ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

BUDOWNICTWO

Z. 43
GLIWICE
1977

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP 1

2. PODSTAWY TEORII LINIOWEJ 7

3. WIĘZY PROWADZĄCE DO DWUWYMIAROWYCH PROBLEMÓW BRZEGOWYCH 10
3.1. Uogólnione równania równowagi i związki konstytutywne . 11
3.2. Równania przemieszczeniowe 13
3.3. Funkcje przemieszczeń 13
3.4. Zredukowane warunki nierozdzielności 16
3.5. Równania naprężeniowe 17

4. WIĘZY PROWADZĄCE DO ZAGADNIEŃ UOGÓLNIONYCH PSEUDOPŁASKICH STANÓW RÓWNOWAGI SPRĘŻYSTEJ . . 19

5. NIEKTÓRE PRZYPADKI SZCZEGÓLNE 25
5.1. Antypłaski stan odkształcenia 25
5.2. Płaski stan odkształcenia 27
5.3. Pseudopłaski stan równowagi, tarcze 29
5.4. Płyty 31

6. ZAGADNIENIA UOGÓLNIONYCH PSEUDOPŁASKICH STANÓW RÓWNOWAGI 35
6.1. Równania dla pierwszego przypadku 35
6.1.1. Rozwiązanie w postaci szeregu trygonometrycznego . . . 46
6.2. Równania dla drugiego przypadku 47

7. UWAGI KOŃCOWE 55
Literatura 57
Streszczenia 59

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 516

KAROL H. BOJDA

TEORIA UOGÓLNIONYCH PSEUDOPŁASKICH STANÓW RÓWNOWAGI SPRĘŻYSTEJ

GLIWICE 1977

Opiniodawcy:

Prof. dr hab. inż. Feliks Andermann

Prof. dr hab. inż. Czesław Woźniak

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

Zdzisław Trojan

SEKRETARZ REDAKCJI

Jan Znamirowski

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Druk wykonano z makiet dostarczonych przez autora

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 60+140 Ark. wyd. 2,4 Ark. druk. 4 Papier offsetowy kl. ,III 70x100, 70 g
Oddano do druku 22.3.1977 Podpis. do druku 22 03.1977 Druk zakończ. w marcu 1977
Zam. 416/77 Cena zł 6,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono dwuwymiarowe modele obliczeniowe dla szerokiej klasy zagadnień statyki liniowej teorii sprężystości. Zasadniczym celem pracy jest omówienie modeli umożliwiających otrzymanie efektywnych rozwiązań wielu istotnych zagadnień technicznych. Z tego powodu rozważania przeprowadzono w ramach teorii liniowej. Ponadto wiadomo, że jeżeli każdy wymiar ciała jest tego samego rzędu, to odkształcenia sprężyste i odpowiadające im przemieszczenia, dla większości materiałów konstrukcyjnych obecnie stosowanych, dość dokładnie spełniają założenia teorii liniowej. Oznacza to, że rozwiązania otrzymane w ramach tej teorii są wystarczająco dokładne dla potrzeb techniki. W klasycznych sformułowaniach teorii sprężystości przyjmuje się, że składowe wektora przemieszczenia są małe w porównaniu z każdym wymiarem ciała odkształcalnego, oraz że pierwsze pochodne przemieszczeń względem współrzędnych są bardzo małe w stosunku do jedności. Oprócz tych warunków oraz odpowiednich warunków regularności i pewnych warunków brzegowych nie wprowadza się żadnych dalszych ograniczeń dla wektora przemieszczenia. Prowadzi to do dobrze znanych równań liniowej teorii sprężystości [1] . Równania te mają złożoną postać, co często uniemożliwia uzyskanie rozwiązań szeregu ważnych problemów technicznych.

W związku z tym rozwinięto wiele przybliżonych metod obliczeniowych, np. metody różnic skończonych, elementów skończonych oraz wiele uproszczonych teorii, np. klasyczne teorie powłok, płyt, tarcz, prętów cienkościennych itd. W teoriach tych przyjmuje się szereg założeń upraszczających, często sprzecznych z podstawowymi założeniami klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych oraz sprzecznych ze sobą. W tym też sensie teorie te są, w wielu przypadkach wewnętrznie sprzeczne, a wyniki opierające się na tych teoriach nie mogą stanowić ilustracji zastosowania teorii sprężystości. Ponadto teorie te nie obejmują wielu interesujących zagadnień technicznych, dla których do tej pory nie zbudowano uproszczonych modeli obliczeniowych.

W ostatnim czasie opracowano i rozwinięto w pracach[2 - 10] i innych mechanikę analityczną kontinuum materialnego. Zagadnienia związane z tą teorią były poruszane również w pracach [11 - 17] . Teoria ta ujmuje w jednym schemacie formalnym różne dziedziny mechaniki, które do tej pory miały oddzielną specyfikę. Umożliwia formułowanie różnych technicznych teorii opisujących konstrukcje inżynierskie w sposób niesprzeczny z mechaniką trójwymiarowego ośrodka ciągłego oraz umożliwia formułowanie kryteriów oceny dokładności otrzymanych rozwiązań. Jest to teoria kontinuum, na którego ruchy, stany naprężenia itd. są narzucone pewne, niezależne od praw mechaniki i własności materiału, ograniczenia. Warunki ograniczające nazywa się więzami wewnętrznymi i brzegowymi, a ich postać analityczną równaniami definicyjnymi więzów wewnętrznych i brzegowych. Do więzów brzegowych zaliczamy także więzy zewnętrzne wynikające z warunków podparcia ciała.

Największe do tej pory znaczenie praktyczne mają więzy prowadzące do zagadnień jedno - lub dwuwymiarowych oraz więzy dyskretyzacyjne. Więzy prowadzące do zagadnień dwuwymiarowych omówiono, między innymi, w pracy [9]/str. 42 i dalsze/ w ramach teorii nieliniowej dla materiału prostego. Przedstawiono również zastosowania tych więzów do wyprowadzenia nieliniowych równań fizycznej powierzchni Cosseratów, do formułowania nieliniowych teorii powłok i płyt jako teorii konsystentnych z mechaniką trójwymiarowego ośrodka ciągłego oraz do zbudowania uproszczonych modeli obliczeniowych ciał z warstwą brzegową i z warstwą o charakterze inkluzji. W pracy [20] przedstawiono zastosowanie tego typu więzów w ramach teorii liniowej do wyprowadzenia dwuwymiarowych równań dla ciał pryzmatycznych, obciążonych na pobocznicy siłami o intensywności stałej w kierunku osi elementu. Otrzymany model nazwano pseudopłaskim stanem równowagi.

W tej pracy, przyjmując za punkt wyjścia liniowe równania więzów prowadzących do zagadnień dwuwymiarowych, wprowadzono uogólnione funkcje przemieszczeń i uogólnione funkcje naprężeń oraz podano zredukowane warunki nierozdzielności. Funkcje naprężeń i warunki nierozdzielności pozwoliły wyprowadzić równania naprężeniowe, opisujące dwuwymiarową liniową teorię trójwymiarowej deformacji ciała sprężystego. W zasadniczej części pracy wyprowadzono i omówiono dwuwymiarowe równania dla ciał pryzmatycznych, obciążonych na pobocznicy siłami o zmiennej intensywności, co stanowi istotne uogólnienie równań podanych w [20]. Otrzymane modele nazwano uogólnionymi pseudopłaskimi stanami równowagi sprężystej. Głównym problemem omówionym w pracy jest problem zależności postaci równań więzów od charak-

teru zmiany intensywności obciążeń w kierunku osi rozważanych elementów pryzmatycznych. Podane w pracy sposoby przyjmowania równań definicyjnych więzów prowadzą do modeli pozwalających rozwiązać szereg istotnych zagadnień inżynierskich z dostateczną, dla zastosowań technicznych, dokładnością.

W pracy stosowana jest konwencja sumacyjna, wskaźniki i, j, k, ... przebiegają ciąg 1, 2, 3, wskaźniki α, β, γ,... ciąg 1,2, a wskaźniki K, L,.., ciąg $1, 2, \ldots, n$.

2. PODSTAWY TEORII LINIOWEJ

Deformację ciała $\mathcal{B}$ zajmującego w stanie naturalnym w przestrzeni fizycznej, o której zakładamy, że jest przestrzenią euklidesową E^3, obszar $V \subset E^3$, opisywać będziemy wektorem przemieszczenia $\underline{w}$ o składowych

$$(2.1) \qquad (\Omega \ni (x^i) \to w_j(x^i) \in R) \in C^2(\Omega),$$

przy czym

$$\{x^i\} : V \to \Omega \subset R \times R \times R,$$

gdzie $\{x^i\}$ jest prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych.

Ponieważ w całej pracy stosować będziemy tylko prostokątne kartezjańskie układy współrzędnych, więc poziom wskaźnika nie ma znaczenia i wynika tylko z przyjętej konwencji sumacyjnej.

Zakładamy, że składowe wektora przemieszczenia w_i są małe w porównaniu z każdym wymiarem ciała $\mathcal{B}$ oraz że pierwsze pochodne przemieszczeń względem zmiennych x^i są bardzo małe w stosunku do jedności

$$w_{i,j} \ll 1.$$

Na mocy przyjętych założeń można utożsamić materialny i przestrzenny opis deformacji.

Zakładamy, że dla ciała $\mathcal{B}$ istnieje potencjał sprężysty

$$(2.2) \qquad V = \frac{1}{2} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl},$$

gdzie

$$(2.3) \qquad \varepsilon_{ij} = w_{(i,j)}.$$

Wielkości ε_{ij} są składowymi tensora małych odkształceń, a C^{ijkl} składowymi tensora sztywności sprężystej. Ujęcie pary wskaźników

w nawiasy okrągłe oznacza ich symetryzację.

Zatem tensor extra - naprężenia [21] określony jest wzorem

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad . \tag{2.4}$$

Stąd

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad . \tag{2.5}$$

Tensor ten wyraża reakcję materiału ciała $\mathcal{B}$ na stan odkształcenia opisany składowymi ε_{ij} .

Składowe zewnętrznych sił masowych i powierzchniowych oznaczać będziemy przez X^i i q^i , a składowe wewnętrznych sił masowych i powierzchniowych odpowiednio przez R^i i s^i . Siły X^i i q^i są obciążeniami zewnętrznymi, działającymi na ciało $\mathcal{B}$, natomiast siły R^i i s^i są reakcjami więzów wewnętrznych oraz więzów brzegowych. Siły X^i i R^i odniesione są do jednostki objętości. Dla rozważanych w tej pracy więzów modelowych, będących pewnymi hipotezami dotyczącymi przewidywanej deformacji ciała, reakcje R^i i s^i należy interpretować jako dodatkowe obciążenia masowe i powierzchniowe, którymi należy działać na ciało, aby deformowało się ono zgodnie z postulowanymi więzami. To znaczy, że pod wpływem sił $X^i + R^i$, $q^i + s^i$ ciało deformuje się zgodnie z przyjętymi więzami modelowymi. Zatem równania równowagi wewnętrznej mają postać

$$\begin{aligned} &\sigma^{ji}{}_{,j} + X^i + R^i = 0 \quad , \\ &\sigma^{[ij]} = 0 \, , \quad x^i \in \Omega \quad , \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie ujęcie pary wskaźników w nawiasy prostokątne oznacza ich alternację.

Natomiast na brzegu $\partial\Omega$ muszą być spełnione warunki

$$\sigma^{ji} n = q^i + s^i \, , \quad x^i \in \partial\Omega \tag{2.7}$$

gdzie symbole n_j oznaczają składowe wektora jednostkowego normalnego do $\partial\Omega$.

Równania definicyjne więzów wewnętrznych przyjmujemy w postaci

$$(2.8) \qquad f_r(x^i, w_i, w_{i,j}, w_{i,jk}, \ldots) = 0 \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, N ,$$

zakładając, że funkcje f_r są liniowe względem argumentów w_i, $w_{i,j}$, ... Zakładamy ponadto, że więzy są idealne [9], to znaczy, że wielkości R^i i s^i spełniają związek

$$(2.9) \qquad \int_{\Omega} R^i \delta w_i \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} s^i \delta w_i \, d(\partial\Omega) = 0 \quad ,$$

dla każdego układu przemieszczeń wirtualnych, zgodnych z więzami (2.8) oraz ewentualnymi więzami brzegowymi. Zatem związek (2.9) wyraża zasadę, że praca sił reakcji więzów na przemieszczeniach wirtualnych jest równa zeru. Jest to, rozszerzona na teorię kontinuum materialnego, zasada, którą przyjmuje się powszechnie w klasycznej mechanice analitycznej układów punktów materialnych /por. np. [18], str. 14/.

Należy jednak zaznaczyć, że w klasycznej mechanice analitycznej układów punktów materialnych zasadę idealności więzów przyjmuje się jako postulat. Natomiast w mechanice analitycznej kontinuum materialnego zasada idealności więzów jest twierdzeniem teorii w przypadku, w którym jako podstawowy aksjomat przyjmuje się zasadę prac przygotowanych.

3. WIĘZY PROWADZĄCE DO DWUWYMIAROWYCH PROBLEMÓW BRZEGOWYCH

Więzy (2.8) opisane są za pomocą liniowych równań różniczkowych rzędu m dla funkcji w_i. Więzy te nazywa się więzami m- tego rzędu /por. np. [9] str. 8/. Podobnie jak w pracy [9], przez wprowadzenie nowych niewiadomych funkcji u_K, równania (2.8) można przedstawić w postaci

$$f_r(x^i, w_i, w_{i,j}, u_K, u_{K,j}) = 0 \quad . \tag{3.1}$$

Równania (3.1) mogą być przyjęte jako równania definicyjne więzów wewnętrznych równań w tych przypadkach, w których nie dają się one sprowadzić do więzów m-tego rzędu.

