ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol.894

Stanisław Zdrzałka
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechnika Wrocławska

SZEREGOWANIE ZADAŃ NA LINII MONTAŻOWEJ Z WIELOMA STANOWISKAMI KRYTYCZNYMI *

Streszczenie. W pracy sformułowano zagadnienie szeregowania zadań na linii montażowej z wieloma stanowiskami krytycznymi. Pokazano, że przy pewnych założeniach zagadnienie to jest równoważne modyfikacji wielowymiarowego problemu pakowania, w której występują przedmioty o dodatnich i ujemnych wymiarach. Wykazano, że problem jest NP-trudny oraz przedstawiono wyniki badań algorytmów heurystycznych dla problemu jedno i wielowymiarowego.

1. Wstęp

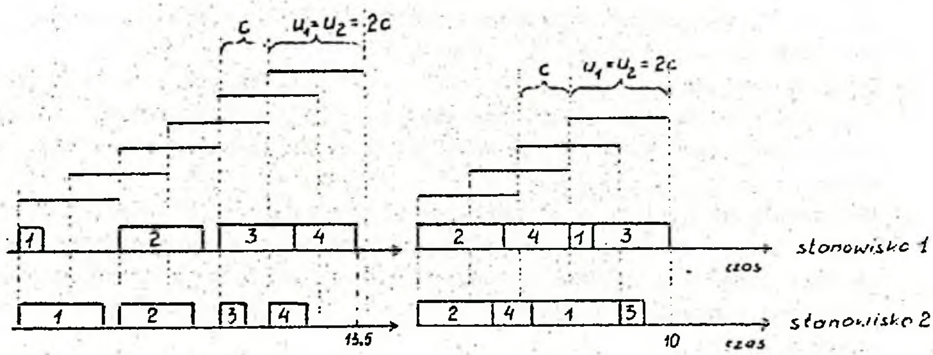
W pracy rozważamy zagadnienie szeregowania zadań na linii montażowej. Model proponowany w pracy dotyczy następującej sytuacji:

1) Na linii montażowej wykonywanych jest wiele rodzajów produktów, przy czym każdy z nich wymaga wykonania pewnej liczby operacji, różnych dla poszczególnych rodzajów produktów.
2) Operacje związane z wykonaniem każdego rodzaju produktu zostały przydzielone do stanowisk linii montażowej i dla każdego stanowiska znany jest łączny czas wykonywania wszystkich operacji każdego rodzaju produktu.
3) Dla dowolnego punktu linii montażowej czas pomiędzy przybyciem dwóch kolejnych produktów jest równy kc, gdzie k jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą a c, minimalnym odstępem czasu pomiędzy przybyciem dwóch kolejnych produktów; c nazywamy czasem cyklu i zakładamy, że jest on stały i znany.
4) Istnieje m stanowisk linii, ponumerowanych dalej przez $1,2,\ldots,m$, dla których czasy przebywania produktów na stanowiskach u_i, $i=1,\ldots,m$, spełniają warunek $u_i > c$, $i=1,\ldots,m$, oraz dla każdego stanowiska i istnieje produkt j, taki, że p_{ij}, łączny czas wykonywania operacji produktu j na stanowisku i, jest większy od czasu cyklu, $p_{ij} > c$. Zakładamy, że $p_{ij} \leqslant u_i$ dla każdego i oraz j. Opisane tu stanowiska $1,2,\ldots$ $\ldots,m$ nazywamy dalej krytycznymi.
5) W trakcie montażu produkty nie mogą zmieniać swoich pozycji na taśmie. Stąd odstępy czasowe pomiędzy przybyciem dwóch tych samych produktów na dowolne stanowisko są jednakowe; kolejność produktów w trakcie montażu nie ulega zmianie.

