuszczalną klasę sterowań. W początkach stosowania podejścia heurystycznego sens tego przybliżenia był raczej niejasny, często intuicyjny. Jakość rozwiązania była oceniana na podstawie testów przeprowadzanych dla pewnej "reprezentatywnej" próby danych. Zapoczątkowana przez Grahama [11] analityczna metoda szacowania dokładności algorytmów heurystycznych, polegająca na określeniu maksymalnego odchylenia

* praca była częściowo finansowana przez RP.I.02 "Teoria sterowania i optymalizacja ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych"

pomiędzy wartością optymalną funkcji celu a wartością wygenerowaną przez algorytm, dla określonego zbioru danych rozpatrywanego problemu /analiza najgorszego przypadku/, zmieniła tę sytuację. Algorytm heurystyczny ze znanym maksymalnym odchyleniem od wartości optymalnej staje się de facto algorytmem przybliżonym, zaś owo maksymalne odchylenie /gwarantowana dokładność/ jest miarą przybliżenia.

Analiza najgorszego przypadku dostarcza informacji na temat gwarantowanej dokładności algorytmu, nie pozwala jednak wnioskować nic na temat jego średniego zachowania się. Jak pokazały dotychczasowe doświadczenia, gwarantowana dokładność różni się zawsze dość istotnie od średniej dokładności, czasami różnica ta jest drastyczna. Na przykład eksperymenty numeryczne przeprowadzone dla algorytmu Pottsa [21] rozwiązującego NP-trudny problem szeregowania zadań na jednej maszynie z zadanymi czasami gotowości zadań i zadanymi pożądanymi terminami wykonania, $1|r_j|L_{max}$, dały zupełnie zaskakujący rezultat [13]. Algorytm posiadający gwarantowaną dokładność 50% dał optymalne rozwiązanie w 239 przypadkach na 240 badanych. Średnia dokładność była znacznie niższa od 1%.

Wynikła stąd potrzeba oceniania jakości algorytmów heurystycznych za pomocą dwóch wskaźników, gwarantowanej i średniej dokładności. W tym drugim przypadku, w miejsce badań statystycznych lub obok tych badań, zaczęto stosować metody analizy probabilistycznej [15].

W niniejszej pracy dokonujemy przeglądu wyników uzyskanych metodą analizy probabilistycznej dla algorytmów heurystycznych zagadnień szeregowania zadań na maszynach oraz zagadnień pakowania. Przedstawiamy też charakterystyczne dla tej metody podejścia. Ta ostatnia grupa zagadnień jest związana z niektórymi problemami szeregowania, a ponadto jest interesująca z punktu widzenia celu tej pracy, ponieważ była jak dotąd, przedmiotem szczególnie intensywnych badań.

2. Notacja

Niech I oznacza zestaw danych liczbowych pewnego problemu minimalizacji $\mathcal{P}$; I nazywamy dalej problemem konkretnym. Niech $K^A(I)$ oraz $K^*(I)$ oznaczają odpowiednio, wartość funkcji celu problemu $\mathcal{P}$ otrzymaną wskutek zastosowania algorytmu heurystycznego A dla problemu konkretnego I oraz minimalną wartość funkcji celu dla I. Tam gdzie będzie to potrzebne będziemy wśród danych problemu wyróżniać rozmiar problemu n /definiowany odpowiednio do sytuacji jaka będzie rozpatrywana/. Wtedy używać będziemy notacji $K^A(I;n)$, $K^*(I;n)$.

W analizie najgorszego przypadku bada się dwa typy wskaźników jakości algorytmu A:

- dokładność A dla problemów konkretnych I ze zbioru D_p:

$$R_A = \sup_{I \in D_p} \frac{K^A(I)}{K^*(I)},$$

przy czym D_p zadawany jest w różny sposób. Może to być zbiór wszystkich problemów konkretnych, zbiór problemów konkretnych, dla których pewne parametry są ustalone, na przykład rozmiar problemu n; $D_p(n)$. Często wybór D_p uwarunkowany jest podejściem stosowanym w analizie. Na przykład Johnson [14], określił D_p jako zbiór tych problemów konkretnych, dla których $K^*(I) \geq N$, gdzie N jest ustalone: $D_p(N)$.

