ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ELEKTRYKA

Z. 72
GLIWICE
1980

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 665

MACIEJ SIWCZYŃSKI

TECHNIKI ALGEBR BANACHA SYGNAŁÓW CZASOWO WIELOWYMIAROWYCH W TEORII NIELINIOWYCH UKŁADÓW ANALITYCZNYCH

PL ISSN 0072-4688

GLIWICE 1980

OPINIODAWCY
Prof. dr hab. Edward Kącki
Prof. dr hab. inż. Zygmunt Nowomiejski

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU
Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI
Wojciech Mikołajków

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Kazimiera Rymarz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 3,9 Ark. druk. 4,625 Papier offset kl. V 70x100, 80 g
Oddano do druku 24.07.1980 Podpis. do druku 14.10 1980 Druk ukończ. w listop. 1980
Zamówienie 974/80 Cena zł 10,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP

Przy badaniu dynamiki układów nieliniowych dają się zauważyć trzy podstawowe kierunki. Pierwszy - *stosowany* - charakteryzuje się dążeniem do uzyskania algorytmu rozwiązania równań. Cechą drugiego - *funkcjonalno-teoretycznego* - jest dążenie do możliwie ogólnego stawiania zagadnień. Metodą badawczą jest tu zwykle analiza funkcjonalna, a główną uwagę poświęca się problemom jakościowym i istnienia rozwiązań równań. Trzeci kierunek, łączący dwa poprzednio wymienione, ale dający priorytet pierwszemu, nazwijmy umownie *konstruktywnym*. Ta praca dotyczy konstruktywnej teorii nieliniowych operatorów analitycznych układów czasowo dyskretnych.

Na początku podane zostaną podstawowe oznaczenia i określenia. Przez $\mathcal{N}, \mathcal{N}_+, R, R_+, C$ oznaczać będziemy odpowiednio zbiory: liczb całkowitych, liczb całkowitych nieujemnych, liczb rzeczywistych, liczb rzeczywistych nieujemnych, liczb zespolonych. *Sygnałem czasowo dyskretnym*, w skrócie SDSg (ang. SAMPLED - DATA SIGNAL), nazywać będziemy odwzorowanie $x: \mathcal{N} \to C$. Zbiór wszystkich sygnałów czasowo dyskretnych będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}$. *Układ czasowo dyskretny*, w skrócie SDS (ang. SAMPLED - DATA SYSTEM), będziemy utożsamiać z *odwzorowaniem* zbioru $\mathcal{D}$ w siebie. Takie określenie odpowiada definicji układu funkcjonalnego [35].

Odtąd symbolem $\sum_{n\in\mathcal{N}} x(n)$ będziemy oznaczać sumę wartości $x(n)$ funkcji $x\in\mathcal{D}$ po wszystkich wartościach $n\in\mathcal{N}$, obliczoną jako suma odpowiedniego szeregu nieskończonego. Suma ta nie będzie zależała od porządku sumowania gdyż zawsze będzie obowiązywało założenie o absolutnej zbieżności szeregu.

Liniowy czasowo zmienny, czasowo dyskretny układ, w skrócie LTVSDS (ang. LINEAR TIME - VARYING SAMPLED - DATA SYSTEM), opisany jest operatorem $\hat{h}: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, określonym następująco:

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{m\in\mathcal{N}} h(n,m)\, x(m), \qquad (1.1)$$

gdzie h jest odpowiednio określoną C - wartościową funkcją zadaną w zbiorze $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$. Będziemy ją czasem nazywać jądrem operatora $\hat{h}$. Ze względów fizycznych będą rozpatrywane wyłącznie operatory przyczynowe [2, 13, 16, 17, 20, 39], dla których

$$h(n,m) = 0 \quad \text{dla} \quad n < m.$$

Jądro operatora $\hat{h}$ jest więc nieskończoną macierzą dolną trójkątną. Iloczyn i odwrotności macierzy dolnych trójkątnych (o ile istnieją), również są macierzami dolnymi trójkątnymi. Dlatego na podzbiorach takich macierzy można tworzyć algebry, co ma duże znaczenie podczas analizy i syntezy LTVSDS przy zastosowaniu maszyn cyfrowych.

Opis LTVSDS za pomocą macierzy dolnych trójkątnych o s k o ń c z o n y c h rozmiarach po raz pierwszy stosują FRIEDLAND [20], a następnie CRUZ [12] i NAYLOR [36]. Podejście takie jest wygodne z punktu widzenia wykonywania obliczeń, ale nie jest wystarczające, bowiem nie pozwala na badanie istnienia rozwiązań równań, stabilności, ani też na badanie zachowania się sygnałów w nieskończoności. Niniejsza praca, oparta na teorii algebr Banacha operatorów a nie na teorii macierzy o skończonych rozmiarach wolna jest od tych wad.

Dla układu czasowo niezmienniczego, w skrócie LTISDS (ang. LINEAR TIME - INVARIANT SAMPLED - DATA SYSTEMS), operator (1.1) przechodzi w operator splotu, tj. funkcja $h: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ przybiera postać $h(n-m)$ i wówczas

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}} h(n-m)\, x(m). \tag{1.2}$$

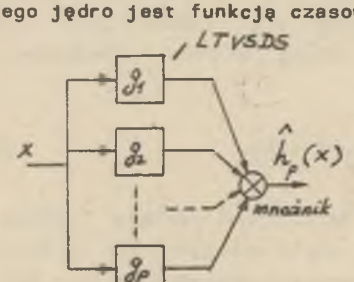
W tablicy 1.1 zestawiono przykładowo jądra operatorów niektórych prostych układów liniowych.

Układy nieliniowe wymagają wprowadzenia pojęcia sygnału c z a s o w o w i e l o w y m i a r o w e g o. Weźmy pod uwagę układ opisany za pomocą schematu blokowego widocznego na rys. 1.1, złożony z p różnych LTVSDS i z mnożnika. Nietrudno się przekonać, że odpowiada mu następujący operator

$$\left[\hat{h}_p(x)\right](n) = \sum_{m_1 \in \mathcal{N}} \dots \sum_{m_p \in \mathcal{N}} g_1(n,m_1) \dots g_p(n,m_p)\, x(m_1) \dots x(m_p) =$$

$$= \sum_{m_1 \in \mathcal{N}} \dots \sum_{m_p \in \mathcal{N}} h_p(n,m_1,\dots,m_p)\, x(m_1) \dots x(m_p), \tag{1.3}$$

którego jądro jest funkcją czasowo wielowymiarową.



Rys. 1.1. Układ nieliniowy złożony ze skończonej liczby LTVSDS i mnożnika

Operator (1.3) nazywa się operatorem j e d n o r o d n y m stopnia p. Szerszą klasę układów nieliniowych opisuje operator typu:

$$\hat{h}(x) = \hat{h}_1(x) + \hat{h}_2(x) + \dots + \hat{h}_k(x), \tag{1.4}$$

zwany operatorem w i e l o m i a n o w y m stopnia k. Jeżeli szereg

Tablica 1.1

Jądra operatorów niektórych prostych układów liniowych

Układ czasowo zmienny	$\begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ & h(0,0) & 0 & 0 & \\ & h(1,0) & h(1,1) & 0 & \\ & h(2,0) & h(2,1) & h(2,2) & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & h(n,0) & h(n,1) & h(n,2) & \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$
Układ czasowo niezmienniczy	$\begin{bmatrix} & & & \cdots & & \\ & h(0) & 0 & 0 & 0 & \\ & h(1) & h(0) & 0 & 0 & \\ \cdots & h(2) & h(1) & h(0) & 0 & \cdots \\ & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \\ & & & \cdots & & \end{bmatrix}$
Wzmacniacz ze zmiennym wzmocnieniem	$\begin{bmatrix} & & & \cdots & & \\ & h(0) & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & h(1) & 0 & 0 & \\ \cdots & 0 & 0 & h(2) & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & h(3) & \\ & & & \cdots & & \end{bmatrix}$
Integrator dyskretny (sumator) $h(n,k) = 1, \quad k \leqslant n$ $= 0, \quad k > n$	$\begin{bmatrix} & & \cdots & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$
Układ różnicujący $h(n,k) = 1, \quad k=n$ $=-1, \quad k=n-1$ $= 0, \quad k > n$ $= 0, \quad k < n-1$	$\begin{bmatrix} & & \cdots & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & -1 & 1 & \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$
Wzmacniacz całkujący ze zmiennym wzmocnieniem	$\begin{bmatrix} & & & \cdots & & \\ & h(0) & 0 & 0 & 0 & \\ & h(0) & h(1) & 0 & 0 & \\ \cdots & h(0) & h(1) & h(2) & 0 & \cdots \\ & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & \\ & & & \cdots & & \end{bmatrix}$

$$\hat{h}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \hat{h}_p(x), \qquad (1.5)$$

zwany szeregiem Volterry, jest zbieżny w określonym sensie[1], to wyrażenie (1.5) definiuje operator a n a l i t y c z n y. Odpowiada mu szeroka klasa układów nieliniowych. Badanie zbieżności szeregów (1.5) jest więc zagadnieniem ważnym ale i trudnym, dlatego istnieje stosunkowo niewiele prac na ten temat. Wydaje się, że najdalej sięgające wyniki dotyczące zbieżności czasowo ciągłych szeregów Volterry znajdują się w pracach CHRISTENSENA i TROTTA [10, 57, 58]. Wyniki te nie są jednak zadowalające. W niniejszej pracy uzyskano kilka nowych (zdaniem autora) rezultatów:

(I) sformułowano warunki konieczne i dostateczne stabilności BIBO (ang. BOUNDED INPUT BOUNDED OUTPUT - STABILITY) oraz stabilności asymptotycznej układów opisanych operatorami analitycznymi (twierdzenia 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3);

(II) sformułowano warunki konieczne i dostateczne stabilności asymptotycznej odpowiedzi okresowej nieliniowych układów analitycznych z okresowo zmiennymi parametrami (twierdzenie 4.2.2);

(III) podano warunki dostateczne na to, aby operator układu zadany w postaci uwikłanej można było rozwikłać za pomocą odpowiedniego operatora analitycznego (twierdzenia 3.5.1 i 4.3.1) oraz podano algorytm takiego rozwikłania (paragraf 3.5).

Jednorodny operator czasowo niezmienniczy ma postać:

$$\left[\hat{h}_p(x)\right](n) = \sum_{m_1 \in \mathcal{N}} \dots \sum_{m_p \in \mathcal{N}} h_p(n-m_1, \dots, n-m_p)\, x(m_1) \dots x(m_p). \qquad (1.6)$$

Analogicznie wprowadza się pojęcie operatora analitycznego. Teorii takich układów poświęconych jest więcej prac. Klasyfikację operatorów analitycznych czasowo ciągłych można znaleźć w pracy SMETSA [55]. Zastosowaniom funkcji zespolonych wielu zmiennych do teorii układów analitycznych poświęcone są prace [4] i [32]. Zagadnienia identyfikacji układów nieliniowych czasowo ciągłych przy użyciu operatorów analitycznych, metodą częstotliwościową, poruszone zostały w pracach [5], [61]. W pracach [25], [45] podano pewne szczególne metody syntezy operatorów wielomianowych czasowo ciągłych. Wszystkie wymienione tu prace mają raczej charakter s t o s o w a n y. Niniejsza praca formułuje teorię operatorów analitycznych czasowo niezmienniczych w odmienny sposób, za pomocą a l g e b r B a n a c h a sygnałów czasowo wielowymiarowych, będących jądrami operatorów

---

[1] Paragraf 3.5.

typu (1.6). Takie ujęcie nadało pracy charakter k o n s t r u k t y w n y i pozwoliło na uzyskanie pewnych nowych (zdaniem autora) rezultatów. Niektóre z nich to:

(I) zastosowanie funkcji wielu zmiennych w algebrach Banacha do obliczania wartości jąder operatorów analitycznych (wzory (3.4.9) i (3.4.18));

(II) wprowadzenie algebry Banacha sygnałów wielookresowych (paragraf 3.2)

(III) metoda identyfikacji nieliniowego SDS przy użyciu operatora wielomianowego (paragrafy 3.4 i 3.5), odmienna od metod częstotliwościowych przedstawionych dla operatorów czasowo ciągłych w pracach [5], [61];

(IV) metoda syntezy operatora wielomianowego czasowo dyskretnego, opisana w paragrafie 3.4.

W rozdziale 2 podano podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii algebr Banacha. Głównym celem tego rozdziału jest odpowiednie sformułowanie twierdzeń 2.9 i 2.10 o izomorfizmach algebr Banacha i algebr funkcji analitycznych wielu zmiennych. Twierdzenia te odgrywają w dalszym ciągu rolę kluczową. Ważne jest też twierdzenie 2.11, znajdujące zastosowanie przy badaniu stabilności układów analitycznych czasowo niezmienniczych.

Wyniki przedstawione w tej pracy mogą znaleźć zastosowanie podczas analizy, identyfikacji i syntezy nieliniowych układów czasowo dyskretnych oraz czasowo ciągłych po uprzednim spróbkowaniu.

Symbolami ■ □ oznaczono odpowiednio zakończenia dowodów twierdzeń lub lematów.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA TEORII ALGEBR BANACHA

A l g e b r ą B a n a c h a nazywa się przestrzeń Banacha $\mathcal{B}$ z normą $\|\cdot\|$, w której określono mnożenie spełniające następujące warunki:

$$\bigwedge_{x,y,z\in\mathcal{B},\alpha\in\mathbb{C}} x(yz) = (xy)z,\ (x+y)z = xz + yz,\ x(y+z) = xy = xz,$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),\ \|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

$$\bigvee_{e\in\mathcal{B}} xe = ex = x,\ \|e\| = 1.$$

Przez $G(\mathcal{B})$ oznaczmy zbiór wszystkich elementów algebry $\mathcal{B}$, które posiadają elementy odwrotne, tj.:

$$G(\mathcal{B}) = \left\{x\in\mathcal{B} \,\middle|\, \bigvee_{x^{-1}\in\mathcal{B}} xx^{-1} = x^{-1}x = e\right\}.$$

W i d m e m $Sp(x)$ elementu $x\in\mathcal{B}$ nazywamy zbiór

$$Sp(x) = \left\{\lambda\in\mathbb{C} \,\middle|\, \lambda e - x \notin G(\mathcal{B})\right\}.$$

Zbiór $\widetilde{Sp}(x) = \mathbb{C} - Sp(x)$ nazywa się z b i o r e m r e z o l w e n t y elementu x.

Odwzorowanie $r_x: \widetilde{Sp}(x) \to G(\mathcal{B})$ takie, że

$$r_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

nazywamy r e z o l w e n t ą elementu x.

Liczbę $\varrho(x) = \sup\limits_{\lambda\in Sp(x)} |\lambda|$ nazywa się promieniem spektralnym elementu $x\in\mathcal{B}$

TWIERDZENIE 2.1.