Przy przedstawionych założeniach kolejność oraz odstępy czasowe pomiędzy przybywaniem poszczególnych produktów na stanowiska linii montażowej

* praca była częściowo finansowana przez RP.I.02 "Teoria sterowania i optymalizacja ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych"

mają istotny wpływ na czas wykonania zadanej partii produktów (planu produkcji). Wpływ tych czynników uwidacznia się tylko na stanowiskach krytycznych i z tego względu, w dalszym ciągu ograniczymy się tylko do tych stanowisk. Ilustruje to rys. 1, gdzie założono, że do wykonania są cztery różne produkty, o numerach od 1 do 4, na linii montażowej znajdują się dwa stanowiska krytyczne i dla każdego z nich $u_i = 2c$. Na rys. 1 przedstawione są dopuszczalne harmonogramy wykonywania produktów na stanowiskach krytycznych 1 i 2 dla dwóch kolejności montażu. Dla kolejności ⟨1,2,3,4⟩ maksymalny czas wykonania wszystkich produktów na stanowiskach 1 i 2 wynosi 13.5 jednostek, dla kolejności ⟨2,4,1,3⟩, 10 jednostek. Zauważmy jeszcze, że dla kolejności ⟨1,2,3,4⟩ odstęp czasu pomiędzy przybyciem produktów 1 i 2 nie może wynosić c, ponieważ wtedy operacje produktu 2 na stanowisku 2 nie byłyby zakończone przed momentem, w którym produkt ten opuszcza stanowisko 2; harmonogram taki jest niedopuszczalny. Podobnie, gdyby dla produktów 2 i 3 odstęp ten był równy c, wówczas operacje produktu 3 na stanowisku 1 nie mogłyby się zakończyć przed momentem, w którym produkt 3 opuszcza stanowisko 1.



Rys. 1. Dopuszczalne harmonogramy wykonywania produktów na stanowiskach krytycznych 1 i 2 dla kolejności montażu ⟨1,2,3,4⟩ i ⟨2,4,1,3⟩.

Fig. 1. Feasible schedules of operations on critical stations 1 and 2 for sequences ⟨1,2,3,4⟩ and ⟨2,4,1,3⟩.

W pracy przedstawiamy formalny model zagadnienia szeregowania produktów na linii montażowej z wieloma stanowiskami krytycznymi, pokazujemy że postawiony problem optymalizacyjny jest silnie NP-trudny, pokazujemy związki tego zagadnienia ze znanymi problemami pakowania, jedno i wielowymiarowymi, i na koniec przedstawiamy kilka procedur heurystycznych wraz z analizą najgorszego przypadku.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór zadań $J = \{J_1,\dots,J_n\}$ oraz zbiór maszyn $M = \{M_1,\dots,M_m\}$. W dalszym ciągu, dla uniknięcia nadmiernej notacji, przez J oraz M oznaczać będziemy również zbiory indeksów odpowiednio, zadań oraz maszyn. Każdemu zadaniu J_j przyporządkowany jest ciąg operacji $O_{1j},O_{2j},\dots,O_{mj}$ wykonywanych kolejno, zgodnie z rosnącymi pierwszymi indeksami, na maszynach $M_1,M_2,\dots,M_m$. Zadania odpowiadają produktom wykonywanym na linii montażowej, natomiast maszyny, stanowiskom krytycznym. Czas wykonywania operacji O_{ij} wynosi p_{ij}; przerywanie wykonywania operacji nie jest dozwolone; każda maszyna może w danej chwili czasu wykonywać co najwyżej jedną operację. Dla każdego zadania J_j operacja O_{ij} musi być wykonywana w przedziale czasu $[v_i + r(j), v_i + r(j) + u_i]$, gdzie v_i, u_i są zadanymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, natomiast r jest funkcją wzajemnie jednoznaczną z J w zbiór $Q = \{r_k = (k-1)c : k \in Z_+\}$, gdzie Z_+ jest zbiorem dodatnich liczb całkowitych, a c, dodatnią liczbą rzeczywistą. Wielkości v_i, u_i oraz c mają następującą interpretację: v_i jest czasem, w którym zadanie (produkt) przebywa drogę od początku linii montażowej do i-tego stanowiska krytycznego, u_i jest czasem przebywania zadania na stanowisku i, natomiast c jest czasem cyklu. Funkcja r, zmienna decyzyjna, określa odstępy czasu, w których kolejne zadania pojawiają się na stanowisku i. Zauważmy, że dla każdego stanowiska (maszyny) jest ona taka sama.