- dokładność asymptotyczna:

$$R_A = \lim_{n \to \infty} \sup \left(\sup_{I \in D_p(n)} \frac{K^A(I)}{K^*(I)} \right).$$

W analizie probabilistycznej zakłada się, że problem konkretny I /zestaw danych/ jest realizacją zmiennej losowej o znanym rozkładzie, lub o rozkładzie spełniającym pewne warunki. Przy tym założeniu $K^A(I)$ oraz $K^*(I)$ stają się zmiennymi losowymi, a analiza sprowadza się do zbadania wybranych własności tych zmiennych; w pracy zmienną losową oraz jej realizację będziemy oznaczać tym samym symbolem. Trudności natury teoretycznej sprawiły, że rzadko badany był wskaźnik $E\left(\frac{K^A(I)}{K^*(I)}\right)$, oczekiwana dokładność algorytmu A. Najczęściej badanymi w literaturze wskaźnikami są

$$\frac{E(K^A(I))}{E(K^*(I))} \quad \text{oraz} \quad \frac{E(K^A(I;n))}{E(K^*(I;n))},$$

a rezultaty dotyczą górnych ograniczeń tych wielkości oraz własności asymptotycznych. Chociaż w rozpatrywanych zagadnieniach rozmiar problemu n jest zawsze liczbą skończoną, często niezbyt dużą, to jednak interesującym wskaźnikiem jakości algorytmu jest to czy ciąg zmiennych losowych $\{K^A(I;n)/K^*(I;n), n \geq 1\}$ albo $\{K^A(I;n) - K^*(I;n), n \geq 1\}$ jest zbieżny dla $n \to \infty$, do odpowiednio 1 albo 0. Otrzymywane w literaturze rezultaty dotyczą zbieżności z prawdopodobieństwem 1 lub według prawdopodobieństwa oraz szybkości zbieżności. Przypominamy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n, n \geq 1\}$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 do X, $X_n \xrightarrow[z\ p.1]{} X$, jeżeli $Pr\{\lim_{n \to \infty} X_n = X\} = 1$. Ciąg $\{X_n, n \geq 1\}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X, $X_n \xrightarrow{p} X$, jeżeli $\lim_{n \to \infty} Pr\{|X_n - X| \leq \varepsilon\} = 1$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

Ponadto badane są własności asymptotyczne, oddzielnie ciągu $K^A(I;n)$ oraz $K^*(I;n)$, bądź też $K^A(I;n)/n$ oraz $K^*(I;n)/n$.

3. Problem pakowania

W punkcie tym przedstawimy wyniki analizy probabilistycznej algorytmów heurystycznych dla problemu pakowania [14].

Problem pakowania: Dany jest skończony zbiór elementów o numerach $1,2,\ldots,n$, $J = \{1,\ldots,n\}$, oraz funkcja rzeczywista a przyporządkowująca każdemu elementowi $j \in J$ rozmiar a_j, $0 < a_j \leqslant C$. Należy znaleźć rozbicie zbioru J na podzbiory $U_1,\ldots,U_L$ takie, że $\sum_{j\in U_i} a_j \leqslant C$, $i=1,\ldots,L$ oraz L jest minimalne.

Oryginalna interpretacja tego problemu jest następująca. Należy zapakować wszystkie elementy ze zbioru J do jak najmniejszej liczby pojemników tak, żeby suma rozmiarów elementów znajdujących się w każdym z pojemników nie przekraczała pojemności pojemnika C. Problem ten można również interpretować jako jednowymiarowy problem cięcia. Jeżeli na zbiorze J zdefiniowany jest porządek częściowy /ograniczenie kolejnościowe/ $\prec$ oraz narzucony jest dodatkowy warunek:

/a/ jeżeli $i,j \in J$, $i \prec j$ oraz $i \in U_k$, $j \in U_l$, to $k \leqslant l$,

wtedy mamy do czynienia z problemem równoważenia linii montażowej. W tej interpretacji J jest zbiorem operacji, a_j czasem wykonywania operacji j, a C czasem cyklu. Każdemu stanowisku i linii należy przyporządkować podzbiór operacji U_i tak, żeby łączna liczba zajętych stanowisk była minimalna. Jeżeli zachowamy wszystkie ograniczenia poprzedniego zadania oraz w warunku /a/ w miejsce $k \leqslant l$ wstawimy $k < l$, to otrzymamy zagadnienie rozdziału zasobu w sieci czynności. W tym przypadku: J jest zbiorem operacji, każda operacja wykonywana jest w jednostce czasu, a_j jest ilością zasobu niezbędną do wykonania operacji j, a C maksymalną ilością zasobu jaka jest do dyspozycji w jednostce czasu. Problem polega na uszeregowaniu operacji w taki sposób, żeby spełnione były ograniczenia kolejnościowe, zasobowe, oraz czas wykonania wszystkich operacji był minimalny.

Jak widać problem pakowania uogólniony poprzez wprowadzenie ograniczeń kolejnościowych posiada różne zastosowania. W [22] podano jeszcze jedno uogólnienie, poprzez wprowadzenie ujemnych rozmiarów elementów. Tak uogólniony problem pakowania okazał się być modelem problemu szeregowania zadań ze specyficznie zdefiniowanymi przedziałami [czas gotowości, linia krytyczna].