Jeżeli $\mathcal{B}$ jest algebrą Banacha, $x\in\mathcal{B}$ i $\|x\| < 1$, to:

(I) $$(e-x)\in G(\mathcal{B}) \qquad [40,\ 42],$$

(II) $$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0} x^n \qquad [40,\ 42],$$

(2.1)

(III) $$\frac{1}{1+\|x\|} \leq \|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}. \tag{2.2}$$

Dowód. Utwórzmy w B następujący ciąg:

$$s_n = e + x + x^2 + \ldots + x^n \tag{2.3}$$

Ma miejsce następujące oszacowanie:

$$\|s_m - s_n\| = \|x^m + x^{m-1} + \ldots + x^{n+1}\| \leq \|x\|^m + \|x\|^{m-1} + \ldots + \|x\|^{n+1}, \quad m>n,$$

z którego wynika, że przy $\|x\| < 1$ istnieje dowolnie małe $\varepsilon > 0$, że dla $n,m > N$ zachodzi nierówność $\|s_m - s_n\| < \varepsilon$. Zatem $\{s_n\}$ jest ciągiem podstawowym w B. Ciąg ten ma w B granicę s, gdyż B jest przestrzenią zupełną. Zachodzi równość

$$s_n(e-x) = (e-x)s_n = e - x^{n+1}. \tag{2.4}$$

Ponieważ $\|x^n\| \leq \|x\|^n \to 0$, to z równości (2.4), na mocy ciągłości mnożenia[2], wynika że s jest elementem odwrotnym do $(e-x)$, a więc $(e-x) \in G(B)$. Prócz tego z wyrażenia (2.3) otrzymuje się

$$s = (e-x)^{-1} = e + x + x^2 + \ldots$$

Oszacowanie normy elementu s_n w wyrażeniu (2.3) daje

$$\|s_n\| \leq 1 + \|x\| + \|x\|^2 + \ldots + \|x\|^n = \frac{1-\|x\|^n}{1-\|x\|},$$

skąd wynika, że

$$\|s\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}.$$

Zachodzi ponadto

$$e = (e-x)s = s - xs,$$

skąd otrzymuje się oszacowanie

$$1 = \|s - xs\| \leq \|s\| + \|xs\| \leq (1+\|x\|)\|s\|.$$

---

[2] Ciągłość mnożenia wynika bezpośrednio z nierówności $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Zatem

$$\|a\| \geq \frac{1}{1 + \|x\|}. \blacksquare$$

Twierdzenie to podaje warunek dostateczny stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym, gdzie x jest operatorem układu z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Warunek ten ma jednak małe znaczenie praktyczne, bo chociaż prosty, jest zbyt rygorystyczny.

Za ŻELAZKĄ [67] podamy określenie całkowania B -wartościowych funkcji określonych w $\mathbb{C}$. Niech L będzie zorientowanym łukiem zwartym w $\mathbb{C}$, a x funkcją ciągłą określoną na L o wartościach w B. C a ł k ą funkcji x po łuku L nazywamy granicę

$$\int_L x(\lambda)d\lambda \triangleq \lim_{\max|\lambda_{k+1}-\lambda_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(\lambda'_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k),$$

gdzie λ_1, $\lambda'_1 \in L$, a punkt λ'_k leży na łuku L między punktami λ_k i λ_{k+1}. Punkt λ_{k+1} jest późniejszy w sensie orientacji łuku od punktu λ_k.

TWIERDZENIE 2.2 [42]

Jeżeli B jest algebrą Banacha i $x \in B$, to:

(I) rezolwenta elementu x jest analityczną B -wartościową funkcją na $\widetilde{Sp}(x)$;

(II) $Sp(x)$ jest zbiorem niepustym domkniętym i ograniczonym;

(III) $\varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Dowód twierdzenia jest częściowo podobny do dowodu twierdzenia 10,13 podanego w [42]. Niech $|\lambda| > \|x\|$. Podstawiając $y = \lambda^{-1}x$ w wyrażeniu $\lambda e-x = \lambda(e-\lambda^{-1}x)$ mamy $\|y\| < 1$, zatem na mocy twierdzenia 2.1(I), $e-y \in G(B)$, a więc i $(\lambda e-x) \in G(B)$. Czyli $\lambda \notin Sp(x)$, co dowodzi, że $Sp(x)$ jest zbiorem ograniczonym. Wynika stąd też, że

$$\varrho(x) \leq \|x\|. \tag{2.5}$$

Dla określonego $|\lambda| > \|x\|$ zawsze można znaleźć takie $\varepsilon \in \mathbb{C}$, że $|\lambda + \varepsilon| > \|x\|$, a więc $\lambda + \varepsilon \in \widetilde{Sp}(x)$, czyli zbiór $\widetilde{Sp}(x)$ jest otwarty. Zatem zbiór $Sp(x)$ jest domknięty.

Gdy $\lambda, \mu \notin Sp(x)$, to z określenia rezolwenty wynika, że

$$\lambda e-x = [r_x(\lambda)]^{-1}$$

$$\mu e-x = [r_x(\mu)]^{-1}.$$

skąd

$$r_x(\mu) - r_x(\lambda) = (\lambda-\mu)r_x(\mu)r_x(\lambda). \tag{2.6}$$

Ma zatem miejsce następujące oszacowanie:

$$\|r_x(\mu) - r_x(\lambda)\| \leq |\mu-\lambda| \, \|r_x(\mu)\| \, \|r_x(\lambda)\|,$$

z którego wynika, że funkcja r_x jest ciągła na $\widetilde{Sp}(x)$. Zatem z równości (2.6) otrzymuje się

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{r_x(\mu) - r_x(\lambda)}{\mu-\lambda} = -(r_x(\lambda))^2,$$

co dowodzi, że funkcja r_x jest analityczna na $\widetilde{Sp}(x)$.

Jeżeli $|\lambda| > \|x\|$, to stosując równość (2.1'), z twierdzenia 2.1 (II), otrzymuje się

$$r_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n. \tag{2.7}$$

Wybierając kontur Γ w postaci okręgu o promieniu $\varrho_1 > \varrho(x)$ i całkując szereg (2.7) wyraz po wyrazie otrzymuje się

$$x^n = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \lambda^n \, r_x(\lambda)d\lambda. \tag{2.8}$$

Aby udowodnić, że $Sp(x)$ jest zbiorem niepustym załóżmy, że jest przeciwnie. Wówczas r_x jest analityczna wszędzie na $\mathbb{C}$ i całka (2.8) równa jest zero dla wszystkich $n = 0,1,2,\ldots$ Lecz z drugiej strony $x^0 = e$, co prowadzi do sprzeczności, a więc $Sp(x)$ jest zbiorem niepustym.

Z ciągłości funkcji r_x na $\widetilde{Sp}(x)$ wynika, że istnieje taka liczba $M(\varrho_1) > 0$, że

$$\max_{\vartheta}\|r_x(\varrho_1 e^{j\vartheta})\| \leq M(\varrho_1). \tag{2.9}$$

Stosując nierówność (2.9) do wyrażenia (2.8) otrzymuje się oszacowanie

$$\|x^n\| \leq \varrho_1^{n+1} M(\varrho_1),$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \varrho_1.$$

Ostatecznie więc

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x). \tag{2.10}$$

Z drugiej strony, jeżeli $\lambda \in Sp(x)$, to z tożsamości:

$$(\lambda^n e - x^n) = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \lambda^{n-2} x + \ldots + x^{n-1})$$

wynika, że $\lambda^n e - x^n \in G(B)$, zatem $\lambda^n \in Sp(x^n)$. Czyli $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$, dla $n=1,2,3,\ldots$ W takim razie

$$\rho(x) \leq \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.11}$$

Z nierówności (2.10) i (2.11) wynika słuszność tezy III. ■

Z twierdzenia 2.1 wynika, że warunkiem dostatecznym, aby $(e-x) \in G(B)$ jest $\|x\| < 1$. Słabszym warunkiem jest nierówność $\rho(x) < 1$, ale ten warunek jest trudny w zastosowaniu. Rozwiązaniem kompromisowym może tu być poszukiwanie funkcji $v: B \to R_+$ takiej, że $\rho(x) \leq v(x) \leq \|x\|$. Wówczas warunek dostateczny na to, aby $(e-x) \in G(B)$, przyjmie postać nierówności $v(x) < 1$. Warunek ten jest słabszy niż $\|x\| < 1$, ale silniejszy niż $\rho(x) < 1$. Z twierdzenia 2.2 (III) wynika, że funkcję v można wybrać tak, aby $v(x) = \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, $n = 2$ lub 3 lub ....

Podamy teraz określenie B -wartościowej funkcji wymiernej określonej w B [40, 42, 67].

Niech f będzie C - wartościową funkcją wymierną określoną w C taką że

$$f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \lambda^n + \sum_{m,k \geq 0} \gamma_{mk} (\lambda - \alpha_m)^{-k}, \tag{2.12}$$

gdzie sumy zawierają skończoną liczbę składników. Za pomocą funkcji f można następująco określić B -wartościową funkcję $\vec{f}$ określoną w B:

$$\vec{f}(x) = \sum_{n \geq 0} \beta_n x^n + \sum_{m,k} \gamma_{mk} (x - \alpha_m e)^{-k}, \tag{2.13}$$

gdzie $\alpha_m \notin Sp(x)$.

TWIERDZENIE 2.3 [42]

Niech Ω będzie otwartym zbiorem w C takim, że $Sp(x) \subset \Omega$. Jeżeli funkcja (2.12) jest analityczna w Ω, a kontur $\Gamma \subset \Omega$ obejmuje $Sp(x)$, to:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} r_x(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \tag{2.14}$$

gdzie r_x jest rezolwentą elementu $x \in B$.

Dowód przeprowadzamy za RUDINEM ([42], tw. 10.25). Wystarczy udowodnić, że przy $x \in B$, $\alpha \in C$, $\alpha \notin Sp(x)$ zachodzi

$$y_n \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (\alpha e - x)^n \tag{2.15}$$

dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Z tożsamości

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}$$

wynika, że

$$y_n = (\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^{n+1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda =$$

$$= (\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1} y_{n+1}. \tag{2.16}$$

Pierwszy składnik sumy w wyrażeniu (2.16) jest równy zero, ponieważ funkcja $(\alpha - \lambda)^n$ jest analityczna w obszarze objętym przez kontur Γ . Zatem otrzymuje się

$$y_n = (\alpha e - x)^{-1} y_{n+1}. \tag{2.17}$$

Ze wzoru (2.8) wynika natomiast, że

$$y_0 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = x^0 = e. \tag{2.18}$$

Na zasadzie indukcji z wyrażeń (2.17) i (2.18) wynika prawdziwość formuły (2.14). ■

W teorii algebr Banacha można udowodnić twierdzenie analogiczne do (2.3) przy znacznie słabszych założeniach dotyczących funkcji f, według których funkcja ta nie musi być wymierna. Poniższe twierdzenie ma charakter pomocniczy.

TWIERDZENIE 2.4 (RICKART [40])

Niech B będzie algebrą Banacha, $x \in B$, Ω -otwarty zbiór w C , $Sp(x) \subset \Omega$ Istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $Sp(x+y) \subset \Omega$, jeżeli tylko $y \in B$ i $\|y\| < \varepsilon$.

Dowód. Z twierdzenia 2.2 (I) wynika, że funkcja $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ jest ciągła względem λ na $\widetilde{Sp}(x)$. Z twierdzenia 2.1 (III), dla $|\lambda| > \|x\|$ wynika oszacowanie:

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|x\|},$$

z którego widać, że $\|(\lambda e-x)^{-1}\| \to 0$ przy $|\lambda| \to \infty$. Istnieje więc taka liczba dodatnia N, że

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\| < N$$

dla wszystkich $\lambda \notin \Omega$

Jeżeli $y \in B$, $\|y\| < \frac{1}{N}$ i $\lambda \notin \Omega$, to:

$$\|(\lambda e-x)^{-1}y\| < 1,$$

a zatem z tożsamości

$$\lambda e - (x+y) = (\lambda e-x)\left[e - (\lambda e-x)^{-1}y\right]$$

i z twierdzenia 2.1 (I) wynika, że $\lambda e - (x+y) \in G(B)$. Dlatego $\lambda \in Sp(x+y)$. Kładąc $\varepsilon = \frac{1}{N}$, kończymy dowód twierdzenia. ■

Podamy teraz następujące określenia. Niech B będzie algebrą Banacha, a Ω otwartym zbiorem w $\mathbb{C}$. Przez $\mathcal{A}(\Omega)$ oznaczmy algebrę wszystkich $\mathbb{C}$-wartościowych funkcji zadanych w $\mathbb{C}$, analitycznych w Ω z mnożeniem określonym w zwykły sposób, tj. $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{C}} fg(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$. Wprowadźmy następujący zbiór:

$$B_{\Omega} = \left\{ x \in B \;\middle|\; Sp(x) \subset \Omega \right\}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 2.4 zbiór B_{Ω} jest otwarty w B. Przez $\vec{\mathcal{A}}(B_{\Omega})$ oznaczmy zbiór wszystkich B-wartościowych funkcji $\vec{f}$ określonych na B_{Ω} takich, że

$$\vec{f}(x) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(\lambda) r_x(\lambda) d\lambda, \tag{2.19}$$

gdzie $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, a kontur Γ leży w Ω i obejmuje $Sp(x)$.

TWIERDZENIE 2.5 [42]

(I) Zbiór $\vec{\mathcal{A}}(B_{\Omega})$ tworzy algebrę, przy czym odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \vec{\mathcal{A}}(B_{\Omega})$ określone wzorem (2.19), jest izomorfizmem;

(II) odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \vec{\mathcal{A}}(B_{\Omega})$ jest ciągłe w następującym sensie: $f_n \to f$, $f_n \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \bigwedge_{x \in B_{\Omega}} \vec{f}_n(x) \to \vec{f}(x)$[3].

[3] Zbieżność $f_n \to f$ jest jednostajna.

<u>Dowód</u>. Aby udowodnić tezę (II), zauważmy że norma $\|r_x(\lambda)\|$ jest ograniczona dla każdego $\lambda \in \Gamma$. Zatem, jeżeli $|f(\lambda) - f_n(\lambda)| < \varepsilon$ dla każdej funkcji $f_n \in \mathcal{A}(\Omega)$ i każdego $\lambda \in \Gamma$, to $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)\| \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi}\|\oint_\Gamma r_x(\lambda)d\lambda\|$ dla każdego $x \in B_\Omega$.

Aby udowodnić tezę (I) załóżmy, że $\tilde{f}$ jest funkcją zerową algebry B, tj. $\bigwedge_{x \in B_\Omega} \tilde{f}(x) = 0$ (0 jest zerem algebry B). Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \Omega$ z wyrażenia (2.19) otrzymuje się

$$0 = \tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e,$$

skąd wynika, że f też jest funkcją zerową. Ponieważ odwzorowanie (2.19) jest liniowe, więc jest ono jednoznaczne. Aby wykazać multiplikatywność odwzorowania (2.19) weźmy dwie funkcje wymierne $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Wówczas z twierdzenia 2.3 wynika, że jeżeli $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ dla każdego $\lambda \in \Omega$, to $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ dla każdego $x \in B_\Omega$. Na podstawie twierdzenia Rungego ([42] tw. 13.9) dowolne funkcje f, g z $\mathcal{A}(\Omega)$ można aproksymować równomiernie na zwartych podzbiorach Ω ciągami funkcji wymiernych $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$. Zatem na podstawie udowodnionej poprzednio tezy (II) odwzorowanie określone wyrażeniem (2.19) jest multiplikatywne dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Czyli odwzorowanie to jest izomorfizmem. ∎ Dowód powyższy podano za RUDINEM ([42] tw. 10.27).