Problem polega na znalezieniu funkcji r, dla której każda operacja O_{ij} wykonywana jest w przedziale czasu $[v_i + r(j), v_i + r(j) + u_i]$ oraz $\max_{j \in J} r(j)$ przyjmuje wartość minimalną.

Przyjęte kryterium odpowiada minimalizacji liczby cykli niezbędnych do wykonania wszystkich operacji przyporządkowanych do jednej maszyny (stanowiska krytycznego). Ponieważ v_i i u_i są stałe, kryterium to jest równoznaczne z minimalizacją liczby cykli niezbędnych do wykonania zadań ze zbioru J na wszystkich maszynach, a w przybliżeniu z dokładnością do u_m odpowiada ono minimalizacji czasu wykonania zadań ze zbioru J.

Formalnie zadanie to możemy postawić następująco. Niech $S_i : J \to R_+$, $i \in M$; $S_i(j) + v_i$ jest momentem rozpoczęcia wykonywania operacji O_{ij}. Oznaczmy $\mathcal{S} = (S_1,\dots,S_m)$. Funkcję $\mathcal{S}$ nazywamy uszeregowaniem dopuszczalnym (K-dopuszczalnym) jeżeli

(i) $S_i(j) = S_i(k) \Leftrightarrow j=k$, $S_i(j) < S_i(k) \Rightarrow S_i(j) + p_{ij} \leq S_i(k)$ dla każdego $i \in M$;

(ii) istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja r z J w Q (z J w zbiór $\{r_k = (k-1)c : k \in \{1,\dots,K\}\}$) taką, że dla każdego $i \in M$, $r(j) \leq S_i(j)$, $S_i(j) + p_{ij} \leq r(j) + u_i$.

Należy znaleźć uszeregowanie K-dopuszczalne, dla którego K jest minimalne.

Problem ten będziemy dalej oznaczać przez KMS.

W dalszym ciągu zdefiniujemy klasę uszeregowań dopuszczalnych, która zawsze zawiera uszeregowanie optymalne.

Niech permutacja π na zbiorze J określa kolejność wykonywania zadań - jest ona taka sama na każdej maszynie; przez $\pi(j)$ oznaczać będziemy zadanie, które znajduje się na pozycji j w permutacji π. Niech $\mathcal{S}^{\pi}$ będzie uszeregowaniem spełniającym warunki:

Dla każdego $i \in M$,

(i) $r(\pi(1)) = 0$, $S_i^{\pi}(\pi(1)) = 0$,

(ii) $r(\pi(j+1)) = r(\pi(j)) + l^{*}c$, $S_i^{\pi}(\pi(j+1)) = \max\{r(\pi(j+1)),$
$S_i^{\pi}(\pi(j)) + p_{i\pi(j)}\}$,

gdzie $l^{*} = \max_{i \in M} l_i$, oraz

$l_i = \min\{z \in Z_+ : \max\{S_i^{\pi}(\pi(j)) + p_{i\pi(j)}, r(\pi(j)) + zc\} +$
$p_{i\pi(j+1)} \leqslant r(\pi(j)) + zc + u_i\}$.

Łatwo można sprawdzić, że $\mathcal{S}^{\pi}$ jest uszeregowaniem dopuszczalnym. Oznaczmy przez $K(\mathcal{S})$ wartość funkcji celu dla $\mathcal{S}$.

<u>Lemat</u>. Niech $\hat{\mathcal{S}}$ będzie uszeregowaniem dopuszczalnym, w którym kolejność wykonywania zadań określona jest przez π. Wtedy

$$K(\mathcal{S}^{\pi}) \leqslant K(\hat{\mathcal{S}}).$$

Dowód wynika wprost z definicji $\mathcal{S}^{\pi}$ i uszeregowania dopuszczalnego. Z lematu wynika, że bez straty ogólności rozważań, możemy ograniczyć zbiór uszeregowań dopuszczalnych do zbioru wszystkich $\mathcal{S}^{\pi}$.