Problem pakowania jest silnie NP-trudny, [9], i dla jego rozwiązywania zaproponowano wiele algorytmów heurystycznych [14]. W dalszym ciągu J oznaczać będzie również listę elementów - uporządkowany zbiór J. Ponadto, przez $B_1,B_2,\ldots$ oznaczamy pojemniki, a przez $P_1,P_2,\ldots$ ich poziomy /poziom - suma rozmiarów elementów znajdujących się w pojemniku/.

Algorytm NF: Elementy wkładamy do pojemników w kolejności w jakiej występują one na liście J, rozpoczynając od pierwszego, który wkładamy do B_1.

Niech j będzie kolejnym elementem, który należy umieścić w pojemniku, a B_i niepustym pojemnikiem o największym indeksie. Jeżeli $P_i + a_j \leq C$ umieść j w B_i i podstaw $P_i := P_i + a_j$. W przeciwnym przypadku umieść j w B_{i+1} i podstaw $P_{i+1} := a_j$.

Algorytm FF: Elementy wkładamy do pojemników w kolejności w jakiej występują one na liście J, rozpoczynając od pierwszego, który wkładamy do B_1. Kolejny element j umieść w pojemniku o najmniejszym indeksie spośród tych, w których on się mieści /dla którego $P_i + a_j \leq C$/.

Algorytm BF: Elementy wkładamy do pojemników w kolejności w jakiej występują one na liście J, rozpoczynając od pierwszego, który wkładamy do B_1. Kolejny element j umieść w pojemniku o najmniejszym indeksie spośród tych, dla których $P_i + a_j \leq C$ oraz P_i jest największe.

Algorytm FFD: Zastosuj FF do listy J, na której elementy uporządkowane są zgodnie z nierosnącymi a_j.

Algorytm BFD: Zastosuj BF do listy J, na której elementy uporządkowane są zgodnie z nierosnącymi a_j.

Wyniki analizy najgorszego przypadku dla tych algorytmów są następujące, [14]: $R_{NF} = 2$, $R_{FF} = R_{BF} = 17/10$, $R_{FFD} = R_{BFD} = 11/9$. W dalszej części zakłada się, nie zmniejszając ogólności rozważań, że C=1.

Algorytm NF

Pierwszy rezultat otrzymany drogą analizy probabilistycznej należy do Coffmana, Hofri, So i Yao [4]. Założenie: elementy tworzą nieskończony ciąg a ich rozmiary są niezależnymi zmiennymi losowymi /n.z.l./ o tym samym rozkładzie G określonym na przedziale [0,1]. Przy tym założeniu poziomy pojemników P_i, $i \geq 1$ tworzą proces Markowa na przestrzeni stanów [0,1]. Autorzy pokazują, że proces ten jest ergodyczny i wykorzystując ten fakt otrzymują następujący wynik. Niech $\bar{P} = \lim_{i\to\infty} E(P_i)$. Istnieje γ takie, że $|k\bar{P} - \sum_{i=1}^{k} E(P_i)| < \gamma$ dla każdego $k \geq 1$. Jeżeli więc algorytm NF wygenerował k pojemników, to $E(K^*(I) | K^{NF}(I) = k) \geq \sum_{i=1}^{k} E(P_i)$ i na podstawie powyższej nierówności otrzymujemy $k/E(K^*(I) | K^{NF}(I) = k) < 1/\bar{P}$ dla dużych k. Jeżeli G jest rozkładem jednostajnym, wówczas $k < \frac{4}{3}[E(K^*(I) | K^{NF}(I) = k) + 3]$, czyli dla dużych k, $k/E(K^*(I) | K^{NF}(I) = k) < \frac{4}{3}$. Niestety, wyliczenie $\bar{P}$ i γ dla innych rozkładów niż jednostajny okazało się zbyt trudnym problemem.

Prostsze a równocześnie bardziej owocne podejście do analizy algorytmu NF podali Ong, Magazine i Wee [20]. W swojej analizie rozpatrują oni zmienną losową $\Delta K^{NF}(I;n) = K^{NF}(I;n) - K^{NF}(I;n-1)$, $n \geq 2$; $\Delta K^{NF}(I;1) = 1$ i w oparciu o jej rozkład prawdopodobieństwa znajdują odpowiednie charakterystyki probabilistyczne algorytmu NF. Całość analizy prowadzona jest przy założeniu, że $a_1, \ldots, a_n$ są n.z.l. o tym samym rozkładzie zadanym przez gęstość prawdopodobieństwa $g(x)$. Otrzymano następujące wyniki:

/1/ Dla rozkładu jednostajnego, $g(x) = 1$: $\frac{E(K^{NF}(I;n))}{E(K^{*}(I;n))} \leqslant \frac{4}{3} + \frac{1}{3n}$, $n \geqslant 2$, $\mathrm{Var}(K^{NF}(I;n)) = \frac{8n}{45} - \frac{13}{180}$, $\frac{K^{NF}(I;n)}{n} \xrightarrow{p} \frac{2}{3}$. Wynikają one z faktu, że

$$\Pr\{\Delta K^{NF}(I;n) = 1\} = \begin{cases} \frac{2}{3}, & n \geqslant 3 \\ \frac{1}{2}, & n=2 \\ 1, & n=1 \end{cases}$$

oraz że $K^{NF}(I;n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta K^{NF}(I;i)$ i $E(K^{*}(I;n)) \geqslant \frac{n}{2}$. /2/ Dla wykładniczego rozkładu obciętego, $g(x) = \alpha e^{-x\alpha}/(1 - e^{-\alpha})$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ oraz $g(x) = 0$ dla pozostałych x:

$$\lim_{n\to\infty} E(K^{NF}(I;n))/n = (1-2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha})/(1 - e^{-\alpha})(\alpha - 1 + e^{-\alpha}).$$

/2/ Dla dowolnego rozkładu ze znaną gęstością prawdopodobieństwa $g(x)$ pokazano, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} E(\Delta K^{NF}(I;n)) = \beta$ oraz że $K^{NF}(I;n)/n \xrightarrow{p} \beta$.

Algorytmy FFD i BFD

Analiza tych algorytmów przeprowadzona została drogą pośrednią, poprzez analizę innego algorytmu, FOLD, spełniającego warunek $K^{FFD}(I;n)$, $K^{BFD}(I;n) \leqslant K^{FOLD}(I;n)$, Frederickson [7].

FOLD: Niech $\alpha \in (0,1]$. /1/ Każdy element j, dla którego $a_j \geqslant \alpha$ umieść oddzielnie w nowym pojemniku. /2/ Pozostałe elementy uporządkuj wg niemalejących a_j i przenumeruj je tak aby $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Dla $i=1,\ldots,\lfloor k/2 \rfloor$: jeżeli $a_i + a_{k-i+1} \leqslant 1$, to umieść i oraz $k-i+1$ w nowym pojemniku; w przeciwnym przypadku umieść je oddzielnie w nowych pojemnikach. Jeżeli k jest nieparzyste, umieść element $\lceil k/2 \rceil$ oddzielnie w nowym pojemniku. Przy założeniu, że $a_1,\ldots,a_n$ są n.z.l. o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$ pokazano, że

$$\frac{E(K^{FFD}(I;n))}{E(K^{*}(I;n))}, \frac{E(K^{BFD}(I;n))}{E(K^{*}(I;n))} < 1 + n^{-1} + \frac{3}{2} n^{-\frac{1}{3}} = 1 + O(n^{-\frac{1}{3}})$$

Stosując podobne podejście, Lueker [19] przedstawił przy tych samych założeniach mocniejsze wyniki:

$$E(K^{FFD}(I;n)), E(K^{BFD}(I;n)) \leqslant \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + O(n^{\frac{1}{2}}),$$

$$E(K^{*}(I;n)) \geqslant \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{24\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{1}{2}} - 1) + O(n^{\frac{1}{2}}).$$

Inne wyniki

Interesujące wyniki dotyczące zachowania się ciągu zmiennych losowych $K^{*}(I;n)/n$ przedstawia w pracy [18] Loulou. Przy założeniu, że $a_1,\ldots,a_n$

są n.z.l. o tej samej dystrybuancie G pokazuje on, że: 1/. Jeżeli G jest dystrybuantą symetryczną na [0,1], ciągłą z ograniczoną drugą pochodną lub dyskretną, to $K^{*}(I;n)/n \xrightarrow[z\ p.1]{} \frac{1}{2}$. 2/. Jeżeli G jest funkcją wypukłą na [0,1] oraz druga pochodna G jest ograniczona w przedziale $[0,\frac{1}{2}]$, to $K^{*}(I;n)/n \xrightarrow[z\ p.1]{} 1 - G(\frac{1}{2})$. 3/. Jeżeli G jest funkcją wklęsłą oraz druga pochodna G jest ograniczona w przedziale [0,1], to $K^{*}(I;n/n) \xrightarrow[z\ p.1]{} E(a_1)$. W pracy podane są jeszcze inne rezultaty ułatwiające analizę zachowania się ciągu $K^{*}(I;n)/n$ dla innych rozkładów G.

W pracy [3] zasygnalizowano szereg dalszych, nieopublikowanych dotąd wyników rozszerzających rezultaty Loulou i Luekera na nieco szerszą klasę rozkładów G.