TWIERDZENIE 2.6 [40, 42]

Jeżeli $x \in B_\Omega$ i $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, to:

(I) $\tilde{f}(x) \in G(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in Sp(x)$

(II) $Sp(\tilde{f}(x)) = f(Sp(x))$.

<u>Dowód</u> podajemy za RUDINEM ([42], tw. 10.28).

(I) Jeżeli $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in Sp(x)$, to funkcja $g = f^{-1}$ jest analityczna na zbiorze Ω_1 takim, że $Sp(x) \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Ponieważ $fg=1$ na Ω_1, to z twierdzenia 2.5 (I) wynika, że $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$ dla każdego $x \in B_\Omega$, a więc $\tilde{f}(x) \in G(B)$. Na odwrót, jeżeli $f(\alpha) = 0$ dla pewnego $\alpha \in Sp(x)$, to istnieje taka funkcja $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, że dla $\lambda \in \Omega$

$$(\lambda - \alpha)u(\lambda) = f(\lambda),$$

skąd na podstawie twierdzenia 2.5 (I) otrzymuje się

$$(x - \alpha e)\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x)(x - \alpha e) = \tilde{f}(x).$$

Ponieważ $x - \alpha e \notin G(B)$, to $\tilde{f}(x) \notin G(B)$.

(II) Jeżeli $\beta \in Sp(\tilde{f}(x))$, to $\tilde{f}(x) - \beta e \notin G(B)$, zatem na podstawie udowodnionej tezy (I) istnieje takie $\lambda \in Sp(x)$, że $f(\lambda) - \beta = 0$, czyli $\beta \in f(Sp(x))$. A więc $Sp(\tilde{f}(x)) \subset f(Sp(x))$. Na odwrót, jeżeli $\beta \in f(Sp(x))$, to można znaleźć takie $\mu \in Sp(x)$, że $f(\mu) - \beta = 0$, a więc na podstawie tezy (I) $\tilde{f}(x) - \beta e \notin G(B)$, czyli $\beta \in Sp(\tilde{f}(x))$. Zatem $f(Sp(x)) \subset Sp(\tilde{f}(x))$, skąd wynika teza (II). ■

Poniższe twierdzenie dotyczy funkcji złożonych. Głosi ono, że jeżeli $h = g \circ f$, to $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

TWIERDZENIE 2.7 [42]

Jeżeli: $x \in B_\Omega$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\Omega_1 \supset f(Sp(x))$ (Ω_1 - zbiór otwarty) $g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$ $\Omega_0 = \{\mu \in \Omega \mid f(\mu) \in \Omega_1\}$, $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ dla każdego $\lambda \in \Omega_0$, to:

$$\tilde{h}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)).$$

Dowód. Wybierając kontur Γ_0, obejmujący $Sp(x)$, dla $\mu \in Sp(\tilde{f}(x)) = f(Sp(x))$ otrzymuje się

$$\left[\mu e - \tilde{f}(x)\right]^{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} \left[\mu - f(\lambda)\right]^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Wybierając kontur Γ_1, obejmujący $f(Sp(x))$, otrzymuje się

$$\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} g(\mu)\left[\mu e - \tilde{f}(x)\right]^{-1} d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} g(\mu)\left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} \left[\mu - f(\lambda)\right]^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda\right] d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} g(\mu)\left[\mu - f(\lambda)\right]^{-1} d\mu\right] (\lambda e - x)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x).$$ ■

W oparciu o twierdzenia 2.5 i 2.6 można sformułować następujące

TWIERDZENIE 2.8

Jeżeli istnieje B -wartościowa funkcja $\tilde{f}$ określona w B taka, że $\tilde{f}(e) = e$ i jeżeli $\tilde{f}$ spełnia jeden z warunków:

(I) $1 \notin Sp(\tilde{f}(x))$,

(II) $\|\tilde{f}(x)\| \leqslant 1$,

to $(e-x) \in G(B)$.

Dowód. (I) Przypuśćmy, że $(e-x) \notin G(B)$. Wówczas $1 \in Sp(x)$. Ponieważ (twierdzenie 2.5) $f(1) = 1$, to $1 \in f(Sp(x))$, a więc na mocy twierdzenia 2.6(II) $1 \in Sp(\tilde{f}(x))$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem. Zatem $(e-x) \in G(B)$.

(II) Jeżeli $\|\tilde{f}(x)\| < 1$, to na podstawie twierdzenia 2.1 (I) $e-\tilde{f}(x) \in G(\mathcal{B})$, a więc $1 \notin Sp(\tilde{f}(x))$. Zatem z części (I) twierdzenia wynika, że $(e-x) \in G(\mathcal{B})$. ■

W szczególnym przypadku funkcję f można wybierać w postaci wielomianu, którego suma współczynników jest równa jedności.

Głównym zadaniem tego paragrafu jest uogólnienie powyższych rezultatów na $\mathcal{B}$ -wartościowe funkcje wielu zmiennych z $\mathcal{B}$. W związku z tym wprowadzimy następujące przestrzenie:

$$\mathcal{R}^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 \in \ , \ldots, \alpha_n \in \ \right\},$$

$$C^n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \in C, \ldots, \lambda_n \in C \right\},$$

oraz zbiory:

$$\mathcal{N}^n = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \mid k_1 \in \mathcal{N}, \ldots, k_n \in \mathcal{N} \right\},$$

$$\mathcal{N}^n_+ = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \mid k_1 \in \mathcal{N}_+, \ldots, k_n \in \mathcal{N}_+ \right\}.$$

$\mathcal{R}^n$ i C^n są oczywiście przestrzeniami liniowymi nad polem liczb zespolonych z działaniami dodawania i mnożenia przez skalary określonymi w zwykły sposób, tj. $\alpha(\lambda_1, \ldots \lambda_n) + \beta(\mu_1, \ldots, \mu_n) \triangleq (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \ldots, \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)$. Zbiór $\mathcal{N}^n_+$ z określonym działaniem dodawania: $(k_1, \ldots, k_n) + (l_1, \ldots, l_n) \triangleq$ $= (k_1+l_1, \ldots, k_n+l_n)$ tworzy półgrupę, a zbiór $\mathcal{N}^n$ tworzy grupę ze względu na to działanie. Przez $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ oznaczmy odpowiednio elementy $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Mnożenie elementów $\mathcal{N}^n$ przez $m \in \mathcal{N}$ określamy następująco: $m(k_1, \ldots, k_n) = (mk_1, \ldots, mk_n)$. W tym sensie $-\mathbf{k} = (-1)\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{N}^n$.

We wszystkich podanych zbiorach określamy

$$\alpha^{\beta} = \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \ldots \alpha_n^{\beta_n}$$

(uwaga: α, β mogą należeć do różnych zbiorów pod warunkiem, że działanie jest poprawnie określone);

iloczyn skalarny w zbiorze $(\cdot)$

$$(\alpha, \beta)_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i;$$

moduł $|\cdot|_{(\cdot)}$ i normę $\|\cdot\|_{(\cdot)}$

$$|\alpha|_{(\cdot)} = (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}}_{(\cdot)}$$

$$\|\alpha\|_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Zapis $\alpha > \beta$, gdzie $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^n$ lub $\mathcal{N}^n$ lub $\mathcal{N}_+^n$ oznacza, że $\alpha_1 > \beta_1$, $\dots, \alpha_n > \beta_n$; analogicznie określa się $\alpha \geqslant \beta$

Zbiór $\mathbf{Z}$ w C^n definiujemy w następujący sposób:

$$\mathbf{Z} = (Z_1,\dots,Z_n) = \left\{\mu \in C^n \mid \mu_1 \in Z_1,\dots,\mu_n \in Z_n\right\}.$$

Wprowadzimy następujące pojęcia przynależności λ do $\mathbf{Z}$:

$$\lambda \in \mathbf{Z} \iff \bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} \lambda_i \in Z_i$$

$$\lambda \acute{\in} \mathbf{Z} \iff \bigvee_{i \in \{1,\dots,n\}} \lambda_i \in Z_i$$

wówczas

$$\lambda \notin \mathbf{Z} \iff \bigvee_{i \in \{1,\dots,n\}} \lambda_i \notin Z_i$$

$$\lambda \acute{\notin} \mathbf{Z} \iff \bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} \lambda_i \notin Z_i.$$

Inkluzja $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Y}$ oznaczać będzie, że $Z_1 \subset Y_1,\dots,Z_n \subset Y_n$.

Niech $\mathcal{B}$ będzie algebrą Banacha. Przez $\mathcal{B}^n$ oznaczmy zbiór

$$\mathcal{B}^n = \left\{X = (x_1,\dots,x_n) \mid x_1 \in \mathcal{B},\dots,x_n \in \mathcal{B}\right\}.$$

Działania dodawania i mnożenia przez skalar z C określamy w $\mathcal{B}^n$ następująco:

$$\alpha(x_1,\dots,x_n) + \beta(y_1,\dots,y_n) \triangleq (\alpha x_1+\beta y_1,\dots,\alpha x_n+\beta y_n).$$

Ponadto oznaczmy

$$X^{k} = x_1^{k_1}\, x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad X \in \mathcal{B}^n, \quad k \in \mathcal{N}^n$$

pod warunkiem, że istnieją ewentualne elementy odwrotne oraz:

$$\lambda v \triangleq (\lambda_1 v,\dots,\lambda_n v), \quad \lambda \in C^n, \quad v \in \mathcal{B},$$

$$X v \triangleq (x_1 v,\dots,x_n v), \quad X \in \mathcal{B}^n, \quad v \in \mathcal{B}.$$

Podobnie określa się vX, $v \in B$, $X \in B^n$.
Zbiór

$$Sp(X) = \left\{ \lambda \in C^n \mid \lambda_1 \in Sp(x_1), \dots, \lambda_n \in Sp(x_n) \right\}, X \in B^n,$$

będziemy nazywać widmem łącznym albo krótko - widmem elementu X.
Zauważmy, że

$$(\lambda e - X)^{-1} \in G(B) \Longleftrightarrow \lambda \notin Sp(X),$$

$$(\lambda e - X)^{-1} \notin G(B) \Longleftrightarrow \lambda \in Sp(X).$$

Przez $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ oznaczmy otwarty zbiór w C^n, tj. $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ są otwartymi zbiorami w C. Symbolem B_Ω^n oznaczmy zbiór $B_\Omega^n = \{X \in B^n \mid Sp(X) \subset \Omega\}$. Niech $\mathcal{A}(\Omega)$ będzie algebrą wszystkich C - wartościowych funkcji zadanych w C^n analitycznych w Ω ze zwykłym mnożeniem: $\bigwedge_{\lambda \in C^n} fg(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ (określenie funkcji analitycznej wielu zmiennych można znaleźć na przykład w pracy [41]).

Przez $\tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ oznaczmy zbiór wszystkich B - wartościowych funkcji określonych na B_Ω^n takich, że

$$\tilde{f}(X) = \frac{1}{(2\pi j)^n} \oint_\Gamma (\lambda e - X)^{-1} f(\lambda) d\lambda, \tag{2.20}$$

gdzie $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, kontur Γ_k obejmuje $S_p(x_k)$ i leży w Ω_k $k = 1,2,\dots,n$, a $d\lambda = d\lambda_1, \dots, d\lambda_n$.

TWIERDZENIE 2.9

Zbiór $\tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ tworzy algebrę, przy czym odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ określone wzorem (2.20) jest izomorfizmem.

<u>Dowód</u>. Ponieważ norma $\|(\lambda e - X)^{-1}\|$ jest ograniczona na Γ, to odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ jest ciągłe w następującym sensie:
$f_n \to f$, $f_n \in \mathcal{A}(\Omega) \Longrightarrow \bigwedge_{X \in B_\Omega^n} \tilde{f}_n(X) \to \tilde{f}(X)$. Z wyrażenia (2.20) wynika, że odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ jest liniowe. Jeżeli $\tilde{f}$ jest funkcją zerową, tj. taką, że $\bigwedge_{X \in B_\Omega^n} \tilde{f}(X) = 0$, to stosując wzór Cauchy'ego dla funkcji wielu zmiennych (na przykład [41], tw. 3.1) otrzymuje się:

$$0 = \tilde{f}(\alpha e) = \frac{1}{(2\pi j)^n} \oint (\lambda - \alpha)^{-1} f(\lambda) e \, d\lambda = f(\alpha) e$$

dla każdego $\alpha \in \Omega$, a więc f też jest funkcją zerową w $\mathcal{A}(\Omega)$. Zatem odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ jest wzajemnie jednoznaczne.

Podstawiając we wzorze (2.20) $f(\lambda) = (\lambda-\lambda^o)^k$, $\lambda, \lambda^o \in C^n$, $k \in N_+^n$ i stosując n-krotnie twierdzenie 2.3 otrzymuje się:

$$\frac{1}{(2\pi j)^n}\oint_\Gamma (\lambda e - X)^{-1}(\lambda-\lambda^o)^k d\lambda = (X-\lambda^o e)^k.$$

Wynika stąd, że jeżeli f i g są wielomianami: $\sum_{\|k\|=0}^{N} \alpha_k(\lambda-\lambda^o)^k$, $(k \in N_+^n)$ i jeżeli $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ dla każdego $\lambda \in \Omega$, to $\tilde{h}(X) = \tilde{f}(X)\tilde{g}(X)$ dla każdego $X \in B_\Omega^n$. Ponieważ zbiór wielomianów jest gęsty w $\mathcal{A}(\Omega)$ i jak pokazano wyżej odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ jest ciągłe, to jest ono multiplikatywne, to znaczy, że jeżeli $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ i $h = fg$, to $\tilde{h} = \tilde{f}\tilde{g}$. Zatem $\mathcal{A}(B_\Omega^n)$ jest algebrą, a odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(B_\Omega^n)$ jest izomorfizmem. ■

Bezpośrednio z twierdzenia 2.9 wynika następujące

TWIERDZENIE 2.10

Niech B będzie komutatywną algebrą Banacha. Jeżeli istnieje element $S \in B_\Omega^n$ taki, że dla każdego $x \in B$ można znaleźć funkcję $\tilde{f}_x : B_\Omega^n \to B$ taką, że $x = \tilde{f}_x(S)$, to odwzorowanie $f_x \to x$ określone wzorem

$$x = \frac{1}{(2\pi j)^n}\oint_\Gamma (\lambda e - S)^{-1} f_x(\lambda) d\lambda \tag{2.21}$$

jest izomorfizmem algebry B na algebrę Banacha $\mathcal{A}(\Omega)$ z normą

$$\|f_x\| = \sup_{\lambda \in Sp(S)} |f_x(\lambda)|. \tag{2.22}$$

Powyższe twierdzenie 2.10 ma duże zastosowanie praktyczne. Wynika z niego, że komutatywną algebrę Banacha można zastąpić równoważną, często wygodniejszą, algebrą Banacha funkcji analitycznych.