Następujące twierdzenie podaje warunki, przy których rozwiązanie postawionego problemu jest trywialne.

<u>Twierdzenie 1</u>. Jeżeli dla każdego $i \in M$ spełniony jest jeden z następujących warunków:

(i) $p_{ij} \leqslant c$ dla każdego $j \in J$,

(ii) $c=1$ oraz p_{ij}, $j \in J$, u_i są liczbami całkowitymi,

(iii) $c \leqslant p_{ij} \leqslant u_i - c$ dla każdego $j \in J$,

to K osiąga minimum dla dowolnego uszeregowania $\mathcal{S}$.

Dowód dla przypadku gdy $|M| = 1$ znajduje się w pracy [5], dla przypadku $|M| > 1$ przebiega on podobnie.

<u>3. Wielowymiarowy zmodyfikowany problem pakowania</u>

Dla $x,y \in R^s$ oznaczmy: $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i|$,

$\max\{x,y\} = (\max\{x_1,y_1\},\ldots,\max\{x_s,y_s\})$

Dany jest zbiór t przedmiotów o numerach ze zbioru $U = \{1,\dots,t\}$, przy czym każdemu przedmiotowi j przyporządkowany jest wektor liczbowy cech $a_j = (a_{1j},\dots,a_{sj}) \in R^s$, $-1 \leq a_{ij} \leq 1$, $i=1,\dots,s$; $j=1,\dots,t$. Dane są również pojemniki o numerach 1,2,..., każdy o pojemności wyrażonej za pomocą s-wymiarowego wektora jednostkowego (1,1,...,1). Niech δ będzie permutacją na zbiorze $X \subset U$ określającą kolejność wkładania przedmiotów ze zbioru X do pojemnika l. Przez $P_{l,\delta(j)}$ oznaczamy s-wymiarowy wektor określający poziom pojemnika l po zapakowaniu przedmiotów $\delta(1),\dots,\delta(j)$. Pojemnik pusty ma poziom $P_{l,\delta(0)} \equiv 0$, natomiast $P_{l,\delta(j)} = \max\{0, P_{l,\delta(j-1)} + a_{\delta(j)}\}$.

Należy znaleźć rozbicie zbioru U na L podzbiorów $U_1,\dots,U_L$ oraz permutacje $\delta_1,\dots,\delta_L$ na tych podzbiorach, takie, że

$$\|P_{l,\delta(j)}\| \leq 1 \text{ dla } l=1,\dots,L;\ j=1,\dots,|U_L|$$

oraz L jest minimalne.

Problem ten będziemy dalej oznaczać przez WZPP.

W przypadku, gdy $0 < a_{ij} \leq 1$, powyższy problem znany jest jako wielowymiarowy, lub wektorowy problem pakowania (WPP), natomiast gdy m=1 oraz $0 < a_{ij} \leq 1$, jest to klasyczny problem pakowania (PP), [1,2].

Następujące twierdzenie podaje związek między KMS a WZPP.

<u>Twierdzenie 2</u>. Niech c=1 oraz $u_i = 2c$ dla każdego $i \in M$. Niech K^* oznacza minimalną wartość funkcji celu w KMS, a L^*, minimalną liczbę pojemników w problemie WZPP, w którym t=n, s=m oraz $a_{ij} = p_{ij} - 1$. Wtedy

$$K^* = n + L^* - 1.$$

Założenie, że c=1 nie ogranicza ogólności twierdzenia ponieważ każdy problem KMS można trywialnie sprowadzić do przypadku, gdy c=1. Dowód twierdzenia dla przypadku jednowymiarowego (m=1) podany jest w [5].

<u>Twierdzenie 3</u>. Decyzyjna wersja problemu KMS, w którym wszystkie dane są liczbami naturalnymi lub wymiernymi jest silnie NP-zupełna.