Przyjmujemy dalej, że obszar Ω da się przedstawić w postaci

$$\Omega = \Pi \times L \quad ,$$

przy czym

$$x^\alpha \in \Pi \subset R \times R \ , \ x^3 \in L = [l_0, l_1] \subset R \ .$$

Można zatem, tak jak w pracy [9] / str. 42/, rozważać więzy opisane następującymi równaniami definicyjnymi:

$$w_i(x^j) - A_i^K(x^j)\, u_K(x^\alpha) = 0 \ , \tag{3.2}$$

gdzie A_i^K są znanymi funkcjami

$$(\Omega \ni (x^j) \to A_i^K(x^j) \in R) \in C^2(\Omega) \ ,$$

a u_K nazywamy współrzędnymi uogólnionymi

$$(\Pi \ni (x^\alpha) \to u_K(x^\alpha) \in R) \in C^2(\Pi) \ .$$

Są to liniowe równania więzów prowadzących do dwuwymiarowych problemów brzegowych. Można je nazwać więzami rzędu pierwszego, bo równania (3.2) nie zawierają pochodnych funkcji uogólnionych.

Oprócz więzów (3.2) przyjmujemy więzy brzegowe w postaci

$$u_K(x^\alpha) = \varphi_K(x^\alpha) \ , \quad x^\alpha \in \tilde{\partial}\Pi \subset \partial\Pi \ , \tag{3.3}$$

gdzie φ_K są danymi funkcjami na części $\overset{\circ}{\partial}\Pi$ brzegu $\partial\Pi$.
Zgodnie z (3.2) zachodzi wzór

$$\delta w_i = A_i^K \delta u_K \ , \ x^\alpha \in \Pi \ , \ x^j \in \Omega \ , \tag{3.4}$$

a zgodnie z (3.3)

$$\delta u_K = 0 \ , \ x^\alpha \in \overset{\circ}{\partial}\Pi \ . \tag{3.5}$$

3.1. <u>Uogólnione równania równowagi i związki konstytutywne</u>

Podstawiając do (2.9) wyrażenia (3.4) oraz

$$\begin{aligned} R^i &= -X^i - \sigma^{ji}{}_{,j} \ , \ x^i \in \Omega \ , \\ s^i &= \sigma^{ji} n_j - q^i \ , \ x^i \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.6}$$

po formalnych przekształceniach i wykorzystaniu lemmatu du Bois - Reymonda, dochodzimy do następujących uogólnionych równań równowagi:

$$H^{K\alpha}{}_{,\alpha} + h^K + f^K = 0 \ , \ x^\alpha \in \Pi \tag{3.7}$$

oraz uogólnionych warunków brzegowych

$$H^{K\alpha} \overset{\circ}{n}_\alpha = Q^K \ , \ x^\alpha \in \overset{\circ}{\partial}\Pi = \partial\Pi \setminus \overset{\circ}{\partial}\Pi \ , \tag{3.8}$$

gdzie wielkości $H^{K\alpha}$ i h^K są uogólnionymi naprężeniami, a $\overset{\circ}{n}_\alpha$ są składowymi wektora jednostkowego normalnego do $\partial\Pi$.
Uogólnione naprężenia $H^{K\alpha}$ i h^K określone są następującymi równaniami konstytutywnymi:

$$\begin{aligned} H^{K\alpha} &= \frac{\partial W}{\partial u_{K,\alpha}} \ , \\ h^K &= -\frac{\partial W}{\partial u_K} \ , \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie W jest zredukowanym potencjałem sprężystym

$$W = \int_{l_0}^{l_1} V\, dx^3 \tag{3.10}$$

W rozważanym przypadku potencjał W jest jednorodną kwadratową funkcją zmiennych konstytutywnych u_K i $\gamma_{K\alpha} = u_{K,\alpha}$

$$W = \frac{1}{2} D^{K\alpha L\beta} \gamma_{K\alpha} \gamma_{L\beta} + D^{K\alpha L} \gamma_{K\alpha} u_L + \frac{1}{2} D^{KL} u_K u_L \tag{3.11}$$

Wielkości $D^{K\alpha L\beta}$, $D^{K\alpha L}$, D^{KL} charakteryzują zarówno własności sprężyste materiału jak i własności więzów (3.2).

Wielkości te określone są wzorami

$$D^{K\alpha L\beta} = \int_{l_0}^{l_1} C^{i\alpha j\beta} A_i^K A_j^L dx^3 ,$$

$$D^{K\alpha L} = \int_{l_0}^{l_1} C^{i\alpha jm} A_i^K A_{j,m}^L dx^3 , \tag{3.12}$$

$$D^{KL} = \int_{l_0}^{l_1} C^{ijmn} A_{i,j}^K A_{m,n}^L dx^3 .$$

Z (3.11) wynikają następujące liniowe równania konstytutywne:

$$H^{K\alpha} = D^{K\alpha L} \gamma_{L\beta} + D^{K\alpha L} u_L ,$$

$$h^K = -D^{L\beta K} \gamma_{L\beta} - D^{KL} u_L . \tag{3.13}$$

Występujące w (3.7) i (3.8) uogólnione obciążenia f^K i Q^K określone są wzorami

$$f^K = \int_{l_0}^{l_1} X^i A_i^K dx^3 + (q^i A_i^K)\Big|_{x^3=l_0} + (q^i A^K)\Big|_{x^3=l_1} , \tag{3.14}$$

$$Q^K = \int_{l_0}^{l_1} q^i A_i^K dx^3 .$$

Wszystkie wielkości występujące w równaniach (3.7), (3.8) i (3.13) są funkcjami tylko dwóch zmiennych x^{α}. Zatem równania te opisują dwuwymiarową liniową teorię trójwymiarowej deformacji ciała sprężystego, zgodnej z więzami (3.2) i (3.3).

3.2. Równania przemieszczeniowe

Znajomość równań konstytutywnych pozwala już na wyrażenie równań równowagi (3.7) przez współrzędne uogólnione. Jeżeli zatem do równań (3.7) wstawimy prawe strony (3.13) a dalej zmienne konstytutywne $\gamma_{K\alpha}$ wyrazimy przez pochodne współrzędnych uogólnionych, to w rezultacie otrzymamy układ n równań

$$(3.15) \qquad (D^{K\alpha L\beta}u_{L,\beta}+D^{K\alpha L}u_L)_{,\alpha}-D^{L\beta K}u_{L,\beta}-D^{KL}u_L+f^K=0\ ,\ x^{\alpha}\in\Pi\ .$$

Równania (3.15) stanowią układ liniowych równań przemieszczeniowych.

Do równań (3.15) należy dodać następujące warunki brzegowe:

$$(3.16) \qquad (D^{K\alpha L\beta}u_{L,\beta}+D^{K\alpha L}u_L)\mathring{n}_{\alpha}=Q^K\ ,\ x^{\alpha}\in\mathring{\partial}\Pi\ ,$$

$$u_K=\varphi_K\ ,\ x^{\alpha}\in\tilde{\partial}\Pi\ .$$

3.3. Funkcje przemieszczeń

Wprowadzając funkcje przemieszczeń można sprowadzić złożony układ równań przemieszczeniowych do równań o prostej strukturze. Przydatny w teorii sprężystości sposób rozwikłania układu równań różniczkowych cząstkowych przedstawiono w prac [19]. Sposób ten można stosować tylko do równań liniowych o stałych współczynnikach. Zakładając, że ciało jest jednorodne oraz że funkcje A_i^K zależą najwyżej od zmiennej x^3, równania (3.15) można przedstawić w postaci:

$$(3.17)\qquad D^{K\alpha L\beta}u_{L,\alpha\beta}+(D^{K\alpha L}-D^{L\alpha K})u_{L,\alpha}-D^{KL}u_L+f^K=0\ .$$

W tym przypadku wielkości $D^{K\alpha L\beta}$, $D^{K\alpha L}$ i D^{KL} są stałe. Jest to przypadek szczególny, lecz znajdujący dość szerokie zastosowanie w praktyce.

Wprowadzając operatory

$$(3.18)\qquad L^{KL}=D^{K\alpha L\beta}\partial_\alpha\partial_\beta+2D^{[K(\alpha)L]}\partial_\alpha-D^{KL}\ ,\quad \partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ ,$$

równania (3.17) zapiszemy w postaci

$$(3.19)\qquad L^{KL}u_L+f^K=0\ .$$

Ze wzoru (3.18) wynika, że operatory L^{KL} są przemienne oraz liniowe.

Jeżeli więc

$$\psi_1,\psi_2\in\left\{\psi:(\psi:\Pi\to R)\right\}\ ,$$

$$\alpha_1,\alpha_2\in R\ ,$$

to

$$\bigwedge_{K,L}[L^{KL}(\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2)=\alpha_1L^{KL}\psi_1+\alpha_2L^{KL}\psi_2]$$

Zatem wyrażając współrzędne uogólnione u_K przez funkcje przemieszczeń

$$(F^K:\Pi\to R)\in C^{2n}(\Pi)$$

w następujący sposób:

$$(3.20)\qquad u_M=\det[L^{KL}]_M\ ,$$

otrzymamy równania

$$(3.21) \qquad \det[L^{KL}]F^M + f^M = 0 \ ,$$

gdzie $[L^{KL}]$ jest macierzą o wyrazach L^{KL}, macierz $[L^{KL}]_M$ powstaje z macierzy $[L^{KL}]$ przez zastąpienie M-tej kolumny wektorem $[F^K]$.

Układ (3.21) składa się z n równań, z których każde zawiera tylko jedną niewiadomą funkcję F^K.

Liczbę niewiadomych oraz równań można w wielu przypadkach zredukować. Oznaczmy przez L^K_Λ endomorfizmy przemienne z operatorami L^{KL}

$$L^K_\Lambda : C^m(\Pi) \to C^{2n}(\Pi) \ , \qquad \Lambda = 1,2,\ldots,\bar{n} < n \ ,$$

takie, że

$$\bigwedge_{K,\Lambda} \left(\left\{ \psi = 0 \right\} \subset \operatorname{Ker} L^K_\Lambda \right) \ , \quad m = f(L^K_\Lambda) \ ,$$

gdzie $\operatorname{Ker} L^K_\Lambda$ jest jądrem L^K_Λ

Jeżeli można określić takie funkcje

$$g^\Lambda : \Pi \to R \ ,$$

że

$$f^K = L^K_\Lambda g^\Lambda \ ,$$

to wyrażając F^K przez nowe funkcje przemieszczeń w następujący sposób:

$$F^K = L^K_\Lambda \Phi^\Lambda \ ,$$

otrzymamy równania

$$\det[L^{KL}]\Phi^\Lambda + g^\Lambda = 0 \ .$$

Współrzędne uogólnione obliczamy w tym przypadku ze wzoru

$$u_K = L^L_\Lambda \left| [L^{MN}] \right|_{LK} = \det[L^{MN}]_{K\Lambda} \Phi^\Lambda \ ,$$

gdzie $\left|\left[L^{MN}\right]\right|_{LK}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu L^{LK} w macierzy $\left[L^{LK}\right]$, macierz $\left[L^{MN}\right]_{K\Lambda}$ powstaje z macierzy $\left[L^{MN}\right]$ przez zastąpienie K-tej kolumny wektorem $\left[L^{L}_{\Lambda}\right]$.

3.4. Zredukowane warunki nierozdzielności

Podobnie jak w klasycznej teorii sprężystości, zmienne konstytutywne nie są niezależne. W rozważanym przypadku wielkości te muszą spełniać równania

$$\gamma_{K[\alpha,\beta]} = 0 \,,$$

(3.22)

$$u_{K,\alpha} - \gamma_{K\alpha} = 0 \,, \qquad x^{\alpha} \in \Pi \,.$$

Są to zredukowane równania nierozdzielności, które można nazwać także zredukowanymi równaniami geometrycznej zgodności.

Warunki nierozdzielności mają postać (3.22) tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne uogólnione u_K i wielkości $\gamma_{K\alpha}$ są zmiennymi konstytutywnymi. Dla tych współrzędnych uogólnionych, które nie są zmiennymi konstytutywnymi równania $(3.22)_2$, mogą być związkami geometrycznymi. Jeżeli niektóre spośród współrzędnych uogólnionych są wprost przemieszczeniami, to również odpowiadające im wielkości $\gamma_{K\alpha}$ nie są zmiennymi konstytutywnymi. Wynika to z faktu, że potencjał sprężystości nie zależy bezpośrednio ani od współrzędnych wektora przemieszczenia, ani od częstości niesymetrycznej tensora, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe składowych wektora przemieszczenia. Wynika stąd, że poprawne określenie postaci warunków nierozdzielności dla różnych przypadków wymaga szczegółowej analizy rozważanego zagadnienia i może stanowić przedmiot oddzielnego opracowania.

Warunki nierozdzielności dla przypadku, w którym $A_1^1 = A_2^2 = 1$, $A_3^3 = \xi(x^3)$ a pozostałe funkcje A_i^K są równe zeru podano w pracy [17]. W tym przypadku współrzędne uogólnione u_α są przemieszczeniami, zatem zmiennymi konstytutywnymi są tylko wielkości

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{(\alpha,\beta)}, \quad u_3, \quad \gamma_{3\alpha}.$$

Stąd warunki nierozdzielności mają postać

$$\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0, \quad u_{3,\alpha} - \gamma_{3\alpha} = 0, \quad \gamma_{3[\alpha,\beta]} = 0,$$

gdzie $\epsilon_{\alpha\beta}$ jest symbolem Ricci'ego.

3.5. Równania naprężeniowe

Równania równowagi (3.7) będą tożsamościowo spełnione, jeżeli naprężenia uogólnione wyrazimy przez funkcje

$$(3.23) \qquad \begin{aligned} &(\Pi \ni (x^\alpha) \to \Phi^K(x^\alpha) \in R) \in C^2(\Pi), \\ &(\Pi \ni (x^\alpha) \to \Psi^{K\beta}(x^\alpha) \in R) \in C^2(\Pi), \end{aligned}$$

w następujący sposób:

$$(3.24) \qquad \begin{aligned} H^{K\alpha} &= \epsilon^{\alpha\beta}(\Phi^K{}_{,\beta} + \epsilon_{\beta\gamma}\Psi^{K\gamma}), \\ h^K &= \Psi^{K\alpha}{}_{,\alpha} - f^K. \end{aligned}$$

Funkcje Φ^K i $\Psi^{K\alpha}$ można nazwać uogólnionymi funkcjami naprężeń.