Nie pojawiły się jak dotąd prace analizujące algorytmy heurystyczne dla uogólnionego zagadnienia pakowania, w którym występują ograniczenia kolejnościowe, chociaż znane są już od dawna wyniki analizy najgorszego przypadku dla algorytmów FF, FFD, zmodyfikowanych w ten sposób, aby uwzględniały ograniczenia kolejnościowe.

4. Zagadnienie szeregowania zadań na równoległych identycznych maszynach

Dany jest skończony zbiór zadań o numerach 1,2,...,n, $J = \{1,...,n\}$ oraz zbiór m maszyn. Zadanie j może być wykonywane na dowolnej z maszyn, przy czym czas wykonywania wynosi p_j. W każdej chwili czasu każda z maszyn może wykonywać co najwyżej jedno zadanie, przerywanie wykonywania zadania nie jest dopuszczalne. Każdej z maszyn należy przyporządkować podzbiór zadań i każdemu zadaniu, moment rozpoczęcia wykonywania w ten sposób, żeby czas wykonania wszystkich zadań ze zbioru J był minimalny; czas wykonania wszystkich zadań wynosi $\max_{j\in J} C_j$, gdzie C_j jest czasem zakończenia wykonywania zadania j.

Problem ten, zapisywany symbolicznie jako $P\|C_{max}$, jest NP-trudny, już począwszy od m=2, [16]. Zauważmy jeszcze, że jest on równoważny "odwróconemu" problemowi pakowania, to znaczy jeżeli w problemie pakowania przyjąć, że ilość pojemników jest zadana, natomiast minimalizować należy pojemność pojemnika C, wówczas otrzymujemy problem $P\|C_{max}$.

Jeżeli chodzi o algorytmy heurystyczne, problem ten doczekał się w literaturze teorii szeregowania największej liczby opracowań. Przedstawimy tylko te algorytmy, dla których przeprowadzono analizę probabilistyczną.

Algorytm S: Zadania z listy J /porządek zadań na liście jest dowolny/ przydzielane są kolejno, począwszy od pierwszego które ustawiamy jako pierwsze na dowolnej z maszyn. Kolejne zadanie j przydziel do maszyny, która najwcześniej kończy wykonywanie przydzielonych jej do tej pory zadań.

Algorytm LF: Utwórz listę J, na której zadania uporządkowane są zgodnie z nierosnącymi p_j i następnie zastosuj S.

Wyniki analizy najgorszego przypadku dla tych algorytmów są następujące: $R_S = 2 - \frac{1}{m}$, 11, $R_{LF} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$, 12.

Algorytm S

Pierwsza analiza probabilistyczna algorytmów heurystycznych dla $P||C_{max}$ przeprowadzona została w pracy Coffmana, Fredericksona i Luekera [2]. Dla algorytmu S pokazano, że jeżeli m=2 oraz $p_1,\dots,p_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi /n.z.l./ o rozkładzie jednostajnym na [0,1], to

$$\frac{E(K^S(I;n))}{E(K^*(I;n))} < 1 + \frac{2}{3n}.$$

Loulou [17] przedstawił wyniki dotyczące zbieżności ciągu $K^S(I;n) - K^*(I;n)$. Pokazał, że jeżeli $p_1,\dots,p_n$ są n.z.l. o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej, to:/1/ dla $m > 2$ istnieje skończona zmienna losowa Z, niezależna od n i taka, że $Pr\{K^S(I;n) - K^*(I;n) > x\} \leq Pr\{Z > x\}$ dla $x \geq 0$; innymi słowy zmienna losowa $K^S(I;n) - K^*(I;n)$ jest stochastycznie ograniczona przez skończoną zmienną losową; /2/ dla m=2 zmienna losowa $K^S(I;n) - K^*(I;n)$ jest zbieżna według dystrybuanty.

Algorytm LF

Jeżeli m=2, $p_1,\dots,p_n$ są n.z.l. o rozkładzie jednostajnym na [0,1], to [2]:

$$\frac{E(K^{LF}(I;n))}{E(K^*(I;n))} \leq 1 + \frac{2e}{n(n+1)}.$$

Ten i poprzedni wynik tych samych autorów otrzymano analizując proces Markowa V_i, gdzie V_i jest różnicą /dodatnią/ czasów, w których maszyny stają się wolne po wykonaniu i pierwszych zadań. W pracy Coffmana i Gilberta [5] podano następujący wynik dla dowolnego m. Jeżeli $p_1,\dots,p_n$ są n.z.l. o rozkładzie jednostajnym, to

$$E\left(\frac{K^{LF}(I;n)}{K^*(I;n)}\right) \leq 1 + \frac{2(m-1)}{n-2}, \quad n \geq 2,$$

jeżeli zaś mają rozkład wykładniczy, to

$$E\left(\frac{K^{LF}(I;n)}{K^*(I;n)}\right) \leq 1 + \frac{(m-1)\,H_{m-1}}{n-m}, \quad n \geq m,$$

gdzie H_{m-1} jest liczbą harmoniczną.