TWIERDZENIE 2.11

Jeżeli $X \in B_\Omega^n$ i $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, to $\tilde{f}(X) \in G(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in Sp(X)$.

<u>Dowód</u>. Jeżeli $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in Sp(X)$, to funkcja $g = f^{-1}$ jest analityczna na zbiorze Ω_1 takim, że $Sp(X) \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Ponieważ $fg = 1$ na Ω_1, to z twierdzenia 2.9 wynika, że $\tilde{f}(X)\tilde{g}(X) = e$, a więc $\tilde{f}(X) \in G(B)$.

Aby udowodnić implikację odwrotną załóżmy, że $\tilde{f}(X) \in G(B)$. Przypuśćmy że istnieje element $\alpha \in Sp(X)$ taki, że $f(\alpha) = 0$. Funkcja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, można ją więc rozwinąć w szereg Taylora:

$$\bigwedge_{\lambda \in Sp(X)} f(\lambda) = \sum_{\|k\|=1}^{\infty} a_k(\lambda-\alpha)^k.$$

Z twierdzenia 2.9 wynika, że dla $\mathbf{X} \in B^n_{\Omega}$

$$\tilde{f}(\mathbf{X}) = \sum_{\|\mathbf{k}\|=1}^{\infty} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{X}-\alpha e)^{\mathbf{k}},$$

ale ponieważ $\alpha \in Sp(\mathbf{X})$, to $\tilde{f}(\mathbf{X}) \notin G(B)$, co prowadzi do sprzeczności. ∎

3. KONKRETNE ALGEBRY BANACHA OPERATORÓW CZASOWO DYSKRETNYCH I ICH ZASTOSOWANIA

3.1. Algebra $\mathcal{L}_\varrho$ sygnałów czasowo wielowymiarowych

Przez $\overset{(M)}{\mathcal{D}}$ oznaczmy zbiór wszystkich M-wymiarowych SOSg, to znaczy zbiór wszystkich odwzorowań $x: \mathcal{N}^M \to C$. Wprowadźmy też zbiór:

$$\overset{(M)}{\mathcal{D}_+} = \left\{ x \in \overset{(M)}{\mathcal{D}} \;\middle|\; \bigwedge_{\mathbf{n} \notin \mathcal{N}_+^M} x(\mathbf{n}) = 0 \right\}.$$

Niech $K(\alpha,\varrho)$ oznacza otwarty polidysk (polikoło) o środku $\alpha \in C^M$ i promieniu $\varrho \in R_+^M$, tj. $K(\alpha,\varrho) = \left\{ \lambda \in C^M \;\middle|\; |\lambda_i - \alpha_i| < \varrho_i,\ i=1,\dots,M \right\}$. Odpowiednio przez $\overline{K}(\alpha,\varrho)$ i $\partial K(\alpha,\varrho)$ oznaczmy domknięty polidysk i poliokrąg[4]. Zbiór $\overset{(M)}{\mathcal{L}_\varrho}$ określimy następująco:

$$\overset{(M)}{\mathcal{L}_\varrho} = \left\{ x \in \overset{(M)}{\mathcal{D}_+} \;\middle|\; \bigwedge_{\lambda \in \overline{K}(0,\varrho)} \sum_{\|\mathbf{n}\|=0}^{\infty} |x(\mathbf{n})|\,|\lambda^{\mathbf{n}}| < \infty \right\}.$$

Dalej często będziemy opuszczać indeks (M) nad symbolem $\mathcal{L}_\varrho$, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Zbieżność szeregu wielokrotnego $\sum_{\|\mathbf{n}\|=0}^{\infty} b(\mathbf{n})$ będziemy rozumieć następująco. Jeżeli ponumerujemy w dowolny sposób składniki tego szeregu, to otrzymamy szereg zwykły (nie wielokrotny). Dla takiego szeregu w zwykły sposób jest określone pojęcie zbieżności i sumy, przy czym zarówno własność zbieżności, jak i wartość ewentualnej sumy zależą od sposobu numeracji składników. Zależność ta nie występuje, gdy zamiast zwykłej zbieżności rozpatruje się zbieżność absolutną, tj. zbieżność szeregu, którego składnikami są liczby $|b(\mathbf{n})|$. Dlatego w dalszym ciągu mówiąc o zbieżności szeregu $\sum_{\|\mathbf{n}\|=0}^{\infty} b(\mathbf{n})$ będziemy mieli na myśli jego zbieżność absolutną.

Zbiór $\mathcal{L}_\varrho$ jest przestrzenią liniową, bowiem dla każdego $\lambda \in \overline{K}(0,\varrho)$ i dowolnych $x y \in \mathcal{L}_\varrho$ obowiązuje nierówność:

---

[4] $\overline{K}(\alpha,\varrho) = \left\{ \lambda \in C^M \;\middle|\; |\lambda_i - \alpha_i| \le \varrho_i,\ i=1,\dots,M \right\}$

$\partial K(\alpha,\varrho) = \left\{ \lambda \in C^M \;\middle|\; |\lambda_i - \alpha_i| = \varrho_i,\ i=1,\dots,M \right\}$ (patrz też [41]).

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} |x(n)+y(n)||\lambda^n| \leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |x(n)||\lambda^n| + \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |y(n)|\,\lambda^n .$$

Jeżeli w $\mathcal{L}_\varrho$ określić normę

$$\|x\| = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} \varrho^n |x(n)|, \tag{3.1.1}$$

to staje się ona przestrzenią Banacha. Istotnie, $\mathcal{L}_\varrho$ jest homeomorficzna z przestrzenią C -wartościowych funkcji analitycznych na $K(0,\varrho)$, a ta ostatnia jest zupełna.

Mnożenie (wielowymiarowy splot) określone wzorem

$$xy(n) = \sum_{m\in\mathcal{N}^M} x(n-m)y(m) \tag{3.1.2}$$

jest odwzorowaniem $\mathcal{L}_\varrho \times \mathcal{L}_\varrho \to \mathcal{L}_\varrho$. Rzeczywiście, dla $x,y \in \mathcal{L}_\varrho$ mamy:

$$\sum_{n\in\mathcal{N}^M} \varrho^n |xy(n)| = \sum_{n\in\mathcal{N}^M} \varrho^n \Big|\sum_{m\in\mathcal{N}^M} x(n-m)y(m)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{m\in\mathcal{N}^M} |y(m)| \sum_{n\in\mathcal{N}^M} \varrho^n |x(n-m)| = \sum_{n\in\mathcal{N}^M}\sum_{m\in\mathcal{N}^M} \varrho^{n+m}|x(n)||y(m)| =$$

$$= \sum_{n\in\mathcal{N}^M} \varrho^n |x(n)| \sum_{m\in\mathcal{N}^M} \varrho^m |y(m)| .$$

Wynika stąd też, że

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Nietrudno sprawdzić, że mnożenie (3.1.2) jest łączne, liniowe ze względu na każdy czynnik oraz rozdzielne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone.

W $\mathcal{L}_\varrho$ istnieje element neutralny ze względu na mnożenie, a jest nim δ^0:

$$\delta^0(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

dla którego $\|\delta^0\| = 1$.

W dodatku mnożenie (3.1.2) jest przemienne.

Z a t e m przestrzeń $\mathcal{L}_\varrho$ z normą (3.1.1) i m n o ż e n i e m (3.1.2) t w o r z y k o m u t a t y w n ą a l g e b r ę B a n a c h a.

Wprowadźmy następujący układ elementów zbioru $\mathcal{N}^M$:

$1_1 = (1,0,\dots,0)$, $1_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots,$ $1_M = (0,\dots,0,1)$.

rzez $\delta_1, \delta_2,\dots,\delta_M$ oznaczmy elementy algebry $\mathcal{L}_\varrho$ takie, że

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1_1 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 1_1 \end{cases}$$

$$\delta_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1_2 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 1_1 \end{cases}$$

$$\dots$$

$$\delta_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1_M \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 1_M \end{cases}$$

Symbolem $\delta = (\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_M)$ oznaczmy odpowiedni element przestrzeni $\mathcal{L}_\varrho^M$. Nietrudno zauważyć, że element δ^k, $k \in \mathcal{N}_+^M$ ma następującą własność:

$$\delta^k x(n) = x\delta^k(n) = x(n-k).$$

Przystąpimy teraz do określenia elementu $y = (\lambda\delta^\circ - \delta)^{-1}$, $\lambda \in C^M$ oraz $Sp(\delta)$. Trzeba w tym celu wyznaczyć najpierw element $y_i = (\lambda_i\delta^\circ - \delta_i)^{-1}$ który spełnia równanie rekurencyjne

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}^M} \lambda_i y_i(n) - y_i(n-1_i) = \delta^\circ(n).$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w $\mathcal{L}_\varrho$ jest element y_i taki, że

$$y_i(n) = \lambda_i^{-(n_i+1)} u_i(n),$$

gdzie

$$u_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n_i \geqslant 0,\ n_k = 0, \quad k \neq i \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } n \in \mathcal{N}^M. \end{cases}$$

Elementy y określa się z wyrażenia:

$$y = y_1 y_2 \dots y_M.$$

Nietrudno pokazać, że

$$y(n) = \lambda^{-(n+1)} u(n),$$

gdzie

$$u(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \mathbf{n} \in \mathcal{N}_+^M \\ 0 & \text{dla} \quad \mathbf{n} \notin \mathcal{N}_+^M . \end{cases}$$

Element $y \in \mathcal{L}_\varrho$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{\|\mathbf{n}\|=0}^{\infty} \varrho^{\mathbf{n}} \lambda^{-\mathbf{n}}$ jest zbieżny a więc gdy $\lambda \notin \bar{K}(0,\varrho)$. Zatem

$$Sp(\delta) = \bar{K}(0,\varrho).$$

Niech $\tilde{f}$ będzie $\mathcal{L}_\varrho$-wartościową funkcją zadaną w $\mathcal{L}_\varrho^M$. Z twierdzenia 2.9 wynika, że

$$\left[\tilde{f}(\delta)\right](\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \oint_\Gamma \left[(\lambda\delta^\circ - \delta)^{-1}\right](\mathbf{n}) f(\lambda) d\lambda = u(\mathbf{n}) \frac{1}{(2\pi j)^M} \oint_\Gamma \lambda^{-(\mathbf{n}+1)} f(\lambda) d\lambda, \tag{3.1.3}$$

gdzie funkcja f jest analityczna w otoczeniu $\bar{K}(0,\varrho)$, a kontur $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_M)$ obejmuje $\bar{K}(0,\varrho)$.

Stosując wzór Cauchy'ego dla funkcji wielu zmiennych (np. [41], tw.3.1) otrzymuje się

$$\left[\tilde{f}(\delta)\right](\mathbf{n}) = \frac{1}{\mathbf{n}!} f^{(\mathbf{n})}(0), \tag{3.1.4}$$

gdzie $\mathbf{n}! = n_1!\, n_2! \dots n_M!$

$$f^{(\mathbf{n})}(\lambda) = \frac{\partial^{|\mathbf{n}|} f(\lambda)}{\partial\lambda_1^{n_1} \partial\lambda_2^{n_2} \dots \partial\lambda_M^{n_M}}$$

TWIERDZENIE 3.1.1

Każdy element $x \in \mathcal{L}_\varrho$ generuje $\mathcal{L}_\varrho$-wartościową funkcję $\tilde{f}_x$:

$$\tilde{f}_x(y) = \sum_{\|\mathbf{n}\|=0}^{\infty} x(\mathbf{n}) y^{\mathbf{n}}, \tag{3.1.5}$$

określoną na zbiorze $F_x = \left\{ y \in \mathcal{L}_\varrho^M \mid \overline{\lim_{\|\mathbf{n}\| \to \infty}} \sqrt[\|\mathbf{n}\|]{|x(\mathbf{n})| \, \|y^{\mathbf{n}}\|} = \beta < 1 \right\}$.

<u>Dowód</u>. Z określenia $\overline{\lim}$ wynika, że przy dowolnym ustalonym $y \in F_x$ dla wszystkich $\mathbf{k} \in \mathcal{N}_+^M$, za wyjątkiem być może skończonej ich liczby, zachodzi nierówność:

$$\sqrt[\|k\|]{|x(k)|\ \|y^{k}\|} \leq \beta,$$

a stąd:

$$|x(k)|\ \|y^{k}\| \leq \beta^{\|k\|}. \tag{3.1.6}$$

Przez $\tilde{f}_{x,N}$ oznaczmy funkcję $\mathcal{E}_{\varrho}^{M} \to \mathcal{E}_{\varrho}$ taką, że

$$\tilde{f}_{x,N}(y) = \sum_{\|n\|=0}^{N} x(n) y^{n}.$$

Dla dowolnego ustalonego $y \in F_{x}$ i dla N_1 i N_2 takich, że zapewnione jest spełnienie nierówności (3.1.6), ma miejsce następujące oszacowanie:

$$\|\tilde{f}_{x,N_2}(y) - \tilde{f}_{x,N_1}(y)\| \leq \sum_{\|n\|=N_1+1}^{N_2} |x(n)| \|y^{n}\| \leq \sum_{\|n\|=N_1+1}^{N_2} \beta^{\|n\|},$$

z którego wynika, że ciąg $\left\{\tilde{f}_{x,N}(y)\right\}$ jest ciągiem podstawowym w $\mathcal{E}_{\varrho}$. Z faktu zupełności $\mathcal{E}_{\varrho}$ wynika, że dla każdego $y \in F_{x}$, $\tilde{f}_{x}(y) \in \mathcal{E}_{\varrho}$. ■

W n i o s e k

Dla każdego $x \in \mathcal{E}_{\varrho}$, $\tilde{f}_{x}(\delta) = x$.