Związki odwrotne do (3.13) mają postać

$$(3.25) \qquad \begin{aligned} \gamma_{K\alpha} &= \tilde{D}_{K\alpha L\beta} H^{L\beta} - \tilde{D}_{K\alpha L} h^L, \\ u_K &= \tilde{D}_{L\beta K} H^{L\beta} - \tilde{D}_{KL} h^L. \end{aligned}$$

Zatem podstawiając prawe strony (3.24) do (3.25), a uzyskane wyrażenia do warunków nierozdzielności (3.22), otrzymamy równania naprężeniowe omawianej teorii

$$\epsilon^{\alpha\mu}[\mathring{D}_{K\alpha L}{}^{\gamma}(\Phi^{L}{}_{,\gamma}+\epsilon_{\gamma\delta}\Psi^{L\delta})-\tilde{D}_{K\alpha L}\Psi^{L\beta}{}_{,\beta}+\tilde{D}_{K\alpha L}f^{L}]_{,\mu}=0 \quad ,$$

$$(3.26)\quad [\mathring{D}_{L}{}^{\gamma}{}_{K}(\Phi^{L}{}_{,\gamma}+\epsilon_{\gamma\delta}\Psi^{L\delta})-\tilde{D}_{KL}\Psi^{L\beta}{}_{,\beta}+\tilde{D}_{KL}f^{L}]_{,\alpha}+$$

$$+\tilde{D}_{K\alpha L}\Psi^{L\beta}{}_{,\beta}-\mathring{D}_{K\alpha L}{}^{\gamma}(\Phi^{L}{}_{,\gamma}+\epsilon_{\gamma\delta}\Psi^{L\delta})-\tilde{D}_{K\alpha L}f^{L}=0 \quad , \; x^{\alpha}\in\Pi \quad ,$$

gdzie

$$\mathring{D}_{K\alpha L}{}^{\gamma}=\epsilon^{\beta\gamma}\tilde{D}_{K\alpha L\beta} \quad , \quad \mathring{D}_{L}{}^{\gamma}{}_{K}=\epsilon^{\beta\gamma}\tilde{D}_{L\beta K}$$

Równania naprężeniowe są szczególnie użyteczne w przypadkach, w których na całym brzegu $\partial\Pi$ zadane są warunki (3.8) . Warunki te mają postać następującą:

$$\epsilon^{\alpha\beta}(\Phi^{K}{}_{,\beta}+\epsilon_{\beta\gamma}\Psi^{K\gamma})\mathring{n}_{\alpha}=Q^{K} \quad , \quad x^{\alpha}\in\partial\Pi \; .$$

W tych przypadkach, w których niektóre spośród wielkości h^{K} są tożsamościowo równe zeru oraz w których pewna część kwadratowa macierzy $[H^{K\alpha}]$ jest symetryczna, związki (3.24) należy odpowiednio zmodyfikować. Przykład takich zmodyfikowanych związków znaleźć można w cytowanej już pracy [17] .

4. WIĘZY PROWADZĄCE DO ZAGADNIEŃ UOGÓLNIONYCH PSEUDOPŁASKICH STANÓW RÓWNOWAGI SPRĘŻYSTEJ

Więzy rozważane w tym punkcie są przypadkiem szczególnym więzarów (3.2). Omawiamy je ze względu na ich duże znaczenie praktyczne. Równania dla wszystkich dalej rozważanych przypadków będą wynikać bezpośrednio z równań wyprowadzonych w tym punkcie.

Funkcje A_i^K przyjmujemy w postaci

$$A_i^K(x^j) = \delta_\alpha^K \delta_i^\alpha \xi_{,3}(x^3) + \delta_3^K \delta_i^3 \xi(x^3) + \delta_\alpha^{K-3} \delta_i^\alpha \eta(x^3) + \delta_3^{K-3} \delta_i^3 \eta_{,3}(x^3) \quad , \tag{4.1}$$

gdzie ξ i η są znanymi funkcjami zmiennej x^3 .

Wprowadzamy także następujące wygodne oznaczenia dla współrzędnych uogólnionych:

$$u_K = \delta_K^\alpha u_\alpha + \delta_K^3 v + \delta_{K-3}^\alpha \tilde{u}_\alpha + \delta_{K-3}^3 \tilde{v} \quad . \tag{4.2}$$

We wzorach (4.1) i (4.2) δ_i^K jest symbolem Kroneckera.

Podstawiając prawe strony (4.1) i (4.2) do równań (3.2) otrzymamy

$$\begin{aligned} &w_\alpha(x^i) - u_\alpha(x^\beta)\xi_{,3}(x^3) - \tilde{u}_\alpha(x^\beta)\eta(x^3) = 0 \quad , \\ &w_3(x^i) - v(x^\beta)\xi(x^3) - \tilde{v}(x^\beta)\eta_{,3}(x^3) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Równania więzów (4.3) zawierają sześć współrzędnych uogólnionych. W niektórych szczególnych przypadkach współrzędne te można prosto zinterpretować.

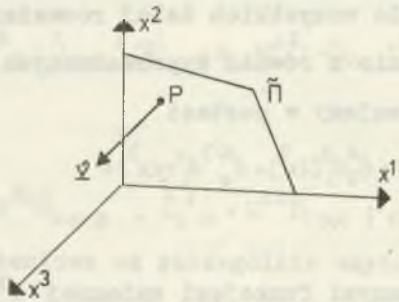
W przypadku, w którym

$$\xi = \eta = x^3 \quad ,$$

modelem obliczeniowym opisanym więzami (4.3) jest obszar na płaszczyźnie $\Pi = \{x^j \in \Omega : x^3 = 0\}$, najeżony wektorami normalnymi $\underline{\nu}$. Jest to zatem fizyczna powierzchnia Cosseratów, której elementami są punkty $P \in \Pi$ wraz z jednym wektorem kie-

runkowym $\underline{\nu}$, $(P, \underline{\nu}) \in \tilde{\Pi}$.

Model ten przedstawia rys. 1.



Rys. 1.

W tym przypadku współrzędne uogólnione u_α i $\tilde{v}$ są przemieszczeniami punktu P , współrzędne $\tilde{u}_\alpha$ są kątami obrotu wektora $\underline{\nu}$ w płaszczyznach równoległych do $\Pi_\alpha = \{x^j : x^\alpha = 0\}$, a współrzędna v oznacza zmianę długości wektora $\underline{\nu}$. Dla innych przypadków interpretacja współrzędnych uogólnionych może być inna; zależy to od postaci funkcji ξ i η . Dalsze rozważania przeprowadzimy dla ciał izotropowych, dla których

$$C^{ijkl} = \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) + \lambda\delta^{ij}\delta^{kl} \tag{4.4}$$

gdzie μ i λ są stałymi Lamego.

Pozostałe wielkości oznaczymy podobnie jak współrzędne uogólnione

$$\begin{aligned}
H^{K\alpha} &= \delta^K_\beta H^{\beta\alpha} + \delta^K_3 M^\alpha + \delta^{K-3}_\beta \tilde{H}^{\beta\alpha} + \delta^{K-3}_3 \tilde{M}^\alpha , \\
h^K &= \delta^K_\alpha h^\alpha + \delta^K_3 m + \delta^{K-3}_\alpha \tilde{h}^\alpha + \delta^{K-3}_3 \tilde{m} , \\
f^K &= \delta^K_\alpha f^\alpha + \delta^K_3 k + \delta^{K-3}_\alpha \tilde{f}^\alpha + \delta^{K-3}_3 \tilde{k} , \\
Q^K &= \delta^K_\alpha Q^\alpha + \delta^K_3 T + \delta^{K-3}_\alpha \tilde{Q}^\alpha + \delta^{K-3}_3 \tilde{T}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Podstawiając (4.5) do (3.7) i (3.8) otrzymamy następujące uogólnione równania równowagi oraz warunki brzegowe:

$$
(4.6)\qquad
\begin{aligned}
&H^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} + h^{\beta} + f^{\beta} = 0 \,,\\
&M^{\alpha}{}_{,\alpha} + m + k = 0 \,,\\
&\tilde{H}^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} + \tilde{h}^{\beta} + \tilde{f}^{\beta} = 0 \,,\\
&\tilde{M}^{\alpha}{}_{,\alpha} + \tilde{m} + \tilde{k} = 0 \,, \qquad x^{\alpha} \in \Pi \,,
\end{aligned}
$$

$$
(4.7)\qquad
\begin{aligned}
&H^{\beta\alpha}\,\mathring{n}_{\alpha} = Q^{\beta} \,, \qquad M^{\alpha}\mathring{n}_{\alpha} = T \,,\\
&\tilde{H}^{\beta\alpha}\,\mathring{n}_{\alpha} = \tilde{Q}^{\beta} \,, \qquad \tilde{M}^{\alpha}\mathring{n}_{\alpha} = \tilde{T} \,, \qquad x^{\alpha} \in \mathring{\partial}\Pi \,.
\end{aligned}
$$

Podstawiając natomiast (4.4) i (4.1) do (3.12), a uzyskane wyrażenia do (3.13) i biorąc pod uwagę oznaczenia $(4.5)_{1,2}$ otrzymamy, dla rozważanego przypadku, równania konstytutywne

$$
(4.8)\qquad
\begin{aligned}
H^{\alpha\beta} &= \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta}\, 2\mu(u_{(\gamma,\delta)}B_{12} + \tilde{u}_{(\gamma,\delta)}C_{11}) + \delta^{\alpha\beta}\lambda\,[(u^{\gamma}{}_{,\gamma} + v)B_{12} + \\
&\qquad + \tilde{u}^{\gamma}{}_{,\gamma}C_{11} + \tilde{v}C_{12}] \,,\\
h^{\alpha} &= -\delta^{\alpha\beta}\mu[u_{\beta}B_{22} + v_{,\beta}B_{21} + (\tilde{u}_{\beta} + \tilde{v}_{,\beta})C_{21}] \,,\\
M^{\alpha} &= \delta^{\alpha\beta}\mu[u_{\beta}B_{21} + v_{,\beta}B_{11} + (\tilde{u}_{\beta} + \tilde{v}_{,\beta})C_{22}] \,,\\
m &= -[(2\mu+\lambda)(vB_{12} + \tilde{v}C_{12}) + \lambda(u^{\gamma}{}_{,\gamma}B_{12} + \tilde{u}^{\gamma}{}_{,\gamma}C_{11})] \,,\\
\tilde{H}^{\alpha\beta} &= \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta}\, 2\mu(\tilde{u}_{(\gamma,\delta)}\tilde{B}_{11} + u_{(\gamma,\delta)}C_{11}) + \\
&\qquad + \delta^{\alpha\beta}\lambda\,[\tilde{u}^{\gamma}{}_{,\gamma}\tilde{B}_{11} + \tilde{v}\tilde{B}_{21} + (u^{\gamma}{}_{,\gamma} + v)C_{11}] \,,
\end{aligned}
$$

$$\tilde{h}^{\alpha} = -\delta^{\alpha\beta}\mu[(\tilde{u}_{\beta}+\tilde{v}_{,\beta})\tilde{B}_{12}+u_{\beta}C_{21}+v_{,\beta}C_{22}] \quad ,$$

$$\tilde{M}^{\alpha} = \delta^{\alpha\beta}\mu[(\tilde{u}_{\beta}+\tilde{v}_{,\beta})\tilde{B}_{12}+u_{\beta}C_{21}+v_{,\beta}C_{22}] \quad ,$$

$$\tilde{m} = -[(2\mu+\lambda)(\tilde{v}\tilde{B}_{22}+vC_{12})+\lambda(\tilde{u}^{\delta}_{,\gamma}\tilde{B}_{21}+u^{\gamma}_{,\delta}C_{12})] \, .$$

Występujące w równaniach (4.8) stałe $B_{\alpha\beta}$, $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ oraz $C_{\alpha\beta}$ określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
&B_{11}=\int_{l_0}^{l_1}\xi^2\,dx^3 \, , \quad B_{12}=\int_{l_0}^{l_1}(\xi_{,3})^2\,dx^3 \, , \quad B_{21}=\int_{l_0}^{l_1}\xi\,\xi_{,33}\,dx^3 \, , \\
&B_{22}=\int_{l_0}^{l_1}(\xi_{,33})^2\,dx^3 \, , \quad \tilde{B}_{11}=\int_{l_0}^{l_1}\eta^2\,dx^3 \, , \quad \tilde{B}_{12}=\int_{l_0}^{l_1}(\eta_{,3})^2\,dx^3 \, , \\
&\tilde{B}_{21}=\int_{l_0}^{l_1}\eta\,\eta_{,33}\,dx^3 \, , \quad \tilde{B}_{22}=\int_{l_0}^{l_1}(\eta_{,33})^2\,dx^3 \, , \quad C_{11}=\int_{l_0}^{l_1}\xi_{,3}\eta\,dx^3 \, , \\
&C_{12}=\int_{l_0}^{l_1}\xi_{,3}\eta_{,33}\,dx^3 \, , \quad C_{21}=\int_{l_0}^{l_1}\xi_{,33}\eta_{,3}\,dx^3 \, , \quad C_{22}=\int_{l_0}^{l_1}\xi\,\eta_{,3}\,dx^3 \, .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Wielkości te charakteryzują więzy (4.3).