<u>Dowód</u>: Łatwo można sprawdzić, że decyzyjna wersja KMS należy do klasy NP. Pseudowielomianowa transformowalność wersji decyzyjnej PP, która jest silnie NP-zupełna [2] do podproblemu KMS, w którym m=1 wynika z Twierdzenia 2.

Silna NP-zupełność postawionego problemu uzasadnia poszukiwanie "dobrych" metod heurystycznych dla jego rozwiązywania. Związek z problemami pakowania, Twierdzenie 2 oraz fakt, że dla jednowymiarowego problemu pakowania (PP) istnieją procedury heurystyczne o dokładności dla najgorszego przypadku poniżej 20% [1], stanowią zachętę do takich poszukiwań, przynajmniej dla problemu szeregowania z jedną maszyną. Z drugiej strony, wynik otrzymany przez Yao [3] dla wielowymiarowego problemu pakowania (WPP), że każdy "rozsądny" algorytm (to znaczy taki, który nie pozostawia wóch niepustych pojemników, jeżeli ich zawartość można zmieścić w jednym) o złożoności obliczeniowej $O(n \log n)$ posiada dokładność asymptotyczną dla najgorszego przypadku nie mniejszą niż m (razy optymalna wartość funkcji), gdzie m jest wymiarem problemu pakowania, nie obiecuje rewelacyjnych pod względem dokładności algorytmów dla wersji wielowymiarowej postawionego problemu.

4. Algorytmy heurystyczne dla problemu jednomaszynowego: Przypadek $u_i = 2c$

Rozpatrujemy jednomaszynowy problem KMS ($m=1$) z $c=1$. Algorytmy rozpatrywane w tym punkcie sformułowane są dla ekwiwalentnej postaci problemu KMS, to jest dla jednowymiarowego zmodyfikowanego problemu pakowania (ZPP), w którym $U = J$ oraz $a_j = p_j - 1$ dla $j \in U$; a_j i p_j są w tym przypadku skalarami. Mając dane rozwiązanie heurystyczne ZPP w postaci zbioru permutacji $\{\delta_1, \ldots, \delta_L\}$, uszeregowanie heurystyczne otrzymujemy biorąc $\mathcal{S}^{\delta}$, gdzie δ jest połączeniem permutacji $\delta_1, \ldots, \delta_L$, co zapisujemy dalej jako $\delta = \langle \delta_1, \ldots, \delta_L \rangle$. Zachodzi przy tym [5],

$$K(\mathcal{S}^{\delta}) \leqslant n + L - 1.$$

Dla uniknięcia nadmiernej notacji, w dalszym ciągu przez J oznaczamy również liczbę zadań ze zbioru J. Będziemy też mówić o "wkładaniu" zadań z listy J, zamiast przedmiotów z listy U, do pojemników. Pojemniki oznaczamy przez $B_1, B_2, \ldots$, a ich poziomy, odpowiednio, przez $P_1, P_2, \ldots$. Poziom pustego pojemnika wynosi 0.

<u>Algorytm NF</u>: Zadania wkładamy do pojemników w kolejności w jakiej występują one na liście J, rozpoczynając od pierwszego, które wkładamy do B_1. Niech j będzie kolejnym zadaniem, które należy umieścić w pojemniku, a B_l niepustym pojemnikiem o największym indeksie. Jeżeli $\|\max\{0, P_l + a_j\}\| \leqslant 1$, umieść zadanie j w B_l i podstaw $P_l := \max\{0, P_l + a_j\}$; w przeciwnym przypadku, umieść zadanie j w B_{l+1} i podstaw $P_{l+1} := \max\{0, a_j\}$.