<u>Dowód</u>. $\|\delta^{n}\| = \varrho^{n}$, zatem dla każdego $x \in \mathcal{E}_{\varrho}$ na mocy kryterium Cauchy'ego o bezwzględnej zbieżności szeregów wielokrotnych otrzymuje się:

$$\overline{\lim_{\|n\| \to \infty}} \sqrt[\|n\|]{|x(n)|\ \|\delta^{n}\|} = \overline{\lim_{\|n\| \to \infty}} \sqrt[\|n\|]{|x(n)| \varrho^{n}} = \beta < 1.$$

W celu zakończenia dowodu wystarczy zastosować wzór (3.1.4) do funkcji

$$f_{x}(\lambda) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} x(n) \lambda^{n}. \ ■$$

Z twierdzenia 2.10, wniosku z twierdzenia 3.1.1 i ze wzoru (3.1.4) wynika, że odwzorowanie $x \rightleftarrows f_{x}$

$$f_{x}(\lambda) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} x(n) \lambda^{n} \tag{3.1.7}$$

$$x(n) = \frac{1}{n!} f_{x}^{(n)}(0) \tag{3.1.8}$$

jest izomorfizmem algebry $\mathcal{E}_\varrho$ na algebrę Banacha $\mathcal{E}'_\varrho$ funkcji analitycznych na polidysku $\overline{K}(0,\varrho)$, z normą

$$\|f_x\| = \sup_{\lambda \in \overline{K}(0,\varrho)} |f_x(\lambda)|.$$

Niech $\overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$ będzie przestrzenią sygnałów ograniczonych, tj.:

$$\overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty} = \left\{ x \in \overset{(M)}{\mathcal{D}} \,\middle|\, \bigvee_{\alpha \in R_+} \bigwedge_{n \in \mathcal{N}^M} |x(n)| \leq \alpha \right\}.$$

Przestrzeń $\overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$ z normą

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathcal{N}^M} |x(n)|$$

jest przestrzenią Banacha. Niech $\hat{h}$ będzie operatorem mnożenia w sensie określenia (3.1.2), przez element $h \in \mathcal{E}_\varrho$, zadanym na $\overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$:

$$\hat{h}(x) = hx.$$

TWIERDZENIE 3.1.2

Operator $\hat{h}(x) = hx$ odwzorowuje $\overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in \mathcal{E}_1$.

<u>Dowód</u> dostateczności jest oczywisty. Aby wykazać konieczność założmy, że $h \notin \mathcal{E}_1$. Wówczas szereg $\sum_{\|m\|=0}^{\infty} |h(m)|$ jest rozbieżny. Wybierając element $x \in \overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$ tak, aby:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad h(-n) \geq 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad h(-n) < 0 \end{cases}$$

otrzymuje się

$$y(0) = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} h(-m)x(m) = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} |h(-m)| = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} |h(m)|,$$

a zatem $y \notin \overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$. ■

Z twierdzenia 3.1.2 wynika, że algebra $\mathcal{E}_1$ znajduje zastosowanie w teorii $\overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$ - stabilnych czasowo wielowymiarowych LTISDS.

Operator $\hat{h}: \overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty} \to \overset{(M)}{\mathcal{E}}{}^{\infty}$ jest wówczas operatorem mnożenia przez element $h \in \mathcal{E}_1$, który jest transmitancją układu elementarnego. Zgodnie z wnioskiem do twierdzenia 3.1.1 $h = \tilde{f}_h(\delta)$.

TWIERDZENIE 3.1.3

Jeżeli $h \in \mathcal{L}_1$, to $\delta^0 - h \in G(\mathcal{L}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ustalonego $1 \leq p \leq M$ i ustalonych $\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1},\lambda_{p+1},\dots,\lambda_M$ takich, że $|\lambda_n| \leq 1 (n \neq p)$, funkcja $f_h(\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1},(\cdot),\lambda_{p+1},\dots,\lambda_M)$ odwzorowuje zorientowany okrąg jednostkowy na płaszczyźnie C, o środku 0 w krzywą nie obejmującą punktu $\mu=1$.

Dowód. Z twierdzenia 2.11 wynika, że $\delta^0 - h = \delta^0 - \tilde{f}_h(\delta) \in G(\mathcal{L}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - f_h(\lambda) \neq 0$ dla dowolnego $\lambda \in \overline{K}(0,1)$. Z kolei ten warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ustalonego $1 \leq p \leq M$ i ustalonych $\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1},\lambda_{p+1},\dots,\lambda_M$ takich, że $|\lambda_n| \leq 1$ $(n \neq p)$, funkcja $f_h(\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1},(\cdot),\lambda_{p+1},\dots,\lambda_M)$ odwzorowuje jednostkowe domknięte koło na płaszczyźnie C w obszar nie zawierający punktu $\mu=1$. Ze względu na analityczność funkcji $f_h(\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1},(\cdot)\lambda_{p+1},\dots,\lambda_M)$ wystarczy odwzorować przez nią zorientowany jednostkowy okrąg i sprawdzić czy obejmie on punkt $\mu=1$, czy też nie. ■

Jeżeli h potraktować jako transmitancję układu z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, to twierdzenie 3.1.3 orzeka o $\mathcal{L}^{(M)}$-stabilności układu z zamkniętą pętlą. Jest więc ono uogólnieniem kryterium Nyquista na układy czasowo wielowymiarowe.

Dla M = 2 kryterium to prowadzi do badania dwóch rodzin krzywych Nyquista na płaszczyźnie C i nie jest trudne w zastosowaniu.

3.2. Algebra $\mathcal{P}_N$ sygnałów wielookresowych

Wprowadźmy następujący układ elementów zbioru $\mathcal{N}_+^M$:

$$\mathbf{N}_1 = (N_1,0,\dots,0)$$
$$\mathbf{N}_2 = (0,N_2,0,\dots,0)$$
$$\mathbf{N}_M = (0,\dots,0,N_M)$$
$$\mathbf{N} = (N_1,N_2,\dots,N_M) = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \dots + \mathbf{N}_M.$$

Przez $\mathcal{P}_N^{(M)}$ oznaczmy następujący zbiór:

$$\mathcal{P}_N^{(M)} = \left\{ x \in \mathcal{D}^{(M)} \,\middle|\, \bigwedge_{n \in \mathcal{N}^M} x(n-\mathbf{N}_k) = x(n),\ k=1,\dots,M \right\}.$$

TWIERDZENIE 3.2.1

Zbiór $\mathcal{P}_N$ z normą

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| \tag{3.2.1}$$

i mnożeniem

$$xy(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)y(m) \qquad (3.2.2)$$

tworzy komutatywną algebrę Banacha.

<u>Dowód</u>. $\mathcal{P}_N$ jest przestrzenią liniową. Nietrudno wykazać, że z normą określoną równością (3.2.1) jest zupełna, a więc jest przestrzenią Banacha. Z tego, że

$$xy(n-N_i) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-N_i-m)y(m) = \sum_{p=N_i}^{N+N_i-1} x(n-p)y(p-N_i) =$$

$$= \sum_{p=N_i}^{N+N_i-1} x(n-p)y(p) = \sum_{p=0}^{N-1} x(n-p)y(p)$$

dla dowolnego $n \in \mathcal{N}^M$ i przy każdym $i=1,\dots,M$ wynika, że mnożenie jest odwzorowaniem $\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N \to \mathcal{P}_N$.

Dla dowolnego $n \in \mathcal{N}^M$ zachodzi

$$x(yz)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \sum_{m=0}^{N-1} y(k-m)z(m) = \sum_{m=0}^{N-1} z(m) \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} z(m) \sum_{p=-m}^{N-1-m} x(n-m-p)y(p) = \sum_{m=0}^{N-1} xy(n-m)z(m) = (xy)z(m),$$

a więc mnożenie jest łączne. Oprócz tego mnożenie jest liniowe ze względu na każdy czynnik oraz rozdzielne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone.

Ma miejsce następujące oszacowanie:

$$\|xy\| = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)y(m) \right| \le \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} |x(n-m)|\,|y(m)| =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} |y(m)| \sum_{p=-m}^{N-1-m} |x(p)| = \sum_{p=0}^{N-1} |x(p)| \sum_{m=0}^{N-1} |y(m)| = \|x\|\,\|y\|.$$

Elementem neutralnym w $\mathcal{P}_N$ jest ω^0 taki, że

$$\omega^0(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = k_1N_1 + k_2N_2 + \ldots + k_MN_M, k_1, \ldots, k_M \in \mathcal{N} \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } n \in \mathcal{N}^M. \end{cases}$$

Nietrudno przekonać się, że $\|\omega^0\| = 1$. Można także sprawdzić, że mnożenie jest przemienne. Zatem $\mathcal{P}_N$ jest komutatywną algebrą Banacha. ■

Wprowadźmy układ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M$ elementów algebry $\mathcal{P}_N$ takich, że

$$\omega_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = iN_1 + 1_1 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad n \in \mathcal{N}^M \end{cases}$$

$$\omega_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = iN_2 + 1_2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad n \in \mathcal{N}^M \end{cases}$$

$$\omega_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = iN_M + 1_M \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad n \in \mathcal{N}^M, \end{cases}$$

gdzie $i \in \mathcal{N}$. Symbolem

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M)$$

oznaczymy odpowiedni element przestrzeni $\mathcal{P}_N^M$. Nietrudno sprawdzić, że element $\omega^k \in \mathcal{P}_N$, $0 < k < N-1$ ma następującą własność:

$$\omega^k x(n) = x\,\omega^k(n) = x(n-k).$$

Aby określić element $y = (\lambda\omega^0 - \omega)^{-1}, \lambda \in C^M$, trzeba najpierw wyznaczyć element $y_i = (\lambda_i \omega^0 - \omega_i)^{-1}$, który spełnia równanie rekurencyjne:

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}^M} \lambda_i y_i(n) - y_i(n - 1_i) = \omega^0(n).$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w $\mathcal{P}_N$ jest element y_i taki, że

$$y_i(n) = \frac{\lambda_i^{N_i - 1 - n_i}}{\lambda_i^{N_i} - 1}\, p_i(n), \quad \text{dla} \quad 0 \le n \le N-1.$$

gdzie

$$p_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = k_1N_1 + \ldots + k_{i-1}N_{i-1} + k_i 1_i + k_{i+1}N_{i+1} + \ldots + k_M N_M, k_1, \ldots, k_M \in \mathcal{N} \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{N}^M; \end{cases}$$

dla pozostałych $n \in \mathcal{N}^M$ funkcja jest odpowiednim okresowym przedłużeniem. Element y wyznacza się z wyrażenia $y = y_1 y_2 \ldots y_M$. Wykonując odpowiednie mnożenia w $\mathcal{P}_N$ otrzymuje się:

$$y(n) = \frac{\lambda^{N-1-n}}{(\lambda_1^{N_1}-1)(\lambda_2^{N_2}-1)\ \ldots\ (\lambda_M^{N_M}-1)} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1. \qquad (3.2.3)$$

Element y istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wszystkie y_i, $(i=1,2,\ldots,M)$, a więc gdy $\lambda_i^{N_i} - 1 \neq 0$. Aby określić wyrażenie na widmo łączne elementu w wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\varepsilon_k = \exp(j\,\frac{2\pi}{N_k}),$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_M) \in C^M$$

$$\varepsilon^{(k)} = (\varepsilon_1^{k_1}, \varepsilon_2^{k_2}, \ldots, \varepsilon_M^{k_M}), \quad k \in \mathcal{N}^M.$$

Teraz można napisać, że

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{w}) = \left\{ \lambda \in C^M \ (\lambda_i \mathrm{w}^{\circ} - \mathrm{w}_i) \notin G(\mathcal{P}_N), \quad i=1,\ldots,M \right\} = \left\{ \varepsilon^{(k)} \right\},$$

$$0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Zatem widmo łączne elementu w składa się z $\|N\|$ punktów rozmieszczonych regularnie na poliokręgu $\partial K(0,1)$.

Niech $\tilde{f}$ będzie $\mathcal{P}_N$-wartościową funkcją zadaną w $\mathcal{P}_N^M$. Z twierdzenia 2.9 wynika, że

$$\left[\tilde{f}(\mathrm{w})\right](n) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \oint_{\Gamma} \left[(\lambda \mathrm{w}^{\circ} - \mathrm{w})^{-1}\right](n) f(\lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi j)^M} \oint_{\Gamma} \frac{\lambda^{N-1-n}}{(\lambda_1^{N_1}-1)(\lambda_2^{N_2}-1)\ldots(\lambda_M^{N_M}-1)} f(\lambda) d\lambda.$$

Stosując M-krotnie wzór całkowy Cauchy'ego otrzymuje się:

$$\left[\tilde{f}(\text{ш})\right](n) = \frac{1}{N^1}\sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{(k)})^{-n} f(\varepsilon^{(k)}). \qquad (3.2.4)$$

Każdy element $x \in \mathcal{P}_N$ generuje $\mathcal{P}_N$-wartościową funkcję $\tilde{f}_x$ określoną na $\mathcal{P}_N^M$ taką, że

$$\tilde{f}_x(y) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^n. \qquad (3.2.5)$$

TWIERDZENIE 3.2.2

Dla każdego $x \in \mathcal{P}_N$, $\tilde{f}_x(\text{ш}) = x$.

Dowód. Wystarczy funkcję

$$f_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\lambda^n$$

wstawić do wzoru (3.2.4), aby otrzymać:

$$\left[\tilde{f}_x(\text{ш})\right](n) = \frac{1}{N^1}\sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{(k)})^{-n} f_x(\varepsilon^{(k)}) = \frac{1}{N^1}\sum_{k=0}^{N-1}(\varepsilon^{(k)})^{-n}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)(\varepsilon^{(k)})^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,\frac{1}{N^1}\sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{(k)})^{m-n} = x(n).$$

dla dowolnego $n \in \mathcal{N}^M$, bowiem przy $|m_i - n_i| \leq N_i - 1$, $i=1,\dots,M$ zachodzi:

$$\frac{1}{N^1}\sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{(k)})^{m-n} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = n \\ 0 & \text{gdy } m \neq n. \end{cases}$$

Symbolem $\mathcal{P}'_N$ oznaczmy zbiór $\mathcal{P}_N$, lecz z odmiennie określoną normą

$$\|x'\|_{\mathcal{P}'_N} = \sup_{n \in \mathcal{N}^M} |x'(n)|$$

i zwykłym mnożeniem

$$\bigwedge_{x'_1, x'_2 \in \mathcal{P}'_N,\, n \in \mathcal{N}^M} x'_1 x'_2(n) = x'_1(n) x'_2(n).$$

Łatwo wykazać, że $\mathcal{P}'_N$ tworzy algebrę Banacha.

TWIERDZENIE 3.2.3

Odwzorowanie $x \rightleftarrows x'$, $x \in \mathcal{P}_N$, $x' \in \mathcal{P}'_N$, określone wzorami:

$$x'(n) = \sum_{p=0}^{N-1} (\varepsilon^{(n)})^p \, x(p), \tag{3.2.6}$$

$$x(n) = \frac{1}{N^1} \sum_{p=0}^{N-1} (\varepsilon^{(p)})^{-n} x'(p), \tag{3.2.7}$$

jest izomorfizmem algebry $\mathcal{P}_N$ na $\mathcal{P}'_N$.