Równania przemieszczeniowe mają w tym przypadku postać

$$\begin{aligned}
&B_{12}[\mu\nabla^2 u_{\alpha}+(\lambda+\mu)u^{\gamma}_{,\gamma\alpha}+\lambda v_{,\alpha}]-\mu(B_{21}v_{,\alpha}+B_{22}u_{\alpha})+ \\
&+C_{11}[\mu\nabla^2\tilde{u}_{\alpha}+(\lambda+\mu)\tilde{u}^{\gamma}_{,\gamma\alpha}]-C_{21}\mu(\tilde{v}_{,\alpha}+\tilde{u}_{\alpha})+C_{12}\lambda\tilde{v}_{,\alpha}+f_{\alpha}=0 \quad , \\
&B_{11}\mu\nabla^2 v-B_{12}[(2\mu+\lambda)v+\lambda u^{\alpha}_{,\alpha}]+B_{21}\mu u^{\alpha}_{,\alpha}+ \\
&+C_{22}\mu(\nabla^2\tilde{v}+\tilde{u}^{\alpha}_{,\alpha})-C_{12}(2\mu+\lambda)\tilde{v}-C_{11}\lambda\,\tilde{u}^{\alpha}_{,\alpha}+k=0 \quad ,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\tilde{B}_{11}[\mu\nabla^2\tilde{u}_\alpha+(\lambda+\mu)\tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma\alpha}]-\tilde{B}_{12}\mu(\tilde{v}_{,\alpha}+\tilde{u}_\alpha)+\tilde{B}_{21}\lambda\,\tilde{v}_{,\alpha}+$$

$$+C_{11}[\mu\nabla^2u_\alpha+(\lambda+\mu)u^\gamma{}_{,\gamma\alpha}+\lambda\,v_{,\alpha}]-\mu(C_{22}v_{,\alpha}+C_{21}u_\alpha)+\tilde{f}_\alpha=0\quad,$$

$$B_{12}\mu(\nabla^2\tilde{v}+\tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha})-\tilde{B}_{22}(2\mu+\lambda)\tilde{v}-\tilde{B}_{21}\lambda\tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha}+$$

$$+C_{22}\mu\nabla^2v-C_{12}[(2\mu+\lambda)v+\lambda\,u^\alpha{}_{,\alpha}]+C_{21}\mu u^\alpha{}_{,\alpha}+\tilde{k}=0\,,\quad x^\alpha\in\Pi\,.$$

Do równań (4.10) należy dołączyć następujące warunki brzegowe:

$$u_\alpha=\varphi_\alpha\quad,\quad v=\psi\quad,$$

$$\tilde{u}_\alpha=\tilde{\varphi}_\alpha\quad,\quad\tilde{v}=\tilde{\psi}\quad,\quad x^\alpha\in\partial\Pi\,,$$

(4.11)
$$H^{\beta\alpha}\mathring{n}_\alpha=Q^\beta\quad,\quad M^\alpha\mathring{n}_\alpha=T\,,$$

$$\tilde{H}^{\beta\alpha}\mathring{n}_\alpha=\tilde{Q}^\beta\quad,\quad\tilde{M}^\alpha\mathring{n}_\alpha=\tilde{T}\quad,\quad x^\alpha\in\mathring{\partial}\Pi\,,$$

gdzie φ_α, $\tilde{\varphi}_\alpha$, ψ, $\tilde{\psi}$ są znanymi funkcjami.

Występujące w równaniach (4.10) i warunkach $(4.11)_2$ uogólnione obciążenia określone są wzorami

$$f^\alpha=\int_{l_0}^{l_1}X^\alpha\xi_{,3}\,dx^3+(q^\alpha\xi_{,3})\Big|_{x^3=l_0}+(q^\alpha\xi_{,3})\Big|_{x^3=l_1}\quad,$$

(4.12)
$$k=\int_{l_0}^{l_1}X^3\xi\,dx^3+(q^3\xi)\Big|_{x^3=l_0}+(q^3\xi)\Big|_{x^3=l_1}\quad,$$

$$\tilde{f}^\alpha=\int_{l_0}^{l_1}X^\alpha\eta\,dx^3+(q^\alpha\eta)\Big|_{x^3=l_0}+(q^\alpha\eta)\Big|_{x^3=l_1}\quad,$$

$$\tilde{k}=\int_{l_0}^{l_1}X^3\eta_{,3}\,dx^3+(q^3\eta_{,3})\Big|_{x^3=l_0}+(q^3\eta_{,3})\Big|_{x^3=l_1}\quad,\quad x^\alpha\in\Pi\,,$$

$$Q^{\alpha}=\int_{l_0}^{l_1} q^{\alpha}\xi_{,3}\,dx^3 \quad , \qquad \bar{Q}^{\alpha}=\int_{l_0}^{l_1} q^{\alpha}\eta\,dx^3 \quad ,$$

$$T=\int_{l_0}^{l_1} q^{3}\xi\,dx^3 \quad , \qquad \bar{T}=\int_{l_0}^{l_1} q^{3}\eta_{,3}\,dx^3 \quad , \quad x^{\alpha}\in\partial\Pi$$

Równania (4.10) stanowią układ sześciu równań dla sześciu współrzędnych uogólnionych u_{α}, v, $\bar{u}_{\alpha}$, $\bar{v}$ Po określeniu z równań (4.10) współrzędnych uogólnionych, składowe wektora przemieszczenia można wyznaczyć ze wzoru

(4.13) $$w_i=\delta_i^{\alpha}(u_{\alpha}\xi_{,3}+\bar{u}_{\alpha}\eta)+\delta_i^{3}(v\xi+\bar{v}\eta_{,3})$$

Natomiast składowe tensora extra - naprężenia określone są następującymi wzorami:

$$\sigma_{\alpha\beta}=[2\mu u_{(\alpha,\beta)}+\delta_{\alpha\beta}\lambda(u^{\gamma}_{,\gamma}+v)]\xi_{,3}+$$

$$+[2\mu\bar{u}_{(\alpha,\beta)}+\delta_{\alpha\beta}\lambda\bar{u}^{\gamma}_{,\gamma}]\eta+\delta_{\alpha\beta}\lambda\bar{v}\eta_{,33} \quad ,$$

(4.14)

$$\sigma_{\alpha 3}=\sigma_{3\alpha}=\mu[u_{\alpha}\xi_{,33}+v_{,\alpha}\xi+(\bar{u}_{\alpha}+\bar{v}_{,\alpha})\eta_{,3}] \quad ,$$

$$\sigma_{33}=[(2\mu+\lambda)v+\lambda u^{\gamma}_{,\gamma}]\xi_{,3}+(2\mu+\lambda)\bar{v}\eta_{,33}+\lambda\bar{u}^{\gamma}_{,\gamma}\eta \quad .$$

Równania (4.10) , mimo że stanowią przypadek szczególny równań (3.15) , opisują dużą liczbę zagadnień o znaczeniu praktycznym. W następnym punkcie pokażemy, jak z równań (4.10) wynikają równania dla różnych zagadnień płaskich teorii sprężystości.

5. NIEKTÓRE PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

Układ współrzędnych $\{x^i\}$ przyjmujemy tak, aby dla rozważanych ciał zajmujących obszar

$$\Omega = \Pi \times L \subset R \times R \times R \quad ,$$

zachodził warunek

$$L = [-h, h] \subset R$$

Teraz wygodnie jest przyjąć

$$\Pi = \{x^i : x^3 = 0\} \quad .$$

Płaszczyznę Π będziemy nazywać płaszczyzną środkową rozważanego elementu.

5.1. Antypłaski stan odkształcenia

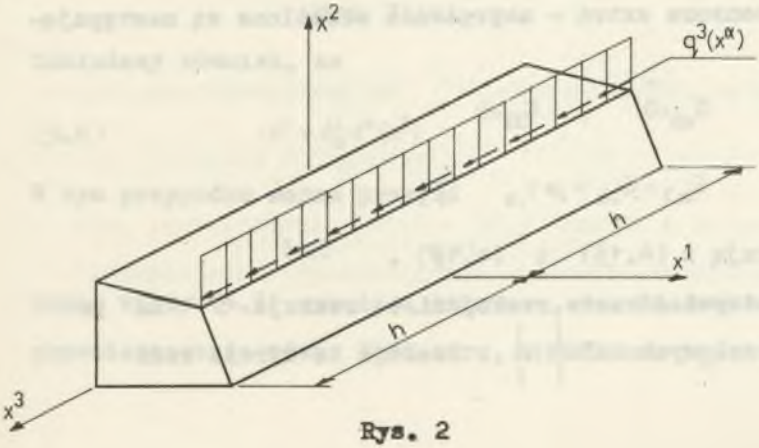
Załóżmy, że rozważane ciało obciążone jest na powierzchni $\partial\Pi \times L$ siłami

$$q^i = \delta^i_3 q^3(x^\alpha) \tag{5.1}$$

Jest to obciążenie styczne o intensywności stałej w kierunku osi x^3, /rys. 2/.

Ponadto załóżmy, że siły masowe określone są wzorem

$$X^i = \delta^i_3 X^3(x^\alpha) \tag{5.2}$$



Rys. 2

Można teraz przyjąć

$$\xi \equiv 1 \quad , \quad \eta \equiv 0$$

W tym przypadku więzy (4.3) wyrażają hipotezę, że tylko składowa w_3 wektora przemieszczenia jest różna od zera oraz że składowa ta zależy tylko od dwóch zmiennych x^α.

Ze wzorów (4.9) wynika, że

$$B_{11} = 2h,$$

a pozostałe wielkości $B_{\alpha\beta}$, $\bar{B}_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$ są równe zeru.

Podobnie ze wzorów (4.12) otrzymamy

$$k = 2hX^3 \ , \quad T = 2hq^3 \ ,$$

$$f^\alpha = \bar{f}^\alpha = \bar{k} = Q^\alpha = \bar{Q}^\alpha = \bar{T} = 0 \ .$$

Równania (4.10) redukują się w tym przypadku do jednego równania przemieszczeniowego.

$$\mu \nabla^2 v + X^3 = 0 \ , \quad x^\alpha \in \Pi \ , \tag{5.3}$$

a warunki brzegowe przyjmują postać

$$\mu v_{,\alpha} \mathring{n}^\alpha = q^3 \ , \quad x^\alpha \in \partial\Pi \ . \tag{5.4}$$

Składowe wektora przemieszczenia określone są wzorem

$$w_i = \delta_i^3 v \ ,$$

zaś składowe tensora extra - naprężenia określone są następującymi wzorami:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \ , \quad \sigma_{33} = 0 \ ,$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{3\alpha} = \mu v_{,\alpha}$$

Wzory te wynikają z (4.13) i (4.14).

Jedynymi różnymi od zera reakcjami są reakcje S^α na powierzchniach czołowych $\Pi \times \{\pm h\}$. Reakcje te wyraża wzór

$$S_\alpha = \pm \mu v_{,\alpha} \quad , \quad x^i \in \Pi \times \{\pm h\} \quad .$$

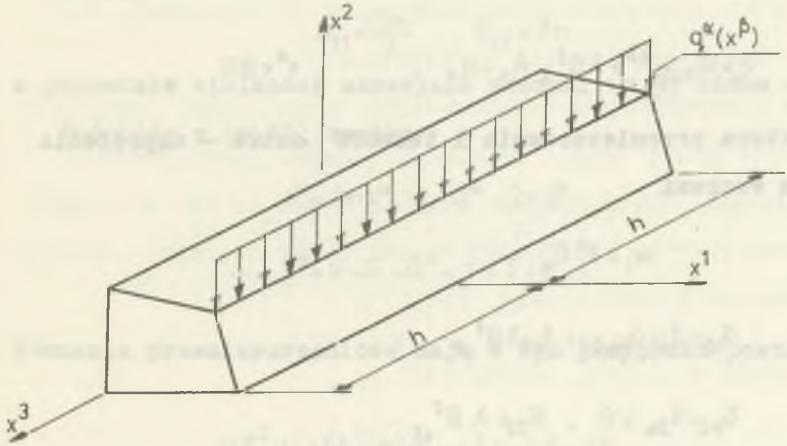
Przedstawione równania opisują dobrze znany w literaturze antypłaski stan odkształcenia.

5.2. Płaski stan odkształcenia

Z kolei załóżmy, że rozważane ciało obciążone jest na powierzchni $\partial\Pi \times L$ siłami

(5.5) $$q^i = \delta^i_\alpha q^\alpha(x^\beta) \quad .$$

Obciążenie to jest stałe w kierunku osi x^3 /rys. 3/.



Rys. 3.

Zakładamy również, że

(5.6) $$X^i = \delta^i_\alpha X^\alpha(x^\beta) \quad .$$

W tym przypadku można przyjąć

$$\zeta \equiv 0 \quad , \quad \eta \equiv 1 \quad .$$

Teraz więzy (4.3) wyrażają hipotezę, że składowa w_3 wektora przemieszczenia równa jest zeru, a składowe w_α zależą tylko

od dwóch zmiennych x^α . Ze wzorów (4.9) wynika, że tylko $\tilde{B}_{11}$ jest różne od zera i wynosi

$$2h .$$

Natomiast ze wzorów (4.12) otrzymamy

$$\tilde{f}^\alpha = 2h X^\alpha , \quad \tilde{Q}^\alpha = 2hq^\alpha .$$

Pozostałe uogólnione obciążenia równe są zeru.

Równania przemieszczeniowe (4.10) przyjmują w tym przypadku postać

$$(5.7) \qquad \mu \nabla^2 \tilde{u}_\alpha + (\lambda + \mu)\tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma\alpha} + X_\alpha = 0 \quad , \quad x^\alpha \in \Pi ,$$

a warunki brzegowe mają postać następującą:

$$(5.8) \qquad 2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma} \mathring{n}_\alpha = q_\alpha , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi$$

Składowe wektora przemieszczenia i tensora extra - naprężenia określone są wzorami

$$w_i = \delta_i^\alpha \tilde{u}_\alpha$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} + \delta_{\alpha\beta} \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma} ,$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{3\alpha} = 0 , \quad \sigma_{33} = \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma} .$$

Różne od zera są tylko reakcje S^3 na powierzchniach $\Pi \times \{\pm h\}$.

$$S^3 = \pm \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma} , \quad x^i \in \Pi \times \{\pm h\} .$$

Widać więc, że z równań (4.10 - 4.14) otrzymaliśmy, jako przypadek szczególny, równania dla płaskiego stanu odkształcenia.

5.3. Pseudopłaski stan równowagi, tarcze

W tym punkcie dla obciążeń określonych wzorami (5.5) i (5.6) przyjmujemy

$$\xi = x^3 \quad , \quad \eta \equiv 0 \quad . \tag{5.9}$$

Dla funkcji (5.9) więzy (4.3) wyrażają następującą hipotezę: włókna materialne, równoległe do tworzących powierzchni walcowej ograniczające ciało w pewnej konfiguracji, pozostają równoległe do tych tworzących w każdej konfiguracji i doznają tylko jednorodnych odkształceń podłużnych.

Teraz

$$B_{11} = \frac{2h}{3} \quad , \quad B_{12} = 2h \quad ,$$

a pozostałe wielkości określone wzorami (4.9) równe są zeru.