<u>Algorytm NF-NF</u>: Utwórz listy J' i J'' zadań ze zbiorów $J' = \{j \in J : a_j > 0\}$ i $J'' = \{j \in J : a_j \leqslant 0\}$; kolejność zadań na listach jest dowolna. Zadania wkładamy do pojemników z każdej listy oddzielnie, rozpoczynając od pierwszego zadania z listy J', które wkładamy do B_1. Zadania z J' wkładamy do B_1 tak długo, aż natrafimy na zadanie j, dla którego $P_1 + a_j > 1$. Zadanie j pozostaje jako pierwsze na liście J' i następnie w B_1 umieszczone są zadania z J'', aż do momentu, w którym natrafimy na zadanie j, dla którego $\max\{0, P_1 + a_j\} = 0$. Zadanie j umieszczamy w B_1 i wracamy do listy J'. Procedura powtarza się tak długo, aż wyczerpie się jedna z list. Wtedy stosujemy algorytm NF do zadań powstałej listy.

<u>Algorytm FFD-NFD</u>: Utwórz listy J' i J'' zadań ze zbiorów $J' = \{j \in J : a_j > 0\}$, i $J'' = \{j \in J : a_j \leqslant 0\}$ uporządkowane wg malejących a_j.

Etap 1. Zastosuj algorytm FFD do zadań z listy J' (Algorytm FFD [1,2] umieszcza zadania kolejno, poczynając od pierwszego, które pakowane jest do B_1. Kolejne zadanie umieszczane jest w pojemniku o najmniejszym numerze spośród tych, w których ono się mieści). Uporządkuj niepuste pojemniki wg rosnących poziomów; w następnym etapie wykorzystywane będą tylko te pojemniki.

Etap 2. (Mówimy, że dwa pojemniki B' i B'' o poziomach P' i P'' są sklejane przez zadanie $j \in J''$, jeżeli zadanie j umieszczone jako ostatnie w B' spełnia: $\max\{0, P'+a_j\} + P'' \leq 1$). Zadania z listy J'' umieszczane są kolejno, rozpoczynając od pierwszego j_1, które umieszczane jest jako ostatnie w B_1; $P := \max\{0, P_1+a_{j_1}\}$. Niech zadanie j będzie kolejnym zadaniem z J'', które należy umieścić w pojemniku, a B_i mający poziom P_i, pojemnikiem o najmniejszym indeksie spośród tych, które nie zostały sklejone. Umieść zadanie j jako ostatnie w B_{i-1} i podstaw $P_i = \max\{0, P+a_j\}$. Jeżeli $P + P_i \leq 1$, wówczas pojemnik B_i jest sklejony (z B_{i-1}); podstaw $P := P + P_i$ i przejdź do następnego zadania. W przeciwnym przypadku przejdź do następnego zadania z listy J''.

Oznaczmy $D_{\gamma,h}$ zbiór wszystkich problemów konkretnych KMS, dla których $u_i = 2c$ oraz $|J'| = h$, $|J''| = \gamma h$, $\gamma \geq 0$. Niech $T_A(I)$ będzie wartością funkcji celu w KMS wygenerowaną przez algorytm A dla problemu konkretnego I, a $T^*(I)$ optymalną wartością funkcji celu dla I. Dokładność algorytmu A dla najgorszego przypadku problemów konkretnych ze zbioru $D_{\gamma,h}$ definiujemy następująco

$$R_A^{\gamma,h} = \sup_{I \in D_{\gamma,h}} \frac{T_A(I)}{T^*(I)}.$$

Dokładność asymptotyczna $R_A^{\gamma,\infty}$ dana jest przez

$$R_A^{\gamma,\infty} = \lim_{h\to\infty} R_A^{\gamma,h}.$$

Twierdzenie 4. Jeżeli $u_i = 2c$, to dla algorytmu NF

$$R_{NF}^{\gamma,h} \leq \begin{cases} \dfrac{(2+\gamma)h-1}{(1+\gamma)h}, & \gamma > \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2h}, \\[2ex] \dfrac{2(2+\gamma)h-2}{3h-3}, & \gamma \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2h}, \end{cases}$$

$$R_{NF}^{\gamma,h} \geq \begin{cases} \dfrac{(2+\gamma)h-1}{(1+\gamma)h}, & \gamma \geq \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{2(2+\gamma)h-2}{3h}, & \gamma \leq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