Dowód. Z twierdzeń 2.10 i 3.2.2 oraz ze wzoru (3.2.4) wynika, że odwzorowanie $x \rightleftarrows f_x$, określone wyrażeniami:

$$f_x(\lambda) = \sum_{p=0}^{N-1} \lambda^p x(p), \tag{3.2.8}$$

$$x(n) = \frac{1}{N^1} \sum_{p=0}^{N-1} (\varepsilon^{(p)})^{-n} \, f_x(\varepsilon^{(p)}), \tag{3.2.9}$$

jest izomorfizmem algebry $\mathcal{P}_N$ na algebrę funkcji analitycznych w otoczeniu $Sp(\text{Ш})$. Podstawiając $f_x(\varepsilon^{(p)}) = x'(p)$, otrzymamy wyrażenia (3.2.6) i (3.2.7). Zauważmy jeszcze, że

$$\|x'\| = \sup_{\lambda \in Sp(\text{Ш})} |f_x(\lambda)|. \quad \blacksquare$$

Najprostszą dziedziną zastosowań algebry $\mathcal{P}_N$ jest teoria LTISDS, pobudzanych sygnałami wielookresowymi. Operator $\hat{h}: \mathcal{P}_N \to \mathcal{P}_N$ układu elementarnego jest tam operatorem mnożenia przez element $h \in \mathcal{P}_N$, to znaczy $\hat{h}(x) = hx$. Zgodnie z twierdzeniem 3.2.2, $h = \tilde{f}_h(\text{Ш})$. Można też operator $\hat{h}$ traktować jako odwzorowanie $\mathcal{P}'_N \to \mathcal{P}'_N$, z tym że mnożenie hx przez element $h \in \mathcal{P}_N$ także należy rozumieć w sensie określenia (3.2.2).

Dla przykładu określmy odpowiedź dwuwymiarowego filtru rekursywnego opisanego równaniem:

$$y(n_1,n_2) = -x(n_1,n_2) + 2y(n_1-1,n_2) + y(n_1,n_2-1) \qquad (3.2.10)$$

na sygnał $x = ш^{o}$ o okresie $\mathbf{N} = (N_1,N_2) = (5,4)$.

Jeżeli x i y potraktować jako elementy algebry $P_{\mathbf{N}}$, to równanie (3.2.10) można zapisać w postaci

$$y = -x + (2\,ш_1 + ш_2)y.$$

Stąd

$$y = (2\,ш_1 + ш_2 - ш^{o})^{-1}x.$$

Zatem transmitancja $h \in P_N$ ma postać:

$$h = \tilde{f}_h(ш) = (2\,ш_1 + ш_2 - ш^{o})^{-1},$$

a odpowiadająca jej $\mathbb{C}$-wartościowa funkcja f_h, zadana w $\mathbb{C}^2$:

$$f_h(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2\lambda_1+\lambda_2-1}.$$

Mamy

$$\varepsilon_1 = e^{j\frac{2\pi}{N_1}} = e^{j\frac{2\pi}{5}}$$

$$\varepsilon_2 = e^{j\frac{2\pi}{N_2}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$(\varepsilon^{(\mathbf{k})})^{-\mathbf{n}} = (\varepsilon_1^{k_1},\varepsilon_2^{k_2})^{-\mathbf{n}} = \varepsilon_1^{-k_1n_1}\varepsilon_2^{-k_2n_2}$$

$$f_h(\varepsilon^{(\mathbf{k})}) = f_h(\varepsilon_1^{k_1},\varepsilon_2^{k_2}) = \frac{1}{2\varepsilon_1^{k_1} + \varepsilon_2^{k_2} - 1}.$$

Stosując wyrażenie (3.2.4), otrzymuje się

$$\left[\tilde{f}_h(ш)\right](n_1,n_2) = h(n_1,n_2) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{3}\frac{\varepsilon_1^{-k_1n_1}\,\varepsilon_2^{-k_2n_2}}{2\varepsilon_1^{k_1} + \varepsilon_2^{k_2} - 1}.$$

Kładąc $x = ш^{o}$, otrzymuje się $y = h$.

3.3. Zastosowanie algebr $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{P}_N$ do poszukiwania rozwiązań układów nieliniowych

W paragrafie tym zastosujemy algebrę $\mathcal{L}_1$ do rozwiązania równania operatorowego

$$y = x + \hat{h}(\Phi(y)), \tag{3.3.1}$$

gdzie $x \in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$, Φ jest nieliniową funkcją odwzorowującą $\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ w siebie, spełniającą warunek Lipschitza ze stałą γ, tj.:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \leq \gamma \|x_1 - x_2\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}},$$

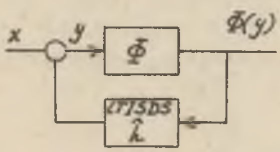
$\hat{h}$ jest operatorem mnożenia (splotu) przez element $h \in \mathcal{L}_1$, tj. $\hat{h}(x) = hx$. Z twierdzenia 3.1.2 wynika, że $\hat{h}: \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$. Zachodzi oszacowanie

$$\bigwedge_{x \in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \|\hat{h}(x)\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|x\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}},$$

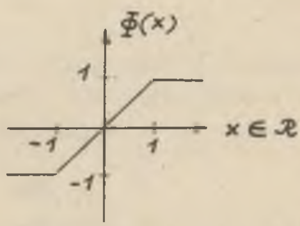
z którego wynika, że

$$\|\hat{h}\| = \|h\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Równanie (3.3.1) opisuje układ ze sprzężeniem zwrotnym zawierającym w torze głównym blok nieliniowy o funkcji przejścia Φ, a w torze sprzężenia zwrotnego LTISDS o transmitancji $h \in \mathcal{L}_1$ (rys. 3.3.1).



Rys. 3.3.1. Schemat blokowy układu ze sprzężeniem zwrotnym odpowiadający równaniu (3.3.1)



Rys. 3.3.2. Przykładowa charakterystyka bloku nieliniowego

Ma miejsce następujące oszacowanie:

$$\|\hat{h}[\Phi(x_1)] - \hat{h}[\Phi(x_2)]\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \leq \gamma \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|x_1 - x_2\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}}.$$

Jeżeli operagor $\hat{h} \circ \Phi$ jest zwężający, tj., jeżeli $\gamma \|h\|_{\mathcal{E}_1} < 1$, to równanie (3.3.1) posiada jednoznaczne rozwiązanie y, będące granicą ciągu kolejnych przybliżeń

$$y_{n+1} = x + \hat{h}(\Phi(y_n)). \qquad (3.3.2)$$

Dla każdego $x \in \mathcal{E}^{(M)}_{\infty}$ można znaleźć takie $\rho \in R^M_+$, że $x \in \mathcal{E}_\rho$. Zatem podczas określania kolejnych wyrazów ciągu $\{y_n\}$ zadanych wyrażeniem (3.3.2) można stosować następujący algorytm:

(I) mając wartości $y_k(n)$ k-tego przybliżenia y_k dla wszystkich $n \in \mathcal{N}^M_+$ określa się wynik operacji $\Phi(y_k)$, czyli wszystkie wartości $[\Phi(y_k)](n)$;

(II) stosując wniosek do twierdzenia 3.1.1 wyraża się element $\Phi(y_k)$ poprzez element δ :

$$\Phi(y_k) = \tilde{f}_{\Phi(y_k)}(\delta) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} [\Phi(y_k)](n)\,\delta^n;$$

(III) z równania (3.3.2) określa się $k+1$ przybliżenie

$$y_{k+1} = \tilde{f}_x(\delta) + \tilde{f}_h(\delta)\,\tilde{f}_{\Phi(y_k)}(\delta),$$

stosując przy tym wzory (3.1.3), albo też (3.1.4).

W charakterze elementu początkowego ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania można przyjąć $y_0 = x$.

<u>Przykład liczbowy</u>

Przyjmijmy, że funkcja przejścia bloku nieliniowego ma wykres widoczny na rys. 3.3.2, transmitancją czasowo jednowymiarowego LTISDS jest

$$f_h(\delta) = 0{,}3(2\delta^0 - \delta)^{-1},$$

a na wejście układu podano sygnał $x = \delta^0$. Stosując wzór (3.1.4) do elementu $\tilde{f}_h(\delta)$ otrzymuje się:

$$[\tilde{f}_h(\delta)](n) = 0{,}3 \cdot 2^{-(n+1)}u(n).$$

Traktując x i $\tilde{f}_h(\delta)$ jako elementy $\mathcal{E}_1$ można łatwo oszacować normę $\tilde{f}_h(\delta)$ i stwierdzić, że operator $\tilde{f}_h(\delta)\Phi(\cdot)$ jest zwężający, a więc można stosować powyższy algorytm kolejnych przybliżeń. Przyjmując $y_0 = \delta^0$ otrzymuje się pierwsze przybliżenie w postaci:

$$y_1(n) = \delta^0(n) + \left[\tilde{f}_h(\delta)\phi(\delta^0)\right](n) = \delta^0(n) + 0{,}3.2^{-(n+1)}u(n).$$

Wyniki poszczególnych iteracji zestawiono w tablicy 3.3.1.

Tablica 3.3.1

Wyniki poszczególnych iteracji rozwiązania równania (3.3.1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_1(n)$	1,1500	0,0750	0,0375	0,0188	0,0094	0,0047	0,0023	0,0012	0,0006
$y_2(n)$	1,1500	0,0862	0,0487	0,0272	0,0150	0,0082	0,0044	0,0026	0,0013
$y_3(n)$	1,1500	0,0879	0,0506	0,0297	0,0170	0,0098	0,0055	0,0034	0,0018
$y_4(n)$	1,1500	0,0882	0,0510	0,0303	0,0176	0,0103	0,0059	0,0038	0,0020
$y_5(n)$	1,1500	0,0882	0,0510	0,0305	0,0177	0,0105	0,0060	0,0040	0,0021

Można także rozpatrywać równanie (3.3.1) w przestrzeni $\mathcal{P}_N$. Wówczas $x \in \mathcal{P}_N$, Φ jest nieliniową funkcją $\mathcal{P}_N \to \mathcal{P}_N$, spełniającą warunek Lipschitza ze stałą γ, $\hat{h}(x) = hx$, $h \in \mathcal{P}_N$. Jeżeli operator $\hat{h} \circ \Phi$ jest zwężający, tj., jeżeli $\gamma \|h\|_{\mathcal{P}_N} < 1$, to równanie (3.3.1) można rozwiązywać przez iteracje, stosując algorytm podobny do powyższego, to znaczy:

(I) mając wartości $y_k(n)$ k-tego przybliżenia dla wszystkich $0 \le n \le N-1$ określa się wynik operacji $\Phi(y_k)$, czyli wszystkie wartości $[\Phi(y_k)](n)$;

(II) stosując twierdzenie 3.2.2 wyraża się element $\Phi(y_k)$ poprzez element ω

$$\Phi(y_k) = \tilde{f}_{\Phi(y_k)}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} [\Phi(y_k)](n)\omega^n;$$

(III) z równania (3.3.2) określa się $k+1$ przybliżenie

$$y_{k+1} = \tilde{f}_x(\omega) + \tilde{f}_h(\omega)\, \tilde{f}_{\Phi(y_k)}(\omega)$$

stosując przy tym wzór (3.2.4).

Także i teraz jako element początkowy ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania można przyjąć $y_0 = x$.

Przykład liczbowy

Przyjmijmy, że funkcja przejścia bloku nieliniowego ma wykres widoczny na rys. 3.3.2, a transmitancją czasowo-jednowymiarowego LTISDS jest

$$\tilde{f}_h(\omega) = 0{,}1(\omega - 0{,}5\omega^o)^{-1}.$$

Na wejście układu podano sygnał $x = \omega^o$ o okresie $N=5$.

Również w tym przypadku operator $\tilde{f}_h(\omega)\Phi(\cdot)$ spełnia warunek zwężania, można więc stosować algorytm kolejnych przybliżeń. Stosując wzór (3.2.3) dla przypadku czasowo jednowymiarowego otrzymuje się:

$$\left[\tilde{f}_h(\omega)\right](n) = 0{,}1\,\frac{0{,}5^{N-1-n}}{1 - 0{,}5^N} \approx 0{,}1(0{,}5)^{4-n} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant n \leqslant 4.$$

Pierwszym przybliżeniem jest:

$$y_1(n) = \omega^o(n) + \left[\tilde{f}_h(\omega)\Phi(\omega^o)\right](n) = \omega^o(n) + \left[\tilde{f}_h(\omega)\right](n) = \omega^o(n) + 0{,}1(0{,}5)^{4-n},$$

$0 \leqslant n \leqslant 4$. Stąd otrzymuje się:

$$\tilde{f}_{\Phi(y_1)}(\omega) = \omega^o + 0{,}012\omega + 0{,}025\,\omega^2 + 0{,}050\omega^3 + 0{,}1\omega^4.$$

Powtarzając cykl obliczeń, otrzymuje się wyniki dalszych iteracji. Wyniki te zebrane są w tablicy 3.3.2. W tablicy 3.3.3 zebrane są wyniki kolejnych iteracji rozwiązania równania (3.3.1) przy $\tilde{f}_h(\omega) = 0{,}2(\omega - 0{,}5\omega^o)^{-1}$.

Tablica 3.3.2

n	0	1	2	3	4
$y_0(n)$	1	0	0	0	0
$y_1(n)$	1,006	0,012	0,025	0,050	0,100
$y_2(n)$	1,011	0,020	0,035	0,061	0,102
$y_3(n)$	1,012	0,023	0,036	0,061	0,103

Tablica 3.3.3

n	0	1	2	3	4
$y_1(n)$	1,013	0,026	0,052	0,104	0,207
$y_2(n)$	1,023	0,058	0,096	0,150	0,218
$y_3(n)$	1,037	0,073	0,108	0,156	0,225
$y_4(n)$	1,042	0,077	0,111	0,158	0,227

Często operator $\hat{h} \circ \Phi$ nie spełnia warunku zwężania. Wówczas trzeba równanie (3.3.1) przygotować do metody kolejnych przybliżeń. Wybierzmy w tym celu element $g \in \mathcal{L}_1$ taki, że $\delta^\circ - hg \in G(\mathcal{L}_1)$. Równanie (3.3.1) można zapisać w równoważnej postaci

$$(\delta^\circ - hg)y = x + h(\Phi(y) - gy).$$

Stąd otrzymuje się:

$$y = (\delta^\circ - hg)^{-1}x + (\delta^\circ - hg)^{-1}h(\Phi(y) - gy) \tag{3.3.3}$$

Jeżeli operator $(\delta^\circ - hg)^{-1}h(\Phi(\cdot) - g\cdot)$ jest zwężający, to równanie (3.3.3) można rozwiązywać metodą kolejnych przybliżeń. Powyższy rezultat można sformułować następująco:

TWIERDZENIE 3.3.1

Jeżeli istnieje element $g \in \mathcal{L}_1$ taki, że:

(I) operator $\Phi(\cdot) - g\cdot$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą α,

(II) $\delta^\circ - hg \in G(\mathcal{L}_1)$ (funkcja f_{hg} spełnia założenia twierdzenia 3.1.3),

(III) $\|(\delta^\circ - hg)^{-1}h\| \alpha < 1$,

to ciąg określony równością

$$y_{k+1} = (\delta^\circ - hg)^{-1}x + (\delta^\circ - hg)^{-1}h(\Phi(y_k) - gy_k) \tag{3.3.4}$$

jest zbieżny do jednoznacznego rozwiązania równania (3.3.1).