Podobnie z (4.12) wynika

$$f^\alpha = 2h X^\alpha \quad , \quad Q^\alpha = 2h q^\alpha \quad ,$$

$$\tilde{f}^\alpha = k = \tilde{k} = \tilde{Q}^\alpha = T = \tilde{T} = 0$$

Równania przemieszczeniowe mają w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} &\mu \nabla^2 u_\alpha + (\lambda + \mu) u^\gamma_{,\gamma\alpha} + \lambda v_{,\alpha} + X_\alpha = 0 \quad , \\ &\mu \frac{h^2}{3} \nabla^2 v - (2\mu + \lambda) v - \lambda u^\alpha_{,\alpha} = 0 \quad , \quad x^\alpha \in \Pi \quad , \end{aligned} \tag{5.10}$$

a warunki brzegowe są następujące:

$$\begin{aligned} &2\mu u_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda (u^\gamma_{,\gamma} + v) \mathring{n}_\alpha = q_\alpha \quad , \\ &v_{,\beta} \mathring{n}^\beta = 0 \quad , \quad x^\alpha \in \partial\Pi \quad . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Równania (5.10) mogą być równaniami przemieszczeniowymi tarcz. Równania naprężeniowe dla tego przypadku omówiono w pracy [17] Składowe wektora przemieszczenia i tensora extra - naprężenia określone są wzorami

$$w_i = \delta_i^\alpha u_\alpha + \delta_i^3 v x^3 ,$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu u_{(\alpha,\beta)} + \delta_{\alpha\beta}\lambda (u^\gamma{}_{,\gamma} + v) ,$$

$$\sigma_{3\alpha} = \sigma_{\alpha 3} = \mu v_{,\alpha} x^3 ,$$

$$\sigma_{33} = (2\mu + \lambda) v + \lambda u^\gamma{}_{,\gamma}$$

Równania (5.10) opisują dwuwymiarowy model obliczeniowy, nie rozważany w klasycznej teorii sprężystości.
Równania te otrzymano przy zastosowaniu teorii ciał z wewnętrznymi więzami w pracy [20] . Model ten nazwano pseudopłaskim stanem równowagi. Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że równania przemieszczeniowe klasycznej teorii tarcz cienkich uzyskamy w wyniku przejścia granicznego, przy

$$h \longrightarrow 0 .$$

Istotnie, wtedy z $(5.10)_2$ otrzymamy

$$v = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda} u^\alpha{}_{,\alpha} . \tag{5.12}$$

Podstawiając więc (5.12) do $(5.10)_1$, mamy

$$\nabla^2 u_\alpha + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} u^\beta{}_{,\beta\alpha} + \frac{X_\alpha}{\mu} = 0 , \quad x^\alpha \in \Pi . \tag{5.13}$$

Równaniom tym odpowiadają następujące warunki brzegowe:

$$2\mu u_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} u^\gamma{}_{,\gamma} \mathring{n}_\alpha = q_\alpha , \quad x^\alpha \in \partial\Pi .$$

Zatem klasyczny płaski stan naprężenia jest przypadkiem asymptotycznym pseudopłaskiego stanu równowagi.

5.4. Płyty

Jeżeli $h \ll b_\alpha$, gdzie b_α są wymiarami elementu w płaszczyźnie $x^3 = 0$ oraz jeżeli obciążenie

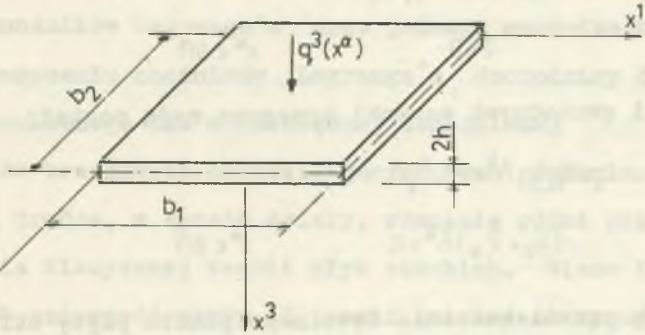
$$q^i = \delta^i_3 q^3(x^\alpha) \quad ,$$

przyłożone jest tylko do powierzchni $\Pi \times \left\{-h\right\}$, /rys.4/, a siły masowe określone są wzorem

$$X^i = \delta^i_3 X^3(x^\alpha) \quad ,$$

to można przyjąć

$$\xi \equiv 0 \quad , \quad \eta = x^3 \quad .$$



Rys. 4.

W tym przypadku więzy (4.3) wyrażają hipotezę o nieodkształcalności materialnego elementu liniowego prostopadłego do płaszczyzny środkowej i o braku odkształceń w tej płaszczyźnie.

Ze wzorów (4.9) wynika, że

$$\bar{B}_{11} = \frac{2h^3}{3} \quad , \quad \bar{B}_{12} = 2h \quad ,$$

a pozostałe wielkości $\tilde{B}_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ i $C_{\alpha\beta}$ są równe zeru. Spośród uogólnionych obciążeń tylko $\tilde{k}$ jest różne od zera,

$$\tilde{k} = 2h X^3 + q^3$$

Równania przemieszczeniowe mają postać

$$\frac{h^2}{3}[\mu \nabla^2 \tilde{u}_\alpha + (\lambda+\mu)\tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma\alpha}] - \mu(\tilde{v}_{,\alpha} + \tilde{u}_\alpha) = 0 \quad ,$$

(5.14)

$$\mu(\nabla^2 \tilde{v} + \tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha}) + X^3 + \frac{q^3}{2h} = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \Pi .$$

Warunki brzegowe zależą od sposobu podparcia krawędzi płyty.

Dla krawędzi sztywno utwierdzonych mamy:

$$\tilde{u}_\alpha = 0 \quad i \quad \tilde{v} = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi \quad ,$$

dla krawędzi swobodnie podpartych

$$2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma} \mathring{n}_\alpha = 0 \quad ,$$

$$\tilde{v} = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi \quad ,$$

zaś dla krawędzi swobodnych warunki brzegowe mają postać;

$$2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda u^\gamma{}_{,\gamma} \mathring{n} = 0 \quad ,$$

$$(\tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_{,\alpha}) \mathring{n}^\alpha = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi$$

Składowe wektora przemieszczenia dowolnego punktu płyty określa wzór

$$w_i = \delta_i^\alpha \tilde{u}_\alpha x^3 + \delta_i^3 \tilde{v} \quad ,$$

a składowe tensora extra-naprężenia następujące wzory:

$$\sigma_{\alpha\beta} = [2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} + \delta_{\alpha\beta} \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma}] x^3 \quad ,$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{3\alpha} = \mu(\tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_{,\alpha}) \quad ,$$

$$\sigma_{33} = \lambda \tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha} x^3 \quad .$$

W teorii tej przemieszczenia dowolnego punktu określają trzy współrzędne uogólnione $\bar{u}_\alpha$ i $\bar{v}$. Chcąc otrzymać równania odpowiadające klasycznej teorii płyt cienkich należy zgodnie z hipotezami Kirchhoffa dodatkowo przyjąć, że włókna materialne prostopadłe do płaszczyzny środkowej przed deformacją pozostają prostopadłymi do powierzchni środkowej po deformacji.

Wyrazem analitycznym tej dodatkowej hipotezy są związki

$$\bar{u}_\alpha + \bar{v}_{,\alpha} = 0 , \qquad x^\alpha \in \Pi . \tag{5.15}$$

Więzy (5.15) generują dodatkowe więzy brzegowe

$$\bar{u}_\alpha \partial_s x^\alpha + \partial_s \bar{v} = 0 , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi , \tag{5.16}$$

gdzie ∂_s oznacza pochodną wzdłuż brzegu $\partial\Pi$.
Równania (5.15) i (5.16) wymagają wprowadzenia dwóch wewnętrznych mnożników Lagrange'a oraz jednego mnożnika brzegowego. Po wyrugowaniu mnożników Lagrange'a dochodzimy do równania biharmonicznego dla współrzędnej uogólnionej $\bar{v}$ oraz do warunków brzegowych,odpowiadających temu równaniu. Wyprowadzone na tej drodze, w sposób ścisły, równanie różni się nieco od równania klasycznej teorii płyt cienkich. Nieco inaczej określona jest sztywność płyty. W teorii ścisłej otrzymujemy dla płyty o grubości h sztywność

$$D' = \frac{(\lambda + 2\mu)h^3}{12} ,$$

a w teorii klasycznej przyjmuje się

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} .$$

Stąd

$$D' = \left(1 + \frac{\nu^2}{1-2\nu}\right) D .$$

Różnica ta wynika z wewnętrznych sprzeczności teorii klasycznej, w której, między innymi, przyjmuje się związki konstytutywne jak dla płaskiego stanu naprężenia, mimo że z założeń kinematycznych Kirchhoffa wynika, że $\varepsilon_{33}=0$ i $\sigma_{33}\neq 0$.

Na zakończenie tego punktu warto zwrócić uwagę na to, że z równań (4.10) - (4.14) można otrzymać niezwykle proste równania dla szeregu ogólniejszych teorii. Na przykład dla zagadnień tarczowo - płytowych można przyjąć:

$$\xi = x^3 \quad i \quad \eta = x^3 .$$

Dwuwymiarowy model tej teorii omówiony został w punkcie czwartym.

W następnym punkcie przedstawione zostaną nowe dwuwymiarowe modele obliczeniowe dla szerokiej klasy trójwymiarowych zagadnień statyki liniowej teorii sprężystości.

6. ZAGADNIENIA UOGÓLNIONYCH PSEUDOPŁASKICH STANÓW RÓWNOWAGI

W tym punkcie omówimy dwuwymiarowe modele obliczeniowe dla zagadnień, w których intensywność obciążenia, przyłożonego do powierzchni $\partial\Pi \times L$, zależy od współrzędnej x^3. Zagadnienia te wygodnie jest podzielić na dwa przypadki. W pierwszym przypadku uwzględniać będziemy obciążenia $\bar{q}^i = \delta^i_\alpha \bar{q}^\alpha$, a w drugim obciążenia określone wzorem $\bar{q}^i = \delta^i_3 \bar{q}^3$

6.1. Równania dla pierwszego przypadku

Zakładamy, że obciążenie $\bar{q}^i$ można przedstawić w postaci

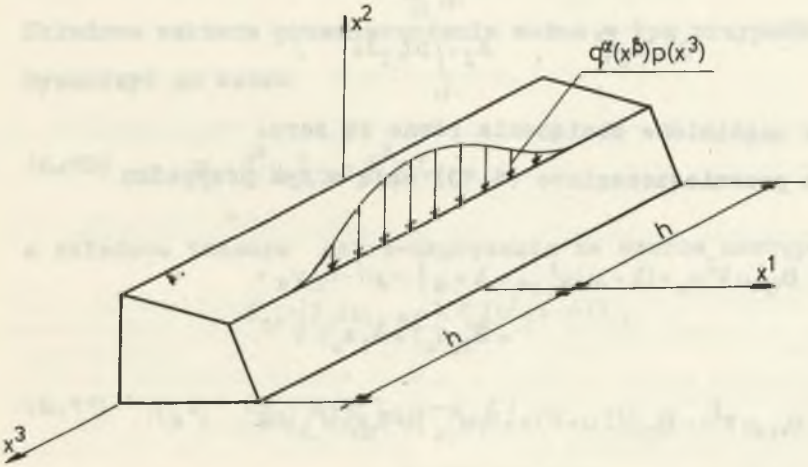
$$\bar{q}^i(x^j) = \delta^i_\alpha q^\alpha(x^\beta) p(x^3) . \tag{6.1}$$

Obciążenie to przedstawia rys. 5.

Dla tego przypadku przyjmujemy

$$\eta \equiv 0 . \tag{6.2}$$

Więzy (4.3) wyrażają teraz hipotezę, że charakter zmiany odkształceń $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i ε_{33} w kierunku osi x^3 jest taki sam.



Rys. 5.

Ponadto przyjmujemy, że

(6.3) $$\xi(\pm h)=0 \quad \text{lub} \quad \xi_{,3}(\pm h)=0 \ .$$

Warunki (6.3) pozwalają znacznie uprościć postać równań opisujących ten przypadek.

Ze wzorów (4.9) wynika, że dla rozważanego zagadnienia wszystkie wielkości $\bar{B}_{\alpha\beta}$ i $C_{\alpha\beta}$ są równe zeru oraz że macierz $[B_{\alpha\beta}]$ jest niesymetryczna. Tym samym w równaniach wystąpią tylko trzy różne stałe

(6.4) $$B_{11}=\int_{-h}^{h}\xi^2 dx^3 \ , \quad B_{12}=\int_{-h}^{h}(\xi_{,3})^2 dx^3 \ , \quad B_{22}=\int_{-h}^{h}(\xi_{,33})^2 dx^3 \ .$$

Dalej przyjmujemy, że siły masowe $\bar{X}^i$ określone są wzorem

(6.5) $$\bar{X}^i(x^j)=\delta^i_\alpha X^\alpha(x^\beta)Y(x^3) \ .$$

Stąd

$$t^\alpha = A_1 X^\alpha \ , \quad A_1=\int_{-h}^{h} Y\xi_{,3}dx^3 \ ,$$

$$Q^\alpha = A_2 q^\alpha \ , \quad A_2=\int_{-h}^{h} p\,\xi_{,3}dx^3 \ ,$$

a pozostałe uogólnione obciążenia równe są zeru.