W [6] pokazano, że jeżeli $p_1,\dots,p_n$ są n.z.l. o tym samym rozkładzie, to $K^{LF}(I;n)/K^*(I;n) \xrightarrow{P} 1$, natomiast w [8], że $K^{LF}(I;n) - K^*(I;n) \xrightarrow{P} 0$ /jeżeli $E(p_1) < \infty$ oraz gęstość prawdopodobieństwa g spełnia warunek $g(0) > 0$/.

5. Zagadnienie szeregowania zadań na równoległych identycznych maszynach z zadanymi czasami gotowości i pożądanymi terminami zakończenia wykonywania

Problem rozważany tu różni się od poprzedniego tym, że dodatkowo dla każdego zadania $j \in J$ zadane są wielkości r_j i d_j, odpowiednio, najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia wykonywania zadania i pożądany termin zakończenia wykonywania zadania. Problem polega na minimalizacji funkcji celu $\max_{j \in J} L_j$, gdzie $L_j = C_j - d_j$. W literaturze zapisywany jest on jako $P|r_j|L_{max}$. Jest on równoważny problemowi minimalizacji czasu zakończenia wykonywania wszystkich zadań, jeżeli przyjąć, że każde zadanie j, po jego wykonaniu na którejś z m maszyn przechodzi na maszynę o nieograniczonej przepustowości, na której czas wykonywania wynosi $q_j = D - d_j$, $D = \max_{j \in J} d_j$. Równoważna postać zapisywana jest jako $P|r_j, q_j|C_{max}$. Problem ten jest NP-trudny już począwszy od m=1, [16].

W [1] podano następujący algorytm heurystyczny, będący uogólnieniem znanego dla przypadku m=1 algorytmu, podanego przez Schrage.

Algorytm SCH

Niech I będzie zbiorem zadań, które dotąd nie zostały przydzielone do maszyn a $u_1, \ldots, u_m$, momentami czasu, w których maszyny stają się wolne.

/i/ $u_1 := u_2 := \ldots := u_m := \min_{j \in J} r_j$, $I := J$.

/ii/ Jeżeli $I = \emptyset$, to koniec. Niech k_0 będzie indeksem pierwszej wolnej maszyny, $u_{k_0} = \min_{1 \le k \le m} u_k$.

/iii/ Jeżeli $r_j > u_{k_0}$ dla każdego $j \in I$, to $u_{k_0} := \min_{j \in I} r_j$.

/iv/ Niech $j \in I$ będzie zadaniem, dla którego $r_j \le u_{k_0}$ i q_j jest maksymalne. Przydziel j do maszyny k_0, podstaw $u_{k_0} := u_{k_0} + p_j$, $I := I \setminus \{j\}$ i przejdź do /ii/.

Dla m=1 wykazano, [21], że $R_{SCH} = 2$. Dla m=1 pokazano również, [21], że jeżeli k jest zadaniem krytycznym /patrz definicja w [21]/, to $K^{SCH}(I;n) - K^*(I;n) \le p_k$. Podobnie, w [1] pokazano dla $m \ge 2$, że $K^{SCH}(I;n) - K^*(I;n) \le 2(\max_{j \in J} p_j - 1)$. Wyniki tego typu umożliwiają przeprowadzenie analizy probabilistycznej algorytmu w stosunkowo prosty sposób. Wykorzystując tylko oszacowania górne wartości oczekiwanej statystyki ekstremalnej, można uzyskać następujące zgrubne wyniki. Niech $p_1, \ldots, p_n$ będą n.z.l. o tym samym rozkładzie a μ_p i σ_p^2 niech oznaczają, odpowiednio, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej p_1. Mamy wtedy dla m=1,

$$\frac{E(K^{SCH}(I;n))}{E(K^*(I;n))} < 1 + n^{-1} + (2n-1)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sigma_p}{\mu_p},$$

oraz dla $m \geqslant 2$,

$$\frac{E(K^{SCH}(I;n))}{E(K^{*}(I;n))} < 1 + \frac{2m}{n} + \frac{n-1}{n(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{2m\sigma_p}{\mu_p} .$$

6. Zagadnienie szeregowania zadań na pojedynczej maszynie z zadanymi czasami gotowości i funkcją celu $\sum C_j$

Rozważamy zagadnienie szeregowania zadań, w którym m=1 oraz dla każdego $j \in J$ zadany jest najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia wykonywania zadania r_j. Problem polega na znalezieniu uszeregowania dopuszczalnego minimalizującego $\sum_{j \in J} C_j$.