oraz dla algorytmu NF-NF,

$$R^{\gamma,h}_{NF-NF} \leqslant \begin{cases} \dfrac{(5+3\gamma)h+1}{(3+3\gamma)h}, & \gamma \geqslant \frac{1}{2} - \dfrac{2}{h}, \\ \dfrac{(12+2\gamma)h-6}{9h-12}, & \gamma \leqslant \frac{1}{2} - \dfrac{2}{h}, \end{cases}$$

$$R^{\gamma,m}_{NF-NF} \geqslant \begin{cases} \dfrac{(5+3\gamma)h-3}{(3+3\gamma)h}, & \gamma \geqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{(12+2\gamma)h-6}{9h}, & \gamma \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dowód twierdzenia można znaleźć w [6] . Dokładności asymptotyczne są następujące:

$$R^{\gamma,\infty}_{NF} = \begin{cases} \dfrac{2+\gamma}{1+\gamma}, & \gamma \geqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{4+2\gamma}{3}, & \gamma \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$R^{\gamma,\infty}_{NF-NF} = \begin{cases} \dfrac{5+3\gamma}{3+3\gamma}, & \gamma \geqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{12+2\gamma}{9}, & \gamma \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zauważmy, że maksymalne wartości $R^{\gamma,\infty}_{NF}$ i $R^{\gamma,\infty}_{NF-NF}$ po $\gamma \geqslant 0$ wynoszą odpowiednio $\frac{5}{3} = 1.666$ i $\frac{13}{9} = 1.444\ldots$, oraz $R^{0,\infty}_{NF} = R^{0,\infty}_{NF-NF} = \frac{4}{3}$. Rezultaty symulacji numerycznej podane są w tablicy 1.

A	γ	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	2.00
NF	E	10.2	12.7	14.2	17.4	16.8	15.1	5.4
	MAX	33.3	50.0	66.6	57.1	50.0	44.4	33.3
NF-NF	E	10.2	10.1	9.9	9.8	8.8	2.7	0
	MAX	33.3	38.8	44.4	39.0	33.3	29.6	22.2
FFD-NFD	E	1.4	2.2	4.2	5.7	6.5	2.1	0
	MAX	-	-	-	-	-	-	-

Tab. 1. Średnie dokładności (E) oraz wartości $(R^{\gamma,\infty}_{A}-1)\ 100\%$, oznaczone jako MAX, dla algorytmów NF, NF-NF, FFD-NFD; Dla każdego γ, wartość średnia wzięta jest ze 100 list, dla każdej z nich h=200, generowanych wg rozkładu jednostajnego.

Rezultaty dotyczące algorytmów NF i NF-NF mają przede wszystkim wartość poznawczą. Algorytm NF, najprostszy algorytm typu "on-line", nakazuje bowiem szeregowanie zadań w dowolnej kolejności, zatem wartość $R_{NF}' = 1.666...$ pokazuje jaki jest zakres zmian wartości funkcji celu dla postawionego problemu. Podobnie jest w przypadku NF-NF, gdzie następuje mieszanie zadań "krótkich" z "długimi". Algorytm FFD-NFD jest przykładem kombinacji dwóch znanych algorytmów dla problemu pakowania. Wykazuje on znacznie większą dokładność średnią, niestety analiza najgorszego przypadku dla tego algorytmu jest problemem bardzo trudnym.

5. Algorytmy heurystyczne dla problemu wielomaszynowego: Przypadek $u_i=2c$

Przedstawimy tu tylko jeden wynik, dotyczący algorytmu NF.

Dokładność dla najgorszego przypadku definiujemy teraz jako

$$R_{NF} = \sup_{I \in D} \frac{T_{NF}(I)}{T^{*}(I)},$$

gdzie D jest zbiorem wszystkich problemów konkretnych, dla których $u_i=2c$, $i \in M$.

Twierdzenie 5. Jeżeli $u_i=2c$, $i \in M$, to dla algorytmu NF, $R_{NF} = 2$.