Równania przemieszczeniowe (4.10) mają w tym przypadku postać

(6.6) $$\begin{aligned} &B_{12}[\mu\nabla^2 u_\alpha+(\lambda+\mu)u^\delta{}_{,\delta\alpha}+\lambda v_{,\alpha}]-\mu(-B_{12}v_{,\alpha}+ \\ &\qquad + B_{22}u_\alpha)+A_1X_\alpha=0 \ , \\ &B_{11}\mu\nabla^2 v-B_{12}[(2\mu+\lambda)v+\lambda u^\alpha{}_{,\alpha}]-B_{12}\mu u^\alpha{}_{,\alpha}=0 \ , \quad x^\alpha\in\Pi \ . \end{aligned}$$

Zakładając, że

$$B_{11} \neq 0 \quad , \quad B_{12} \neq 0$$

oraz wprowadzając oznaczenia

$$C_1 = \frac{B_{22}}{B_{12}} \quad , \quad C_2 = \frac{B_{12}}{B_{11}} \quad , \quad D_1 = \frac{A_1}{B_{12}} \quad , \tag{6.7}$$

równania (6.6) można przedstawić w prostej postaci:

$$\begin{aligned} &\mu(\nabla^2 - C_1)u_\alpha + (\lambda+\mu)(u^\beta_{,\beta} + v)_{,\alpha} + D_1 X_\alpha = 0 \quad , \\ &\mu(\nabla^2 - C_2)v - C_2(\lambda+\mu)(u^\alpha_{,\alpha} + v) = 0 \quad , \quad x^\alpha \in \Pi \, . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Równaniom (6.8) odpowiadają następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} &2\mu u_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda(u^\beta_{,\beta} + v)\mathring{n}_\alpha = D_2 q_\alpha \quad , \\ &(v_{,\alpha} - C_2 u_\alpha)\mathring{n}^\alpha = 0 \quad , \quad x^\alpha \in \partial\Pi \quad , \end{aligned} \tag{6.9}$$

gdzie

$$D_2 = \frac{A_2}{B_{12}} \, .$$

Składowe wektora przemieszczenia można w tym przypadku wyznaczyć ze wzoru

$$w_i = \delta^\alpha_i u_\alpha \xi_{,3} + \delta^3_i v \xi \quad , \tag{6.10}$$

a składowe tensora extra-naprężenia ze wzorów następujących:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = [2\mu u_{(\alpha,\beta)} + \lambda \delta_{\alpha\beta}(u^\gamma_{,\gamma} + v)]\xi_{,3} \quad , \\ &\sigma_{\alpha 3} = \mu(u_\alpha \xi_{,33} + v_{,\alpha}\xi) \quad , \\ &\sigma_{33} = [(2\mu+\lambda)v + \lambda u^\alpha_{,\alpha}]\xi_{,3} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Zatem wzory dla reakcji wewnętrznych i brzegowych mają postać:

$$
\begin{aligned}
&R = -u(C_1\xi + \xi_{,33})_{,3}\, u_\alpha + (D_1\xi_{,3} - Y)X_\alpha , \\
&R_3 = -\mu(C_2\xi + \xi_{,33})[(\lambda + 2\mu)v + (\lambda + \mu)u^\alpha{}_{,\alpha}] , \quad x^i \in \Omega , \\
&S_\alpha = \pm\mu(u_\alpha \xi_{,33} + v_\alpha \xi) , \\
&S_3 = \pm[(2\mu + \lambda)v + \lambda\, u^\alpha{}_{,\alpha}]\,\xi_{,3} , \quad x^i \in \Pi \times \{\pm h\} , \\
&S_\alpha = (D_2\xi_{,3} - p)q_\alpha , \\
&S_3 = \mu(C_2\xi + \xi_{,33})u_\alpha \overset{*}{n}{}^\alpha , \quad x^i \in \partial\Pi \times L .
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Ze wzorów (6.12) widać, że reakcje R^i a także S^i dla $x^i \in \partial\Pi \times L$ będą tożsamościowo równe zeru, gdy spełnione będą następujące warunki:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C_2 , \quad p = Y , \\
&C_1\xi + \xi_{,33} = 0 , \\
&\xi = \int p\,dx^3
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Zatem funkcja ξ powinna spełniać równanie różniczkowe (6.13)$_3$ z warunkami brzegowymi $\xi(\pm h) = 0$ lub $\xi_{,3}(\pm h) = 0$, a intensywność obciążenia i sił masowych powinna zmieniać się w kierunku osi x^3 według funkcji $\xi_{,3}$.

Ponadto z budowy wzorów (6.12) wynika, że w tych przypadkach, w których nie można spełnić w sposób ścisły warunków (6.13) , można łatwo funkcję ξ dobrać tak, by reakcje R^i oraz S^i dla $x^i \in \partial\Pi \times L$ były minimalne.

Między innymi można w tym celu szukać minimum funkcjonału

$$J[\xi]=\int_{-h}^{h}[(C_1\xi+\xi_{,33})^2+(C_2\xi+\xi_{,33})^2+(D_1\xi_{,3}-Y)^2+ \tag{6.14}$$
$$+(D_2\xi_{,3}-p)^2]\,dx^3$$

Dla zagadnień, dla których zakładamy, że

$$X_i \equiv 0 \quad ,$$

funkcjonał (6.14) ma postać:

$$J[\xi]=\int_{-h}^{h}[(C_1\xi+\xi_{,33})^2+(C_2\xi+\xi_{,33})^2+(D_2\xi_{,3}-p)^2]\,dx^3 \tag{6.15}$$

Jeżeli funkcję ξ przyjmujemy w postaci:

$$\xi = a^K\varphi_K(x^3) \ ,$$

gdzie φ_K są znanymi funkcjami spełniającymi warunki

$$\varphi_K(\pm h)=0 \quad \text{lub} \quad \varphi_{K,3}(\pm h)=0 \quad ,$$

a wielkości a^K są stałymi, to szukanie minimum funkcjonału (6.14) lub (6.15) sprowadza się do szukania minimum funkcji wielu zmiennych $\Phi(a^K)$

Na tej drodze można znaleźć wiele rozwiązań z wystarczającą dla potrzeb techniki dokładnością.

Omówiony sposób rozwiązywania zagadnień trójwymiarowych może mieć duże znaczenie praktyczne dla tych przypadków, dla których przyjmujemy, że

$$X_\alpha \equiv 0$$

oraz że obciążenie $\bar{q}_\alpha$ rozłożone jest na środkowej części powierzchni $\partial\Pi\times L$ elementu o wymiarze h, większym od wymiarów poprzecznych b_α. W tych przypadkach wpływ reakcji S^i dla $x^i \in \Pi\times\{\pm h\}$ na rozkład naprężeń w części środkowej elementu jest niewielki.

Przykład 1

Rozważmy element obciążony na powierzchni $\partial\Pi\times L$ siłami o intensywności określonej wzorem

$$\bar{q}^i(x^j) = \delta^i_\alpha q^\alpha(x^\beta)\left(1-\frac{(x^3)^2}{h^2}\right)$$

Obciążenie to przedstawiono na rys. 6. Ponadto przyjmijmy

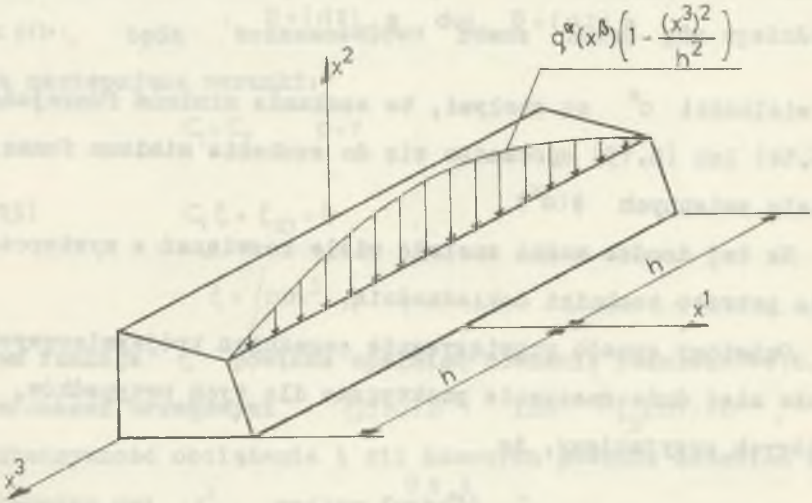
$$X^\alpha \equiv 0 \ .$$

Zatem

$$p(x^3) = 1-\frac{(x^3)^2}{h^2} \ .$$

Z warunku $(6.13)_4$ mamy

$$\xi = \int\left(1-\frac{(x^3)^2}{h^2}\right)dx^3 = x^3 - \frac{(x^3)^3}{3h^2} + C \ .$$



Rys. 6.

Ponieważ rozważane obciążenie rozłożone jest symetrycznie względem płaszczyzny $x^3=0$, więc funkcja ξ powinna spełniać warunek

$$\xi(x^3) = -\xi(-x^3) \ .$$

Stąd należy przyjąć

$$C = 0$$

Mamy zatem

$$\xi = x^3 - \frac{(x^3)^3}{3h^2}. \tag{6.16}$$

Tak przyjęta funkcja ξ może być uważana za pierwsze przybliżenie. Przybliżenie n-te otrzymamy, przyjmując

$$\xi = a^1\left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3h^2}\right) + a^2\left(x^3 - \frac{(x^3)^5}{5h^4}\right) + \dots + a^n\left(x^3 - \frac{(x^3)^{2n+1}}{(2n+1)h^{2n}}\right) \tag{6.17}$$

i wyznaczając stałe a^K z warunku minimum funkcji

$$\Phi(a^K) = \int_{-h}^{h} [(C_1\xi + \xi_{,33})^2 + (C_2\xi + \xi_{,33})^2 + (D_2\xi_{,3} - p)^2]\, dx^3 ,$$

gdzie za ξ należy podstawić wyrażenie (6.17), a wielkości C_1, C_2 i D_2 należy wyznaczyć ze wzorów (6.7).
Wielkości C_1, C_2, D_2 zależeć będą również od a^K.
W tym przykładzie rozwiązanie przedstawimy tylko dla funkcji (6.16). Ponieważ funkcja ta spełnia warunek $(6.13)_4$, więc reakcje S^α na całej powierzchni bocznej $\partial\Pi \times L$ są równe zeru, zaś z warunku

$$\xi_{,3}(\pm h) = 0$$

wynika, że również reakcje S^3 na powierzchniach czołowych $\Pi \times \{\pm h\}$ są równe zeru. Pozostałe reakcje są proporcjonalne do h^{-2}, a zatem dla elementów dostatecznie długich już pierwsze przybliżenie może być wystarczająco dokładne.

Wielkości $B_{\alpha\beta}$ w tym przypadku, przyjmują wartości następujące:

$$B_{11} = \frac{136}{315} h^3 \quad , \quad B_{12} = \frac{13}{15} h \quad , \quad B_{22} = \frac{8}{3} \frac{1}{h}$$

Zatem

$$C_1 = \frac{40}{13} \frac{1}{h^2} \quad , \quad C_2 = \frac{273}{136} \frac{1}{h^2} \quad .$$

W rozważanym pierwszym przybliżeniu można przyjąć do obliczeń praktycznych

$$C_1 = 3 \frac{1}{h^2} \quad , \quad C_2 = 2 \frac{1}{h^2} \quad .$$

Stąd równania przemieszczeniowe mają postać

$$\mu(\nabla^2 - \frac{3}{h^2}) u_\alpha + (\lambda + \mu)(u^\beta_{,\beta} + v)_{,\alpha} = 0 \quad ,$$

(6.18)

$$\mu(\nabla^2 - \frac{2}{h^2}) v - \frac{2}{h^2}(\lambda + \mu)(u^\alpha_{,\alpha} + v) = 0 \quad , \quad x^\alpha \in \Pi \quad ,$$

a warunki brzegowe mają postać następującą:

$$2\mu u_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda (u^\beta_{,\beta} + v) \mathring{n}_\alpha = q_\alpha \quad ,$$

$$(v_{,\alpha} - \frac{2}{h^2} u_\alpha) \mathring{n}^\alpha = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi$$

Składowe wektora przemieszczenia i tensora extra - naprężenia określone są wzorami

$$w_j = \delta^\alpha_i u_\alpha \left(1 - \frac{(x^3)^2}{h^2}\right) + \delta^3_i v \left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3h^2}\right) \quad ,$$

(6.19)

$$\sigma_{\alpha\beta} = [2\mu u_{(\alpha,\beta)} + \lambda \delta_{\alpha\beta}(u^\delta_{,\delta} + v)] \left(1 - \frac{(x^3)^2}{h^2}\right) \quad ,$$

$$\sigma_{\alpha 3} = -2\mu u_{\alpha}\frac{x^3}{h^2} + \mu v_{,\alpha}\left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3h^2}\right) ,$$

$$\sigma_{33} = [(2\mu+\lambda)v + \lambda u^{\alpha}_{,\alpha}]\left(1 - \frac{(x^3)^2}{h^2}\right) .$$

Gdy $h \to \infty$, to równania (6.18) zbliżają się asymptotycznie do równań dla płaskiego stanu odkształcenia, a rozwiązanie (6.19) przechodzi, dla części środkowej elementu, w znane wzory dla tego samego przypadku.

Przykład 2

Z kolei rozważmy przypadek, w którym intensywność obciążenia zmienia się w kierunku osi x^3 według funkcji:

(6.20) $$p = \cos\alpha_k x^3 ,$$

gdzie

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{h} ,$$

przy czym k jest dowolną liczbą naturalną.

Przyjmujemy również, że

$$Y = \cos\alpha_k x^3 .$$

Podstawiając (6.20) do warunku $(6.13)_4$ otrzymamy

(6.21) $$\xi_{(k)} = \frac{1}{\alpha_k}\sin\alpha_k x^3$$

Dla funkcji (6.21) mamy

$$C_1 = C_2 = \alpha_k^2 , \quad D_1 = 1 .$$

Zatem równania przemieszczeniowe (6.8) mają w tym przypadku postać

(6.22) $$\mu(\nabla^2 - \alpha_k^2)u_{\alpha}^{(k)} + (\lambda+\mu)(u^{\beta(k)}_{,\beta} + v^{(k)})_{,\alpha} + X_{\alpha}^{(k)} = 0 ,$$

$$\mu(\nabla^2 - \alpha_k^2)v^{(k)} - \alpha_k^2(\lambda+\mu)(u^{\alpha(k)}_{,\alpha} + v^{(k)}) = 0 , \quad x^{\alpha} \in \Pi .$$

Równaniom tym odpowiadają następujące warunki brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&2\mu u^{(k)}_{(\alpha,\beta)}\overset{\circ}{n}^{\beta} + \lambda(u^{\beta(k)}_{,\beta} + v^{(k)})\overset{\circ}{n}_{\alpha} = q^{(k)}_{\alpha}, \\
(6.23)\qquad & \\
&(v^{(k)}_{,\alpha} - \alpha_k^2 u^{(k)}_{\alpha})\overset{\circ}{n}^{\alpha} = 0, \qquad x^{\alpha} \in \partial\Pi .
\end{aligned}
$$

W równaniach (6.22) i warunkach brzegowych (6.23) dla współrzędnych uogólnionych wprowadzono dodatkowy indeks k, ujęty w nawiasy okrągłe dla podkreślenia, że są to równania dla funkcji (6.21), zależnej parametrycznie od liczby naturalnej k.