Problem ten, zapisywany jest w literaturze jako $1|r_j|\sum C_j$, jest NP-trudny, [16], i jak dotąd nie podano dla niego żadnych wyników analizy najgorszego przypadku.

W pracy [10] zaproponowano dla tego zagadnienia dwa algorytmy heurystyczne i przeprowadzono dla nich analizę probabilistyczną przy następujących założeniach: $p_1,\ldots,p_n$ są n.z.l.o jednakowym rozkładzie, $T_1,\ldots,T_{n-1}$, gdzie $T_i = r_{i+1} - r_i$, są n.z.l. o jednakowym rozkładzie, p_j i T_i są niezależne. Dla przypadku gdy $E(p_1) < E(T_1)$ zaproponowano

Algorytm I: Niech zadania ze zbioru J ponumerowane będą zgodnie z niemalejącymi r_j. Oznaczmy przez A(t) zbiór zadań, dla których $r_j \leqslant t$ i które do chwili t włącznie nie zostały wykonane, a przez S(t), czas jaki jest potrzebny do wykonania zadań ze zbioru A(t), liczony od chwili t. Niech $a = \lfloor \ln n \rfloor$.

/i/ Znajdź optymalne uszeregowanie zadań 1,...,a.

/ii/ Stosując algorytm SF /spośród zadań gotowych do wykonywania umieść jako pierwsze to, które ma najmniejsze p_j/ uszereguj zadania $i^* + 1,\ldots,i^* + b(i^*)$, rozpoczynając od chwili r_{i^*+1}; i^* spełnia warunek $1 \leqslant i^* \leqslant a$ i jest w specjalny sposób dobierane, patrz [10], natomiast $b(i^*)$ jest numerem zadania, dla którego łączny czas przestojów maszyny dla zadań $i^* + 1,\ldots,i^* + b(i^*)$ jest nie mniejszy od $S(r_{i^*})$.

/iii/ Przesuń zadania $i^* + 1,\ldots,i^* + b(i^*)$ w prawo tak, aby zlikwidować wszystkie przestoje maszyny.

/iv/ Zadania ze zbioru $A(r_{i^*})$ uszereguj stosując SF, rozpoczynając od chwili r_{i^*}.

/v/ Procedurę powtórz dla zadań $i^* + b(i^*) + 1,\ldots,i^* + b(i^*) + a$, itd.

Dla przypadku, gdy $E(p_1) > E(T_1)$ zaproponowano

Algorytm P

/i/ Znajdź uszeregowanie optymalne dla problemu z przerwaniami /jest to problem wielomianowy O(n log n)/.

/ii/ W uszeregowaniu otrzymanym w kroku /i/ połącz wszystkie przedziały czasu, w których wykonywane jest zadanie j $/j \in J/$, przesuwając do najwcześniejszego przedziału wszystkie pozostałe.

W [10] pokazano, że:

$$\Pr\{K^{I}(I;n) - K^{*}(I;n) \quad O(n(\ln\ln n)^{-a})\} > 1 - O[(\ln n)^{2} n^{-1}],$$

$$\Pr\{(K^{P}(I;n) - K^{*}(I;N))/K^{*}(I;n) \leq O(n^{-1})\} > 1 - O(n^{-1}) .$$

7. Uwagi końcowe

Dotychczasowe wyniki analizy probabilistycznej algorytmów heurystycznych cechuje duży rozrzut badanych wskaźników jakości. Utrwala się jednak tendencja do oceny własności asymptotycznych $E(K^{A}(I;n))/E(K^{*}(I;n))$ oraz ciągu $K^{A}(I;n) - K^{*}(I;n)$. Wyniki dotyczące zbieżności ciągu $K^{A}(I;n) - K^{*}(I;n)$ lub $K^{A}(I;n)/K^{*}(I;n)$, a w szczególności szybkości zbieżności są wyjątkowo cenne jako, że stanowią grupę najmocniejszych własności typu probabilistycznego. Należy jeszcze zauważyć, że mimo intensywnego rozwoju omawianej tu techniki oceny dokładności algorytmów, badania statystyczne wcale nie straciły racji bytu. Podobnie bowiem jak w analizie najgorszego przypadku, konstrukcja najgorszego przykładu pozwala ocenić osiągalność znalezionego górnego oszacowania dokładności, tak i tutaj badania statystyczne mogą być wskazówką tego czy znalezione górne ograniczenie badanego wskaźnika jest wystarczająco ścisłe.