Wynik ten, chociaż prosty do otrzymania, jest nieco zaskakujący, ponieważ wykazano [3], że dla wielowymiarowego problemu pakowania o wymiarze m, każdy "rozsądny" algorytm pakowania posiada dokładność dla najgorszego przypadku nie lepszą od m.

Podobnie jak w przypadku jednomaszynowym, symulacja numeryczna algorytmu NF oraz innych badanych algorytmów wykazała ich dużą średnią dokładność; dla najlepszego z badanych algorytmów nie przekraczała ona 10% przy wymiarach zadań generowanych wg rozkładu jednostajnego.

6. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono oraz zasygnalizowano wybrane wyniki badań nad sformułowanym dla potrzeb sterowania linią montażową w Zakładach Mechanicznych "Ursus" modelem szeregowania zadań na linii montażowej ze stanowiskami krytycznymi.

Z uwagi na to, że dla $u_i=2c$ występuje opisany w pracy związek badanego modelu z problemami pakowania, przede wszystkim badano algorytmy heurystyczne dla tego przypadku. Dalszych badań wymagają algorytmy dla sytuacji, gdy $u_i=kc$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz dla dowolnych u_i.

Jak się okazało analiza najgorszego przypadku była możliwa tylko dla najprostszych algorytmów, w przypadku bardziej wyrafinowanych staje się ona przedsięwzięciem wręcz karkołomnym. Potwierdzają się tu trudności jakie napotkano przy analizie algorytmów FFD i BFD dla problemu pakowania [1,2].

LITERATURA

[1] E.G.Coffman,M.R.Garey,D.S.Johnson; Approximation Algorithms for Bin-Packing -An Updated Survey , Bell Laboratories,1984.

[2] M.R.Garey,D.S.Johnson ;Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness , W.H.Freeman and Company , San Francisco,1979.

[3] A.C.Yao; New algorithms for bin packing,J.Assoc.Comput.Mach. 27 (1980), 207-227.

[4] S.Zdrzałka; Jednomaszynowy problem szeregowania zadań na linii montażowej ,Sympozjum : Zastosowania Teorii Systemów ,1985,Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo -Technicznej im.S. Staszica ,Nr 10?4,Kraków 1985.

[5] J.Grabowski,E.Nowicki,C. Smutnicki ,S.Zdrzałka ; Teoria i algorytmy rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej dla zagadnień kolejnościowych .Cz. III. Problemy szeregowania zadań na linii montażowej w ZM "Ursus",Raport Serii : Sprawozdania nr 20 /85, Wrocław 1985.

[6] Kowalowski H. i inni: Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych. WNT, Warszawa 1984.

Recenzent: Doc.dr h.inż.Jerzy Klamka
Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

ПРОБЛЕМА РАСПИСАНИЯ ЗАДАЧ НА СБОРОЧНОЙ ЛИНИИ СО МНОГИМИ КРИТИЧЕСКИМИ МЕСТАМИ

Р е з ю м е

В статье предоставлена проблема расписания задач при ограничениях характерных для сборочной линии со многими критическими местами. Доказывается , что проблема является сильно P - трудной и что она равносильна, при некоторых предположениях, проблеме многомерной упаковки в контейнеры. Приводится несколько эвристических алгоритмов и для некоторых из них описываются результаты анализа наихудшего случая.

SCHEDULING JOBS ON AN ASSEMBLY LINE WITH MULTIPLE CRITICAL WORK STATIONS

S u m m a r y

In the paper ,a problem of scheduling jobs on machines with constraints on release and deadlines characteristic for an assembly line with multiple critical work stations is formulated.It is assumed that each job consists of a chain of m operations which are to be processed on m machines , each on one , fixed machine.Each operation has to be executed entirely in the time interval of a given length , chosen from the set of feasible intervals.

The problem is to assign to each operation the time interval date ,deadline, such that each operation is executed entirely in its time interval and the release date of the last operation is minimum. It is shown the problem is strongly NP-hard and under certain assumptions ,equivalent to a modification of the multidimensional bin packing problem,in which items have possitive and negative sizes.A number of heuristic methods is proposed and for some of them,the result of worst case analysis are presented.