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku wszystkie warunki (6.13) spełnione są w sposób ścisły. Zatem reakcje wewnętrzne R^i w całym obszarze Ω oraz brzegowe S^i na całej powierzchni bocznej $\partial\Pi \times L$ są tożsamościowo równe zeru.

Ponieważ

$$\xi_{(k)}(\pm h) = 0 \quad , \quad \xi_{(k),33}(\pm h) = 0 \quad ,$$

więc również reakcje S^{α} na powierzchniach czołowych $\Pi \times \{\pm h\}$ będą tożsamościowo równe zeru.

Jeżeli więc ciało obciążone jest siłami

$$q_{\alpha}(x^i) = q^{(k)}_{\alpha}(x^{\beta})\cos\alpha_k x^3 \quad ,$$

a siły masowe określone są wyrażeniem

$$X_{\alpha}(x^i) = X^{(k)}_{\alpha}(x^{\beta})\cos\alpha_k x^3 \quad ,$$

to składowe wektora przemieszczenia wynoszą:

$$(6.24) \qquad w_i(x^j) = \delta_i^\alpha u_\alpha^{(k)} \cos\alpha_k x^3 + \delta_i^3 v^{(k)} \frac{1}{\alpha_k} \sin\alpha_k x^3 .$$

Dla tego przypadku różne od zera są tylko reakcje S_3 na powierzchniach $\Pi \times \{\pm h\}$.

Reakcje te określone są wzorem:

$$S_3 = \pm[(2\mu + \lambda) v^{(k)} + \lambda u^{\alpha(k)}_{,\alpha}] \cos k\pi , \qquad x^i \in \Pi \times \{\pm h\} .$$

Równania i warunki brzegowe identyczne co do postaci z (6.22) i (6.23) otrzymamy także dla

$$p = Y = \sin\alpha_k x^3 .$$

Jednak w tym przypadku składowe wektora przemieszczenia określone są wzorem

$$(6.25) \qquad w_i(x^j) = \delta_i^\alpha u'^{(k)}_\alpha \sin\alpha_k x^3 - \delta_i^3 v'^{(k)} \frac{1}{\alpha_k} \cos\alpha_k x^3 ,$$

gdzie współrzędne uogólnione oznaczono przez $u'^{(k)}_\alpha$ i $v'^{(k)}$, dla odróżnienia ich od współrzędnych $u^{(k)}_\alpha$ i $v^{(k)}$, występujących w (6.24).

Dla rozwiązania (6.25) jednymi różnymi od zera reakcjami są reakcje

$$S'_\alpha = \pm \mu(\alpha_k u'^{(k)}_\alpha - \frac{1}{\alpha_k} v'^{(k)}) \cos k\pi , \qquad x^i \in \Pi \times \{\pm h\} ,$$

działające na powierzchniach czołowych $\Pi \times \{\pm h\}$.

6.1.1. Rozwiązanie w postaci szeregu trygonometrycznego

Z przykładu 2 wynika, że dla szerokiej klasy obciążeń $q_\alpha(x^i)$ i $X_\alpha(x^i)$ mających rozwinięcia w szereg Fouriera

$$q_\alpha(x^i) = q_\alpha^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} q_\alpha^{(k)} \cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} q_\alpha'^{(k)} \sin\alpha_k x^3 ,$$

$$X_\alpha(x^i) = X_\alpha^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_\alpha^{(k)} \cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} X_\alpha'^{(k)} \sin\alpha_k x^3 ,$$

można uzyskać następujące rozwiązanie:

$$w_\alpha(x^i) = u_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} u_\alpha^{(k)} \cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} u_\alpha'^{(k)} \sin\alpha_k x^3 ,$$

(6.26)

$$w_3(x^i) = v x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{(k)}}{\alpha_k} \sin\alpha_k x^3 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v'^{(k)}}{\alpha_k} \cos\alpha_k x^3 .$$

Wielkości u_α i v należy wyznaczyć z równań (5.10) dla wyrazów $q_\alpha^{(0)}$ i $X_\alpha^{(0)}$, a $u_\alpha^{(k)}$, $v^{(k)}$ i $u_\alpha'^{(k)}$, $v'^{(k)}$ z równań (6.22) odpowiednio dla wyrazów $q_\alpha^{(k)}$, $X_\alpha^{(k)}$ oraz $q_\alpha'^{(k)}$, $X_\alpha'^{(k)}$.

Dla wielu zagadnień rozwiązanie (6.26) bardzo mało różni się od rozwiązania tego problemu według równań teorii sprężystości bez więzów wewnętrznych. Ma to miejsce między innymi wtedy, gdy obciążenie przyłożone jest do części środkowej powierzchni $\partial\Pi \times L$ i jest samozrównoważone oraz gdy jednocześnie

$$h > b ,$$

gdzie b jest charakterystycznym wymiarem przekroju prostopadłego do osi x^3

W tych przypadkach wyrazy $q_\alpha^{(0)}$ i $X_\alpha^{(0)}$ są niewielkie, a zatem również reakcje związane z tymi wyrazami będą małe. Reakcje S_3, odpowiadające wyrazom $q_\alpha^{(k)}$ i $X_\alpha^{(k)}$ oraz S'_α, związane z wielkościami $q'^{(k)}_\alpha$ i $X'^{(k)}_\alpha$, działają na powierzchniach $\Pi \times \{\pm h\}$ i zgodnie z zasadą Saint-Venanta nie wpływają w sposób istotny na rozkład naprężeń w części środkowej rozważanego elementu. Tym samym za pomocą omówionego modelu można będzie rozwiązać szereg interesujących zagadnień inżynierskich z wystarczającą dla problemów technicznych dokładnością.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że przedstawiony sposób nie jest równoważny metodzie szeregów trygonometrycznych, stosowanej szeroko, między innymi, do rozwiązywania zagadnień klasycznej teorii tarcz. Na przykład podstawiając (6.26) do równań przemieszczeniowych liniowej teorii sprężystości nie otrzymamy równań (5.10) dla wielkości u_α i v.

6.2. Równania dla drugiego przypadku

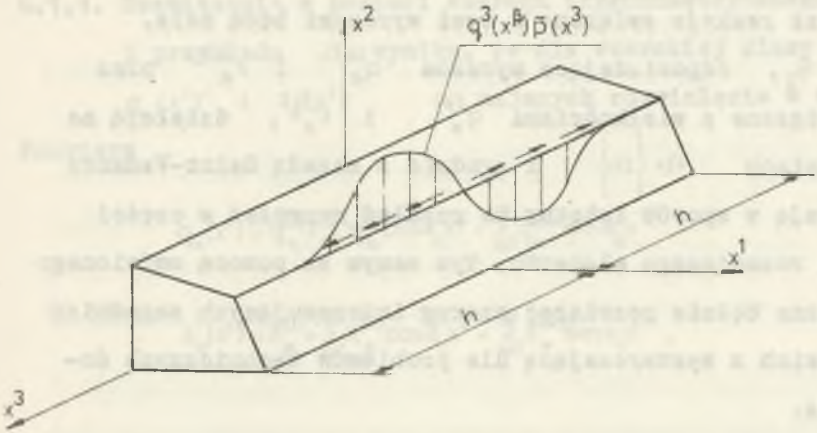
Z kolei załóżmy, że obciążenie $\bar{q}^i$ można przedstawić w następującej postaci:

$$\bar{q}^i(x^j) = \delta^i_3 q^3(x^\beta)\tilde{p}(x^3)$$

oraz że siły masowe $\bar{X}^i$ określone są wzorem

$$\bar{X}^i(x^j) = \delta^i_3 X^3(x^\beta)\tilde{Y}(x^3) .$$

Rozważane obciążenie przedstawiono na rys. 7.



Rys.7.

Dla tego przypadku przyjmujemy

$$\xi \equiv 0$$

oraz

$$\eta(\pm h) = 0 \quad \text{lub} \quad \eta_{,3}(\pm h) = 0$$

Więzy (4.3) wyrażają teraz hipotezę, że charakter zmiany odkształceń $\varepsilon_{3\alpha}$ w kierunku osi x^3 jest taki sam.

Dla rozważanego zagadnienia ze wzorów (4.9) wynika, że

$$B_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} = 0$$

oraz że macierz $[\tilde{B}_{\alpha\beta}]$ jest niesymetryczna, przy czym wielkości $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ określone są wzorami

$$\tilde{B}_{11} = \int_{-h}^{h} \eta^2 dx^3 \quad , \quad \tilde{B}_{12} = \int_{-h}^{h} (\eta_{,3})^2 dx^3 \quad , \quad \tilde{B}_{22} = \int_{-h}^{h} (\eta_{,33})^2 dx^3 .$$

Spośród uogólnionych obciążeń różne od zera są tylko

$$\tilde{k} = \tilde{A}_1 x^3 \quad , \quad \tilde{A}_1 = \int_{-h}^{h} \tilde{\gamma} \eta_{,3} dx^3 .$$

$$\bar{T} = \bar{A}_2 q^3 \quad , \quad \bar{A}_2 = \int_{-h}^{h} \bar{p}\, \eta_{,3}\, dx^3 .$$

Zatem równania przemieszczeniowe (4.10) mają postać

$$\tilde{B}_{11}[\mu \nabla^2 \tilde{u}_\alpha + (\lambda + \mu)\tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma\alpha}] - \tilde{B}_{12}[\mu(\tilde{v}_{,\alpha} + \tilde{u}_\alpha) + \lambda \tilde{v}_{,\alpha}] = 0 \quad ,$$

(6.26)

$$\tilde{B}_{12}[\mu(\nabla^2 \tilde{v} + \tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha}) + \lambda\, \tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha}] - \tilde{B}_{22}(2\mu + \lambda)\tilde{v} + \tilde{A}_1 X^3 = 0 \, , \quad x^\alpha \in \Pi .$$

Podobnie jak w pierwszym przypadku, zakładając że

$$\tilde{B}_{11} \neq 0 \quad , \quad \tilde{B}_{12} \neq 0$$

oraz wprowadzając oznaczenia

$$\tilde{C}_1 = \frac{\tilde{B}_{12}}{\tilde{B}_{11}} \quad , \quad \tilde{C}_2 = \frac{\tilde{B}_{22}}{\tilde{B}_{12}} \quad , \quad \tilde{D}_1 = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{B}_{12}}$$

równania (6.26) można przedstawić w prostej postaci

$$\mu(\nabla^2 - \tilde{C}_1)\tilde{u}_\alpha + (\lambda + \mu)(\tilde{u}^\beta{}_{,\beta} - \tilde{C}_1 \tilde{v})_{,\alpha} = 0 \quad ,$$

(6.27)

$$\mu(\nabla^2 - \tilde{C}_2)\tilde{v} + (\lambda + \mu)(\tilde{u}^\alpha{}_{,\alpha} - \tilde{C}_2 \tilde{v}) + \tilde{D}_1 X^3 = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \Pi .$$

Warunki brzegowe mają w tym przypadku postać

$$2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} \mathring{n}^\beta + \lambda \tilde{u}^\gamma{}_{,\gamma} \mathring{n}_\alpha - \tilde{C} \lambda \tilde{v} \mathring{n}_\alpha = 0 \quad ,$$

$$\mu(\tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_{,\alpha})\mathring{n}^\alpha = \tilde{D}_2 q^3 \quad , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi \, ,$$

$$\tilde{D}_2 = \frac{\tilde{A}_2}{\tilde{B}_{12}} .$$

Składowe wektora przemieszczenia i tensora extra-naprężenia można wyznaczyć z następujących wzorów:

$$w_i = \delta_i^\alpha \tilde{u}_\alpha \eta + \delta_i^3 \tilde{v} \eta_{,3} \ ,$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = [2\mu \tilde{u}_{(\alpha,\beta)} + \delta_{\alpha\beta} \lambda \tilde{u}^\delta_{,\delta}] \eta + \delta_{\alpha\beta} \lambda \tilde{v} \eta_{,33} \ ,$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \mu (\tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_{,\alpha}) \eta_{,3} \ ,$$

$$\sigma_{33} = (2\mu + \lambda) \tilde{v} \eta_{,33} + \lambda \tilde{u}^\alpha_{,\alpha} \eta \ .$$

Natomiast wzory dla reakcji wewnętrznych i brzegowych mają teraz postać

$$R_\alpha = -(\tilde{C}_1 \eta + \eta_{,33}) [\mu \tilde{u}_\alpha + (\lambda + \mu) \tilde{v}_{,\alpha}] \ ,$$

$$R_3 = -(\tilde{C}_2 \eta + \eta_{,33})_{,3} (2\mu + \lambda) v + (\tilde{D}_1 \eta_{,3} - \tilde{Y}) X_3 \ , \qquad x^i \in \Omega \ ,$$

$$S_\alpha = \pm \mu (\tilde{u}_\alpha + \tilde{v}_{,\alpha}) \eta_{,3} \ ,$$

(6.28)

$$S_3 = \pm [(2\mu + \lambda) \tilde{v} \eta_{,33} + \lambda \tilde{u}^\alpha_{,\alpha} \eta] \ , \qquad x^i \in \Pi \times \{\pm h\} \ ,$$

$$S_\alpha = (\tilde{C}_1 \eta + \eta_{,33}) \lambda \tilde{v} \mathring{n}_\alpha \ ,$$

$$S_3 = (\tilde{D}_2 \eta_{,3} - \tilde{p}) q_3 \ , \qquad x^i \in \partial\Pi \times L \ .$$

Tak jak w pierwszym przypadku, reakcje R^i dla $x^i \in \Omega$ oraz S^i dla $x^i \in \partial\Pi \times L$ będą tożsamościowo równe zeru, gdy spełnione będą warunki:

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 \ , \ \tilde{p} = \tilde{Y} \ ,$$

$$\tilde{C}_1 \eta + \eta_{,33} = 0 \ , \tag{6.29}$$

$$\eta = \int p\, dx^3 \ .$$

Dla tych zagadnień, dla których nie można spełnić w sposób ścisły warunków (6.29) można funkcję η przyjąć w postaci:

$$\eta = \tilde{a}^K \tilde{\varphi}_K(x^3) \ ,$$

gdzie $\tilde{\varphi}_K$ są znanymi funkcjami spełniającymi warunki

$$\tilde{\varphi}_K(\pm h) = 0 \quad \text{lub} \quad \tilde{\varphi}_{K,3}(\pm h) = 0$$