LITERATURA

[1] J.Carlier; Scheduling jobs with release dates and tails on identical machines to minimize makespan, /praca przyjęta do druku w European J. Oper. Res., 1986/

[2] E.G.Coffman, Jr., G.N.Frederickson, G.S.Lueker; A Note on Expected Makespans for Largest-First Sequencing of Independent Tasks on Two Processors, Math. Oper. Res. 9 /1984/,260-266.

[3] E.G.Coffman, M.R.Garey, D.S.Johnson; Approximation Algorithms for Bin-Paking-An Updated Survey, Bell Laboratories, 1984.

[4] E.G.Coffman, Jr., K. So, M. Hofri, A.C. Yao; A stochastic Model of Bin Packing, Information and Control, 44 /1980/, 105-115.

[5] E.G.Coffman, E.N.Gilbert; On the expected relative performance of list Scheduling, Technical Memorandum, Bell Laboratories, Murray Hill, 1983.

[6] M.A.H.Dempster, M.L.Fisher, L.Jansen, B.J.Lageweg, J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan; Analytical Evaluation of Hierarchical Planning Systems. Oper. Res. 29 /1981/, 707-716.

[7] G.N.Frederickson; Probabilistic Analysis for Simple One-and Two - dimensional, Information Processing Letters, 11 /1980/, 156-161.

[8] J.B.G.Frenk, A.H.G.Rinnooy Kan; The asymptotic optimality of the LPT heuristic, Erasmus University, Rotterdam, 1982.

[9] M.R.Garey, D.S.Johnson; Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[10] P.G.Gazmuri; Probabilistic Analysis of a Machine Scheduling Problem, Math. Oper. Res. 10 /1985/, 328-339.

[11] R.L.Graham; Bounds for certain multiprocessing anomalies, Bell System Techn. J. 45 /1966/, 1563-1581.

[12] R.L.Graham; Bounds on multiprocessing timing anomalies, SIAM J. Appl. Math. 17 /1969/, 263-269.

[13] J.Grabowski, E.Nowicki, S.Zdrzałka; A block approach for single--machine scheduling with release dates and due dates, /praca przyjęta do druku w European J.Oper.Res., 1985/.

[14] D.S.Johnson, A.Demers, J.D.Ullman, M.R.Garey, R.L.Graham; Worst-Case Performance Bounds for Simple One-Dimensional Packing Algorithms, SIAM J. Comput. 3 /1974/, 299-325.

[15] R.Karp; Probabilistic Analysis of Partitioning Algorithms for the Traveling - Salesman Problem in the Plane. Math. Oper. Res. 2 /1977/, 209-224.

[16] E.L.Lawler, J.K.Lenstra. A.H.G.Rinnooy Kan; Recent Developments in Deterministic Sequencing and Scheduling, w Deterministic and Stochastic Scheduling. M.A.H. Dempster et al. /eds./, Reidel Publishing Co., Amsterdam 1982.

[17] R.Loulou; Tight Bounds and Probabilistic Analysis of Two Heuristics for Parallel Processor Scheduling, Math. Oper. Res. 9 /1984/,142-150.

[18] R.Loulou; Probabilistic Behaviour of Optimal Bin-Packing Solutions, Operations Research Letters, 3 /1984/, 129-135.

[19] G.S.Lueker; An Average-Case Analysis of Bin Packing with Uniformly Distributed Item Sizes, Technical Report 81, Department of Inform. Comput. Sci., University of California, Irvine 1982.

[20] Hoon Liong Ong, M.J.Magazine, T.S.Wee; Probabilistic Analysis of Bin Packing Heuristics, Oper. Res. 32 /1984/, 983-998.

[21] C.N.Potts; Analysis of a Heuristic for One Machine Sequencing with Release Dates and Delivery Times, Oper. Res. 28 /1980/, 1436-1441.

[22] S.Zdrzałka; On scheduling jobs on an assembly line, /w redakcji European J. Oper. Res., 1986/.

[23] Kowalowski H.i inni: Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych. WNT, Warszawa 1984

Recenzent: Doc dr h.inż.Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В КОНТЕЙНЕРЫ И РАСПИСАНИЯ - ОБЗОР

Р е з ю м е

В работе даётся обзор результатов вероятностного анализа эвристических алгоритмов для задачи упаковки в контейнеры и расписания. Указаны характеричтические подходы и обширная библиография.

PROBABILISTIC ANALYSIS OF HEURISTICS FOR BIN PACKING AND JOBS SCHEDULING PROBLEMS - A SURVEY

S u m m a r y

The paper presents a survey of results in the area of probabilistic analysis of heuristic algorithms for bin packing and jobs scheduling problems. W discuss probabilistic performance measures used in the analysis and show results for particular algorithms for bin packing problem, parallel identical machines scheduling problem, identical machines scheduling problem with release and due dates. W describe also characteristic approaches and give a wide bibliography.