Przypuśćmy teraz, że $x \in \mathcal{L}_1$. Wzory (3.1.7) i (3.1.8) określają izomorfizm algebry $\mathcal{L}_1$ na algebrę $\mathcal{L}_1'$ z normą $\|f_x\| = \sup\limits_{\lambda \in K(0,1)} |f_x(\lambda)|$. Norma ta jest równoważna normie w $\mathcal{L}_1$, skąd wynika następujący wariant twierdzenia 3.3.1.

TWIERDZENIE 3.3.2

Niech $x \in \mathcal{L}_1$. Jeżeli istnieje element $g \in \mathcal{L}_1$ taki, że:

(I) operator $\Phi(\cdot) - g\cdot$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą α,

(II) $\inf\limits_{\lambda \in \overline{K}(0,1)} \left| \frac{1}{f_h(\lambda)} - f_g(\lambda) \right| > \alpha$,

to ciąg określony równością (3.3.4) jest zbieżny do jednoznacznego rozwiązania równania (3.3.1) w $\mathcal{L}_1$.

Analogiczne twierdzenie można sformułować dla algebry $\mathcal{F}_N$. Z twierdzenia 3.2.3 o izomorfizmie algebr Banacha $\mathcal{F}_N$ i $\mathcal{F}_N'$ wynika następujące

TWIERDZENIE 3.3.3

Niech $x \in \mathcal{P}_N$. Jeżeli istnieje element $g \in \mathcal{P}_N$ taki, że

(I) operator $\Phi(\cdot) - g\cdot$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą α,

(II) $\inf\limits_{\lambda \in Sp(\text{Ш})} \left| \frac{1}{f_h(\lambda)} - f_g(\lambda) \right| > \alpha$,

to ciąg $\{y_k\}$ określony wyrażeniem

$$y_{k+1} = (\text{Ш}^{\circ} - hg)^{-1} x + (\text{Ш}^{\circ} - hg)^{-1} h(\Phi(y_k) - gy_k)$$

jest zbieżny do jednoznacznego rozwięzania równania (3.3.1) w $\mathcal{P}_N$.

3.4. Operatory jednorodne czasowo niezmiennicze

Przez $\overset{(M)}{\mathcal{D}}_{sym}$ oznaczmy podprzestrzeń sygnałów w pełni symetrycznych przestrzeni $\overset{(M)}{\mathcal{D}}$, tj. zbiór wszystkich $x \in \overset{(M)}{\mathcal{D}}$, których wartości $x(\mathbf{n})$ nie zmieniają się przy dowolnej permutacji współrzędnych $n_1, \ldots, n_M$ elementu $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M$. Analogicznie określa się przestrzenie $\overset{(M)}{\mathcal{L}}_{\rho sym}$, $\overset{(M)}{\mathcal{L}}{}^{\infty}_{sym}$. Łatwo sprawdzić, że mnożenie w $\mathcal{L}_{\rho sym}$, określone wzorem (3.1.2), odwzorowuje $\mathcal{L}_{\rho sym} \times \mathcal{L}_{\rho sym}$ w $\mathcal{L}_{\rho sym}$, a więc przestrzeń $\mathcal{L}_{\rho sym}$ jest podalgebrą Banacha algebry $\mathcal{L}_{\rho}$. Rzeczywiście, jeżeli przez π_i oznaczymy operator i-tej permutacji współrzędnych $n_1, \ldots, n_M$ elementu $\mathbf{n}(0 \leq i \leq M!)$, to z wyrażenia (3.1.2) otrzymuje się:

$$xy(\pi_i(\mathbf{n})) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{N}^M} x(\pi_i(\mathbf{n}) - \mathbf{m}) y(\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{N}^M} x(\pi_i(\mathbf{n} - \mathbf{p})) y(\pi_i(\mathbf{p}))$$

dla dowolnych $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M$, skąd wynika, że jeżeli $x \in \mathcal{L}_{\rho sym}$ i $y \in \mathcal{L}_{\rho sym}$, to $xy \in \mathcal{L}_{\rho sym}$. Wynika stąd też, że operator $\hat{h}(x) = hx$ odwzorowuje $\overset{(M)}{\mathcal{L}}{}^{\infty}_{sym}$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in \mathcal{L}_{1 sym}$.

Łatwo sprawdzić, że operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$, określony następująco:

$$x^{\textcircled{m}}(\mathbf{n}) = x(n_1) x(n_2) \ldots x(n_m), \tag{3.4.1}$$

odwzorowuje $\overset{(1)}{\mathcal{L}}_{\rho}$ w $\overset{(m)}{\mathcal{L}}_{\rho 1}$, a także odwzorowuje $\overset{(1)}{\mathcal{L}}{}^{\infty}$ w $\overset{(m)}{\mathcal{L}}{}^{\infty}_{sym}$, oraz że zachodzą równości:

$$\| x^{\textcircled{m}} \|_{\overset{(m)}{\mathcal{L}}_{\rho_1}} = \| x \|^{m}_{\overset{(1)}{\mathcal{L}}_{\rho}} \tag{3.4.2}$$

$$\| x^{\textcircled{m}} \|_{\overset{(m)}{\mathcal{L}}{}^{\infty}} = \| x \|^{m}_{\overset{(1)}{\mathcal{L}}{}^{\infty}} \tag{3.4.3}$$

$$\tilde{f}_{x^{\circledast}}(y) = \tilde{f}_x(y_1)\tilde{f}_x(y_2) \ldots \tilde{f}_x(y_m). \tag{3.4.4}$$

Operatorem jednorodnym czasowo niezmienniczym stopnia m nazywamy odwzorowanie $\hat{h}$ zadane na $\overset{(1)}{\mathcal{L}}_\infty$ takie, że

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = h\, x^{\circledast}(n1), \tag{3.4.5}$$

gdzie $h \in \mathcal{L}_{\varrho sym}$. Z twierdzenia (3.1.2) wynika, że $\hat{h}$ odwzorowuje $\overset{(1)}{\mathcal{L}}_\infty$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in \mathcal{L}_{1sym}$.

Założenie, że h jest elementem w pełni symetrycznym, nie zmniejsza ogólności powyższej definicji, o czym świadczy następujące

TWIERDZENIE 3.4.1

Dla każdego $h' \in \mathcal{L}_1$ istnieje taki element $h \in \mathcal{L}_{1sym}$, że

$$h'\, x^{\circledast}(n1) = h\, x^{\circledast}(n1)$$

przy dowolnym $x \in \overset{(1)}{\mathcal{L}}_\infty$ i dowolnym $n \in \mathcal{N}$

Dowód. Wprowadzimy w zbiorze $\mathcal{N}^m$ relację permutacji π, tj. powiemy, że $p \pi p'$ wtedy i tylko wtedy, gdy p' jest dowolną permutacją p. Łatwo przekonać się, że relacja ta jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, a więc jest równoważnością. Relacja ta dzieli zbiór $\mathcal{N}^m$ na rozłączne klasy. Przez $\mathcal{N}^m(q)$ i l_q oznaczmy odpowiednio klasę z przedstawicielem q i liczbę jej elementów, a przez $(\mathcal{N}^m)$ oznaczmy zbiór wszystkich przedstawicieli różnych klas. Wówczas otrzymamy:

$$\sum_{p \in \mathcal{N}^m} h'(n1-p)x^{\circledast}(p) = \sum_{q \in (\mathcal{N}^m)} x^{\circledast}(q) \sum_{p \in \mathcal{N}^m(q)} h'(n1-p) \tag{3.4.6}$$

Zawsze istnieje taki element $h \in \mathcal{L}_{1sym}$, że dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$ zachodzi

$$l_q h(n1-q) = \sum_{p \in \mathcal{N}^m(q)} h'(n1-p). \tag{3.4.7}$$

Z wyrażeń (3.4.6) i (3.4.7) wynika, że

$$\sum_{p \in \mathcal{N}^m} h'(n1-p)x^{\circledast}(p) = \sum_{q \in (\mathcal{N}^m)} l_q h(n1-q)x^{\circledast}(q) = \sum_{p \in \mathcal{N}^m} h(n1-p)x^{\circledast}(p). \blacksquare$$

Z wniosku do twierdzenia 3.1.1 i z twierdzenia 2.9 wynika, że

$$h\, x^{\circledast} = \tilde{f}_{h x^{\circledast}}(\delta) = \tilde{f}_h(\delta)\, \tilde{f}_{x^{\circledast}}(\delta). \tag{3.4.8}$$

Ze wzoru (3.1.4) otrzymuje się:

$$\left[h\, x^{\circledast}\right](n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{hx^{\circledast}}(0),$$

a stąd

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = hx^{\circledast}(n1) = \frac{1}{(n!)^m} f^{(n1)}_{hx^{\circledast}}(0). \tag{3.4.9}$$

Wyrażenia (3.4.4), (3.4.8) i (3.4.9) mogą służyć do obliczania kolejnych wartości $\left[\hat{h}(x)\right](n)$ sygnału $\hat{h}(x)$.

Za pomocą wyrażeń (3.4.3) i (3.4.5) można oszacować normę elementu $h(x)$

$$\|\hat{h}(x)\|_{\mathcal{L}^{\infty}_{(1)}} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1^{(m)}} \|x\|^m_{\mathcal{L}^{\infty}_{(1)}}. \tag{3.4.10}$$

Przejdźmy teraz do zagadnienia identyfikacji układu nieliniowego przy użyciu operatora jednorodnego stopnia m. Identyfikacja polega na określeniu elementu $h \in \mathcal{L}_{1sym}$. Problem ten sprowadza się do wyznaczenia funkcji

$$h((\cdot) - p_1, \ldots, (\cdot) - p_m) \tag{3.4.11}$$

dla wszystkich wartości $p_1, \ldots, p_m$, drogą pomiaru odpowiedzi układu na ciąg $\left\{\Delta^{(i)}_n\right\}$ pobudzeń

$$\Delta^{(i)}_n = \delta^{n_1^{(i)}} + \ldots + \delta^{n_1^{(i)}} \qquad i=1,\ldots,m.$$

Niech $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathcal{N}_+^m$. Przez K_r^p oznaczmy zbiór wszystkich różnych kombinacji $q = (q_1, \ldots, q_r)$ wyrazów ciągu p. Określając odpowiedź układu na sygnał Δ_p, a następnie odejmując od niej i dodając na przemian sumy odpowiedzi na sygnały Δ_q dla q należących kolejno do $K^p_{m-1}, K^p_{m-2}, \ldots, K^p_1$, otrzymamy funkcję (3.4.11):

$$h(n-p_1, n-p_2, \ldots, n-p_m) = \frac{1}{m!}\Big(\left[\hat{h}(\Delta p)\right](n) - \sum_{q \in K^p_{m-1}} \left[\hat{h}(\Delta q)\right](n) +$$

$$+ \sum_{q \in K^p_{m-2}} \left[\hat{h}(\Delta q)\right](n) - \sum_{q \in K^p_{m-3}} \left[\hat{h}(\Delta q)\right](n) + \ldots + (-1)^{m-1} \sum_{q \in K^p_1} \left[\hat{h}(\Delta q)\right](n)\Big).$$

Wyrażenie to można zapisać krótko w postaci:

$$h(n\mathbb{1}-p) = \frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \sum_{\underline{q} \in K^p_{m-r}} \left[\hat{h}(\Delta\underline{q})\right](n). \qquad (3.4.12)$$

Analiza jest zagadnieniem odmiennym od identyfikacji. Przy analizie punktem wyjścia jest zwykle postać uwikłana operatora układu, zadana często równaniem (3.3.1).

Chcąc aproksymować operator układu operatorem jednorodnym $\hat{h}_m$ stopnia m, można zastosować połączony algorytm analizy i identyfikacji. Poszczególne odpowiedzi $\hat{h}_m(\Delta\underline{q})$ na sygnały $x = \Delta\underline{q}$ wyznacza się stosując algorytm kolejnych przybliżeń, opisany w paragrafie 3.3, a następnie element $h_m \in \mathcal{E}_1^{(m)}$ określa się za pomocą wzoru (3.4.12).

Analogicznie można wprowadzić pojęcie operatora jednorodnego w przestrzeni $\mathcal{P}_N$. Operator $(\cdot)^{(m)}$, określony równością (3.4.1), odwzorowuje $\mathcal{P}_N$ w $\mathcal{P}_{N1sym}^{(m)}$ (względnie $\mathcal{P}'_N$ w $\mathcal{P}_{N1sym}^{(m)\prime}$). Zachodzą równości analogiczne do (3.4.2), (3.4.3) i (3.4.4):

$$\|x^{(m)}\|_{\mathcal{P}_{N1}^{(m)}} = \|x\|^m_{\mathcal{P}_N}, \qquad (3.4.13)$$

$$\|x^{(m)}\|_{\mathcal{P}_{N1}^{(m)}} = \|x\|^m_{\mathcal{P}'_N}, \qquad (3.4.14)$$

$$\tilde{f}_{x^{(m)}}(y) = \tilde{f}_x(y_1)\,\tilde{f}_x(y_2)\,\ldots\,\tilde{f}_x(y_m). \qquad (3.4.15)$$

Operatorem jednorodnym stopnia m nazwiemy odwzorowanie $\hat{h}: \mathcal{P}_N \to \mathcal{P}_N$ takie, że

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = hx^{(m)}(n\mathbb{1}), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \qquad (3.4.16)$$

gdzie $h \in \mathcal{P}_{N1sym}^{(m)}$. Operator ten można też traktować jako odwzorowanie $\mathcal{P}'_N \to \mathcal{P}'_N$.

Z twierdzeń 3.2.2 i 2.9 wynika, że

$$hx^{(m)} = \tilde{f}_{hx^{(m)}}(\omega) = \tilde{f}_h(\omega)\,\tilde{f}_{x^{(m)}}(\omega) \qquad (3.4.17)$$

Stosując wzór (3.2.4) do wyrażenia (3.4.17) i biorąc pod uwagę, że

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = \varepsilon = \exp(j\,\tfrac{2\pi}{N}),$$

otrzymuje się:

$$\left[hx^{\textcircled{m}}\right](\mathbf{n}) = \frac{1}{N^m} \sum_{\mathbf{k}=0}^{(N-1)\mathbf{1}} \varepsilon^{-(\mathbf{k},\mathbf{n})} f_{hx^{\textcircled{m}}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k})}).$$

Stąd

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = hx^{\textcircled{m}}(n\mathbf{1}) = \frac{1}{N^m} \sum_{\mathbf{k}=0}^{(N-1)\mathbf{1}} \varepsilon^{-n\|\mathbf{k}\|} f_{hx^{\textcircled{m}}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k})}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{3.4.18}$$

Wyrażenia (3.4.15), (3.4.17) i (3.4.18) służą do obliczania kolejnych wartości $[\hat{h}(x)](n)$ sygnału $\hat{h}(x)$.