Stałe $\tilde{a}^K$ należy wyznaczyć z warunku minimum następującej funkcji wielu zmiennych:

$$\Phi(\tilde{a}^K) = \int_{-h}^{h} [(\tilde{C}_1\eta + \eta_{,33})^2 + (\tilde{C}_2\eta + \eta_{,33})^2 + (\tilde{D}_1\eta_{,3} - \tilde{Y})^2 + (\tilde{D}_2\eta_{,3} - \tilde{p})^2]\, dx^3 \ .$$

Można w ten sposób uzyskać szereg wystarczająco dokładnych rozwiązań. Podobnie jak w pierwszym przypadku, warunki (6.29) będą tożsamościowo spełnione dla

$$\tilde{p} = \tilde{Y} = \cos\alpha_k x^3 \ . \tag{6.30}$$

Dla funkcji (6.30) otrzymamy

$$\eta_{(k)} = \frac{1}{\alpha_k} \sin\alpha_k x^3 \ ,$$

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \alpha_k^2 \quad , \quad \tilde{D}_1 = \tilde{D}_2 = 1 \; .$$

Zatem równania przemieszczeniowe mają postać

$$\mu(\nabla^2 - \alpha_k^2)\tilde{u}_\alpha^{(k)} + (\lambda + \mu)(\tilde{u}^{\beta(k)}_{,\beta} - \alpha_k^2 \tilde{v}^{(k)})_{,\alpha} = 0 \quad ,$$

(6.31)

$$\mu(\nabla^2 - \alpha_k^2)\tilde{v}^{(k)} + (\lambda + \mu)(\tilde{u}^{\alpha(k)}_{,\alpha} - \alpha_k^2 \tilde{v}^{(k)}) + X_3^{(k)} = 0 \quad , \qquad x^\alpha \in \Pi \; ,$$

a warunki brzegowe postać następującą:

$$2\mu \tilde{u}^{(k)}_{(\alpha,\beta)} \overset{\circ}{n}{}^\beta + \lambda \tilde{u}^{\gamma(k)}_{,\gamma} \overset{\circ}{n}_\alpha - \alpha_k^2 \lambda \tilde{v}^{(k)} \overset{\circ}{n}_\alpha = 0 \quad ,$$

(6.32)

$$\mu(\tilde{u}_\alpha^{(k)} + \tilde{v}^{(k)}_{,\alpha}) \overset{\circ}{n}{}^\alpha = q_3^{(k)} \quad , \qquad x^\alpha \in \partial\Pi \; .$$

W tym przypadku różne od zera są tylko reakcje

$$S_\alpha = \pm \mu(\tilde{u}_\alpha^{(k)} + \tilde{v}^{(k)}_{,\alpha}) \cos k\pi \quad , \qquad x^i \in \Pi \times \left\{\pm h\right\}$$

Składowe wektora przemieszczenia określone są wzorem

$$w_i(x^j) = \delta_i^\alpha \frac{\tilde{u}_\alpha^{(k)}}{\alpha_k} \sin \alpha_k x^3 + \delta_i^3 \tilde{v}^{(k)} \cos \alpha_k x^3$$

Identyczne co do postaci z (6.31) i (6.32) równania oraz warunki brzegowe otrzymamy także dla

$$\tilde{p} = \tilde{Y} = \sin \alpha_k x^3$$

W tym przypadku składowe wektora przemieszczenia określa wzór

$$w_i(x^j) = -\delta_i^{\alpha}\frac{\tilde{u}_{\alpha}^{\prime(k)}}{\alpha_k}\cos\alpha_k x^3 + \delta_i^3\tilde{v}^{\prime(k)}\sin\alpha_k x^3 ,$$

a różne od zera są tylko reakcje

$$S_3^i = \pm[(2\mu+\lambda)\alpha_k\tilde{v}^{\prime(k)} - \frac{1}{\alpha_k}\lambda\,\tilde{u}^{\alpha(k)}_{,\alpha}]\cos k\pi , \qquad x^1 \in \Pi\times\left\{\pm h\right\} .$$

Zatem, jeżeli funkcje $q_3(x^1)$ i $X_3(x^1)$ można rozwinąć w szereg Fouriera

$$q_3(x^1) = q_3^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} q_3^{(k)}\cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} q_3^{\prime(k)}\sin\alpha_k x^3 ,$$

$$X_3(x^1) = X_3^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_3^{(k)}\cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} X_3^{\prime(k)}\sin\alpha_k x^3 ,$$

to otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$w_{\alpha}(x^i) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{u}_{\alpha}^{\prime(k)}}{\alpha_k}\sin\alpha_k x^3 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{u}_{\alpha}^{\prime(k)}}{\alpha_k}\cos\alpha_k x^3 ,$$

(6.33)

$$w_3(x^1) = \tilde{v} + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{v}^{(k)}\cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{v}^{\prime(k)}\sin\alpha_k x^3$$

Wielkość $\tilde{v}$ należy wyznaczyć z równania (5.3) dla wyrazów $q_3^{(0)}$ i $X_3^{(0)}$, a wielkości $\tilde{u}_{\alpha}^{(k)}$, $\tilde{v}^{(k)}$ i $\tilde{u}_{\alpha}^{\prime(k)}$, $\tilde{v}^{\prime(k)}$ z równań (6.31) odpowiednio dla wyrazów $q_3^{(k)}$, $X_3^{(k)}$ i $q_3^{\prime(k)}$, $X_3^{\prime(k)}$

Rozwiązanie (6.33) tak jak rozwiązanie (6.26) będzie dla wielu zagadnień bardzo mało różnić się od rozwiązania tego problemu według równań teorii sprężystości bez więzów wewnętrznych.

7. UWAGI KOŃCOWE

Jeżeli rozważany element jest obciążony siłami $q^i(x^j)$, przyłożonymi do powierzchni $\partial\Pi\times L$, to ogólne rozwiązanie można uzyskać stosując zasadę superpozycji. Najpierw można uwzględnić oddzielnie składowe q^α a następnie oddzielnie składową q^3. Rozwiązanie będzie miało w tym przypadku postać:

$$w_\alpha(x^i) = u_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_\alpha^{(k)} - \frac{\tilde{u}_\alpha^{,(k)}}{\alpha_k}\right)\cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_\alpha^{,(k)} + \frac{\tilde{u}_\alpha^{(k)}}{\alpha_k}\right)\sin\alpha_k x^3 ,$$

(7.1)

$$w_3(x^i) = \tilde{v} + v x^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{v}^{(k)} - \frac{v^{,(k)}}{\alpha_k}\right)\cos\alpha_k x^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{v}^{,(k)} + \frac{v^{(k)}}{\alpha_k}\right)\sin\alpha_k x^3$$

Wszystkie współczynniki występujące w szeregach (7.1) można wyznaczyć z omówionych w tej pracy równań. Są to równania dwuwymiarowe. Można je rozwiązywać dobrze znanymi sposobami. Wydaje się, że bardzo dogodna w tym zakresie może być metoda funkcji zmiennej zespolonej. Oprócz tego można, korzystając z rezultatów tej pracy, zbudować różne modele dla różnych, szczególnych obciążeń, tak jak w pierwszym przykładzie.

Widać zatem, że możliwości praktycznych zastosowań mechaniki analitycznej kontinuum są niezwykle szerokie.

Oprócz więzów (3.2) można rozważać także więzy ogólniejszej postaci, tzn. więzy drugiego rzędu, więzy prowadzące do jednowymiarowych zagadnień brzegowych oraz więzy dyskretyzacyjne. We wszystkich przypadkach można zbudować modele nie sprzeczne z mechaniką trójwymiarowego ośrodka ciągłego, które jednocześnie umożliwią otrzymanie efektywnych rozwiązań wielu istotnych zagadnień inżynierskich.

Przykład zastosowania więzów prowadzących do jednowymiarowych zagadnień brzegowych w liniowej teorii skręcania prętów podano w pracy [14] , a przykład zastosowania więzów dyskretyzacyjnych w pracy [13] . Ponadto istnieje możliwość sterowania więzami. Przykładem częściowego sterowania jest szukanie wartości stałych a^K lub $\bar{a}^K$ z warunku minimum odpowiedniej funkcji $\Phi(a^K)$ lub $\Phi(\bar{a}^K)$, omówionych w tej pracy.

Rezultaty uzyskane w ramach teorii liniowej, po opracowaniu metodycznym, mogą być wprowadzone do programu nauczania przedmiotu "teoria sprężystości" w wyższych szkołach technicznych, a następnie również do programów nauczania przedmiotów "wytrzymałość materiałów" i "mechanika budowli". Pozwoli to wielu znanym technicznym teoriom nadać ścisłe podstawy naukowe oraz zbudować szereg nowych uproszczonych modeli obliczeniowych.

LITERATURA

[1] W. Nowacki: Teoria sprężystości, PWN, Warszawa, 1970.

[2] Cz. Woźniak: Constrained Continuons Media I - III, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. 3,4, 1973.

[3] Cz. Woźniak: On the Elastodynamics of Material Continua with Internal Constraints, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci.Techn. 7-8, 1974.

[4] Cz. Woźniak: Elastic Bodies with Constraints Imposed on Deformations, Stresses and Momenta, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. 7-8, 1974.

[5] Cz. Woźniak: Material Continua with Discontinuos Internal Constraints, Bull. Acad. Polon. Sci, Ser, Sci. Techn. 7-8, 1974.

[6] Cz. Woźniak: Non Linear Mechanics of Constrained Material Continua. Foundations of the Theory, Arch. Mech. 26, 1, 1974.

[7] Cz. Woźniak: Elastokinematyka form konstrukcyjnych, [w:] "Dźwigary powierzchniowe", Ossolineum 1975.

[8] Cz. Woźniak: Non-Linear Mechanics of the Constrained and Discretized Material Continua, CISM, Udine, 1973.

[9] Cz. Woźniak: Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego, Prace IPPT 50/1975.

[10] Cz. Woźniak: On the Analytical Mechanics of Slender Bodies, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 4, 1975.

[11] M. Kleiber: Yield Conditions for the Constrained Bodies, Bull. Acad. Polon. Sci, Ser, Sci. Techn. 5, 1973.

[12] M. Kleiber: Discretized Formulation of The Exact Theory of Elastic-Plastic Shells, Symposium "Discrete Methods in Engineering", Milano, Sept. 1974.

[13] W. Kufel: Dyskretyzowane ciała sprężyste jako kontinua ze sterowanymi więzami /rozprawa doktorska, Wydz. Mat. Mech. UW., 1974/.

[14] K. Mazur - Śniady: Some Problem of Torsion of Prismatic Bods as the Bodies with Internal Constraints, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 7-8, 1974.

[15] J. Utkin: On the Technical Theory of Prismatic Elastic Rods, Bull, Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 1, 1975.

[16] J. Wyrwiński: Małe odkształcenia nałożone na skończone odkształcenia sprężyste ciał z wewnętrznymi więzami, [w:] "Dynamika układów sprężystych", Ossolineum, 1976.

[17] J. Boblewski, K.H. Bojda: Stress Equations for a Pseudoplane State of Equilibrium, Bull, Acad. Polon. Sci., Ser., Sci. Techn., 10, 1976.

[18] F. R. Gantmacher: Wykłady z mechaniki analitycznej, PWN, Warszawa, 1972.

[19] G.C. Moisil: Asupra sistemelor de ecuatii cu derivate partiale lineare si cu coeficienti constanti Bull. Sci. Acad. ser. A, vol. 1, 1949.

[20] J. Boblewski, K.H. Bojda, Cz. Woźniak: Plane Equilibrium of Certain Spatial Structures. Mech. Res. Comm., Vol. 3, No. 4, 1976.

[21] C. Truesdell, W. Noll: The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, III/3 Springer-Verlag 1965.

TEORIA UOGÓLNIONYCH PSEUDOPŁASKICH STANÓW RÓWNOWAGI SPRĘŻYSTEJ

Streszczenie

W pracy omówiono liniową teorię ciał z wewnętrznymi więzami dla materiałów sprężystych i dla więzów prowadzących do dwuwymiarowych problemów brzegowych.

Rozważania przeprowadzono dla więzów rzędu pierwszego, to znaczy takich, których równania nie zawierają pochodnych współrzędnych uogólnionych. Omówiono równania przemieszczeniowe i naprężeniowe.

W dalszej części wyprowadzono równania przemieszczeniowe dla szczególnego typu więzów opisanych równaniami, zawierającymi sześć współrzędnych uogólnionych oraz pokazano, jak z wyprowadzonych równań wynikają wzory dla znanych zagadnień płaskich liniowej teorii sprężystości.

W ostatniej części przedstawiono nowe dwuwymiarowe modele obliczeniowe dla szerokiej klasy zagadnień trójwymiarowych.

Przedstawione modele umożliwiają otrzymanie rozwiązań dla wielu istotnych zagadnień technicznych.

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПСЕВДОПЛОСКИХ СОСТОЯНИЙ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ

Резюме

В работе обсуждается линейная теория тел с внутренними связями и для связей, ведущих к двухмерным краевым задачам.

Рассуждение отнесено к связям первого рода, то есть таким, в уравнениях которых нет производных обобщенных координат. Рассмотрены уравнения в напряжениях и в перемещениях.

В дальнейшем выведены уравнения в перемещениях для специального типа связей, описанных уравнениями, включающими шесть обобщенных координат и показано, как из выведенных уравнений следуют формулы для известных задач линейной теории упругости.

В последней части работы представлены новые двухмерные модели для широкого класса трёхмерных задач.

Представленные модели делают возможным получение решений для многих важных технических вопросов.

THEORY OF GENERALIZED PSEUDOPLANE STATES
OF ELASTIC EQUILIBRIUM

Summary

The linear theory of bodies with internal constraints for elastic materials and for constraints leading to two- dimensional problems has been described in this work.

The analysis has been made for constraints of first order the equations of which do not contain the derivatives of the generalized coordinates. The stress equations and the displacement equations have been also discussed.

Further, the displacement equations for a special type of constrains described by equations containing six generalized Coordinates have been derived. Te way obtaining the equations of the well-known two-dimensional problems of the linear theory of elasticity from the above mentioned equations have been skown.

In the last part of this work new two- dimensional analytical models for the wide range of three - dimensional problems have been presented.

The presented models render possible solution of many important technical problems.