Normę elementu $\hat{h}(x)$ można oszacować za pomocą nierówności

$$\|\hat{h}(x)\|_{\mathcal{P}'_N} \leq \|h\|_{\mathcal{P}_{N\mathbf{1}}^{(m)}} \|x\|^m_{\mathcal{P}_N}. \tag{3.4.19}$$

Identyfikację przeprowadza się analogicznie, z tym że

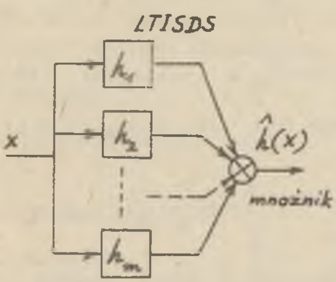
$$\Delta_{\mathbf{n}^{(i)}} = \omega^{n_1^{(i)}} + \ldots + \omega^{n_1^{(i)}}, \quad i=1,\ldots,m.$$

Wówczas wzór (3.4.12) pozostaje w mocy. Analogicznie też aproksymuje się operator układu, zadany w postaci uwikłanej równaniem (3.3.1), operatorem jednorodnym.

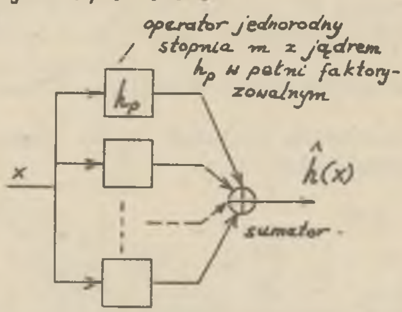
Każdy operator jednorodny określony wyrażeniem (3.4.5) z elementem $h \in \mathcal{E}^{(m)}_{1sym}$ (jądrem) w pełni faktoryzowalnym:

$$h(\mathbf{n}) = h_1(n_1)h_2(n_2) \ldots h_m(n_m) \tag{3.4.20}$$

jest syntetyzowalny w strukturze widocznej na rys. 3.4.1.



Rys. 3.4.1. Struktura realizacji operatora jednorodnego stopnia m z jądrem w pełni faktoryzowalnym



Rys. 3.4.2. Struktura realizacji operatora jednorodnego z niefaktoryzowalnym jądrem

Z równości (3.4.20) i (3.1.4) wynika, że h jest w pełni faktoryzowalny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f_h jest w pełni faktoryzowalna:

$$f_h(\lambda) = f_{h_1}(\lambda_1)\, f_{h_2}(\lambda_2) \ldots f_{h_m}(\lambda_m).$$

Jeżeli jądro h nie jest w pełni faktoryzowalne, wówczas funkcję f_h można rozłożyć w polidysku $\bar{K}(0,1)$ w szereg potęgowy

$$f_h(\lambda) = \sum_{\|p\|=0}^{\infty} h(p)\lambda^p = \sum_{\|p\|=0}^{\infty} f_{h_p}(\lambda),$$

gdzie funkcje f_{h_p}:

$$f_{h_p}(\lambda) = h(p)\lambda^p$$

są w pełni faktoryzowalne. Zatem jądro

$$h_p = \tilde{f}_{h_p}(\delta) = h(p)\delta^p$$

jest realizowalne w strukturze widocznej na rys. 3.4.1. Natomiast jądro

$$h = \sum_{\|p\|=0}^{\infty} h_p \tag{3.4.21}$$

jest realizowalne w strukturze widocznej na rys. 3.4.2, złożonej z nieskończonej liczby bloków realizujących operatory jednorodne o jądrach h_p w pełni faktoryzowalnych. W praktyce szereg (3.4.21) trzeba obciąć, otrzymując

$$h' = \sum_{\|p\|=0}^{M} h_p,$$

a błąd realizacji oszacować za pomocą normy $\|h-h'\|_{(\mathscr{L}_1^m)}$. Obliczmy jeszcze poszczególne wartości $h_p(n)$ jądra składowego h_p. Ze wzoru (3.1.4) otrzymuje się:

$$h_p(n) = \frac{1}{n!} f_{h_p}^{(n)}(0) = \frac{h(p)}{n!}\left[\frac{d^{n_1}\lambda_1^{p_1}}{d\lambda_1^{n_1}} \cdots \frac{d^{n_m}\lambda_m^{p_m}}{d\lambda_m^{n_m}}\right]_{\lambda=0} = \begin{cases} h(p)\,\dfrac{p!}{n!(p-n)!} & p-n \in \mathcal{N}_+^m \\ 0 \quad \text{dla} & p-n \notin \mathcal{N}_+^m \end{cases}$$

3.5. Operatory analityczne czasowo niezmiennicze

Odwzorowanie S_m: $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$, określone wyrażeniem:

$$\left[S_m(x)\right](n) = \sum_{k=1}^{m} \left[\hat{h}_k(x)\right](n) = \sum_{k=1}^{m} h_k x^{ⓚ}(n1), \tag{3.5.1}$$

gdzie $h_k \in \overset{(k)}{\mathcal{L}}_{1sym}$ (k=1,....,m), nazywamy o p e r a t o r e m w i e l o m i a n o w y m stopnia m. Normę elementu $S_m(x)$ można oszacować za pomocą nierówności:

$$\| S_m(x) \|_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}} \leq \sum_{k=1}^{m} \| h_k \|_{\overset{(k)}{\mathcal{L}}_{1sym}} \| x \|^k_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}} . \tag{3.5.2}$$

Jeżeli dla każdego $x \in Z$, gdzie Z jest zbiorem w $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$, istnieje granica $S(x)$ ciągu $\{S_m(x)\}$ w sensie normy[5], to operator S: $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ nazwiemy operatorem a n a l i t y c z n y m. Z wyrażenia (3.5.2) wynika, że jeżeli zwykły potęgowy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| h_k \|_{\overset{(k)}{\mathcal{L}}_{1sym}} \| x \|^k_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}}$$

jest zbieżny, to szereg funkcjonalny

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}_k(x) \tag{3.5.3}$$

także jest zbieżny.

Postawmy następujący problem. Kiedy operator układu zadany w postaci uwikłanej równaniem (3.3.1) można rozwikłać przy użyciu operatora analitycznego? Warunek dostateczny określa następujące

TWIERDZENIE 3.5.1

Niech w równaniu

$$y = x + \hat{g}\left[\Phi(y)\right] \tag{3.5.4}$$

---

[5] Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją element $S(x) \in \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ niezależny od ε oraz liczba $M(\varepsilon)$ takie, że $\| S(x) - S_m(x) \|_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}} < \varepsilon$ za każdym razem gdy $m > M(\varepsilon)$.

$x \in \overset{(1)}{\mathcal{L}^{\infty}}$, $\hat{g}: \overset{(1)}{\mathcal{L}^{\infty}} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^{\infty}}$ jest operatorem mnożenia (splotu) przez element $g \in \mathcal{L}_1$: $\hat{g}(x) = gx$, a Φ jest $\overset{(1)}{\mathcal{L}^{\infty}}$ wartościową funkcją określoną na $\overset{(1)}{\mathcal{L}^{\infty}}$ taką, że:

$$\left[\Phi(y)\right](n) = \varphi\left[y(n)\right], \tag{3.5.5}$$

gdzie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją analityczną. Jeżeli operator $\hat{g} \circ \Phi$ jest zwężający, to istnieje operator analityczny $\hat{\mathbb{R}}$ taki, że $y = \hat{\mathbb{R}}(x)$.

Dowód. Do dowodu twierdzenia będą potrzebne: pojęcie zbieżności ciągu dwuargumentowego w przestrzeni Banacha oraz dwa lematy.

Niech $\{x_{m,n}\}$ będzie ciągiem dwuargumentowym o wartościach w pewnej przestrzeni Banacha X. Ciąg ten nazywamy ciągiem zbieżnym, jeżeli dla dowolnego $\mathcal{E} > 0$ istnieje element $x \in X$ niezależny od $\mathcal{E}$ oraz dwie liczby $M(\mathcal{E})$ i $N(\mathcal{E})$ takie, że $\|x - x_{m,n}\| < \mathcal{E}$ za każdym razem, gdy $m > M(\mathcal{E})$ i $n > N(\mathcal{E})$

Przez (X,X) oznaczmy zbiór wszystkich operatorów zwężających, odwzorowujących zamknięty zbiór przestrzeni X w siebie.

L e m a t 1

Jeżeli ciąg $\{A_n\}$ operatorów z (X,X) jest zbieżny do operatora $A \in (X,X)$ tj., jeżeli $\bigwedge_{x \in X} \|A(x) - A_n(x)\| \to 0$, to ciąg $\{x_{m,n}\}$ określony równością

$$x_{m,n} = A_m(x_{m,n-1})$$

jest zbieżny do rozwiązania równania $x = A(x)$.

D o w ó d l e m a t u. Z zasady odwzorowań zwężających wynika, że dla ustalonego m istnieje granica $x_m = \lim_{n \to \infty} x_{m,n}$ taka, że $x_m = A_m(x_m)$. Mają miejsce następujące oszacowania:

$$\|x - x_{m,n}\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - x_{m,n}\| \tag{3.5.6}$$

oraz:

$$\|x - x_m\| = \|A(x) - A_m(x_m)\| \leq \|A(x) - A(x_m)\| + \|A(x_m) - A_m(x_m)\| \leq$$

$$\leq \lambda\|x - x_m\| + \|A(x_m) - A_m(x_m)\|. \tag{3.5.7}$$

Liczba dodatnia λ w nierówności (3.5.7) spełnia warunek $\lambda < 1$, zatem

$$\|x - x_m\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\|A(x_m) - A_m(x_m)\|. \tag{3.5.8}$$

Z nierówności (3.5.8) wynika, że dla $m > M$ zachodzi $\|x-x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oprócz tego przy ustalonym $m > M$ dla $n > N$ spełniona jest nierówność $\|x_m-x_{m,n}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem dla $m > M$ i $n > N$ otrzymuje się $\|x-x_{m,n}\| < \varepsilon$, co kończy dowód lematu. □

L e m a t 2

Jeżeli funkcja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w wyrażeniu (3.5.5) jest wielomianem, a $\hat{S}$ jest operatorem wielomianowym, to $\hat{g} \circ \Phi \circ \hat{S}$ też jest operatorem wielomianowym.

D o w ó d l e m a t u. Bez utraty ogólności można założyć, że φ jest jednomianem stopnia $r : \varphi(t) = t^r$. Wówczas

$$\left[\Phi(\hat{S}(x))\right](n) = \left[\sum_{k=1}^{m} h_k x^{(k)}(n\mathbb{1})\right]^r , \qquad (3.5.9)$$

gdzie $h_k \in \mathcal{L}^{(k)}_{1sym}$. Wyrażenie (3.5.9) jest sumą m^r składników typu

$$h_{k_1} x^{(k_1)}(n\mathbb{1}) \dots h_{k_r} x^{(k_r)}(n\mathbb{1}) = \sum_{p_1 \in \mathcal{N}^{k_1}} h_{k_1}(n\mathbb{1}-p_1) x^{(k_1)}(p_1) \dots \sum_{p_r \in \mathcal{N}^{k_r}} h_{k_r}(n\mathbb{1}-p_r) x^{(k_r)}(p_r) =$$

$$= \sum_{p_1, \dots, p_r} h_{k_1}(n\mathbb{1}-p_1) \dots h_{k_r}(n\mathbb{1}-p_r) x^{(k_1)}(p_1) \dots x^{(k_r)}(p_r) =$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{N}^{k_1+\dots+k_r}} h_{k_1,\dots,k_r}(n\mathbb{1}-p) x^{(k_1+\dots+k_r)}(p) \qquad (3.5.10)$$

Z wyrażenia (3.5.10) wynika, że $h_{k_1,\dots,k_r} \in \mathcal{L}^{(k_1+\dots+k_r)}_{1sym}$, a więc $\Phi \circ \hat{S}$ jest operatorem wielomianowym. Zbadajmy teraz złożenie operatora $\hat{g}$ z operatorem jednorodnym o jądrze $h_m \in \mathcal{L}^{(m)}_{1sym}$. Mamy

$$\left[\hat{g} \circ \hat{h}_m(x)\right](n) = \sum_{p \in \mathcal{N}} g(n-p) \sum_{s \in \mathcal{N}^m} h_m(p\mathbb{1}-s) x^{(m)}(s) =$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{N}^m} x^{(m)}(s) \sum_{p \in \mathcal{N}} g(n-p)\, h_m(p\mathbb{1}-s) = \sum_{s \in \mathcal{N}^m} x^{(m)}(s) \sum_{p \in \mathcal{N}} h_m(n\mathbb{1}-s-p\mathbb{1}) g(p) =$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{N}^m} h'_m(n\mathbb{1}-s) x^{(m)}(s) .$$

gdzie

$$h'_m(\mathfrak{q}) = \sum_{p\in\mathcal{N}} h_m(\mathfrak{q}-p\mathbf{1})g(p). \tag{3.5.11}$$

Z wyrażenia (3.5.11) wynika nierówność:

$$\sum_{\mathfrak{q}\in\mathcal{N}^m} \left|h'_m(\mathfrak{q})\right| = \sum_{\mathfrak{q}\in\mathcal{N}^m} \left|\sum_{p\in\mathcal{N}} h_m(\mathfrak{q}-p\mathbf{1})g(p)\right| \leqslant \sum_{p\in\mathcal{N}} \left|g(p)\right| \sum_{\mathfrak{q}\in\mathcal{N}^m} \left|h_m(\mathfrak{q})\right|$$

oraz pełna symetria funkcji h'_m. Zatem $h'_m \in \mathfrak{I}^{(m)}_{1\,sym}$. Tym samym udowodniliśmy, że $\hat{g} \circ \Phi \circ \hat{S}$ jest operatorem wielomianowym. □

Niech $\{\Phi_m\}$ będzie ciągiem operatorów $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ określonych następująco:

$$\left[\Phi_m(y)\right](n) = \varphi_m\left[y(n)\right],$$

gdzie $\{\varphi_m\}$ jest ciągiem wielomianów, $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zbieżnym jednostajnie do funkcji analitycznej φ. Wprowadźmy dwuargumentowy ciąg $\{y_{p\mathfrak{q}}\}$ elementów przestrzeni $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$, o wyrazach określonych następująco:

$$y_{p\mathfrak{q}} = x + \hat{g}\left[\Phi_p(y_{p,\mathfrak{q}-1})\right], \quad y_{p,0} = x.$$

Z lematu 2 wynika istnienie ciągu $\{\hat{R}_{p\mathfrak{q}}\}$ operatorów wielomianowych takich że

$$y_{p\mathfrak{q}} = \hat{R}_{p\mathfrak{q}}(x).$$

Zatem z definicji operatora analitycznego i z lematu 1 wynika, że istnieje operator analityczny $\hat{R}$ taki, że $y = \hat{R}(x)$. ■

Identyfikację układu przy użyciu operatora wielomianowego stopnia m, określonego wyrażeniem (3.5.1), przeprowadza się wykorzystując metodę identyfikacji operatorem jednorodnym. Pozostaje w mocy wzór (3.4.12), za pomocą którego wyznacza się jądro h_m (najwyższego stopnia):

$$h_m(n\mathbf{1}-p) = \frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \sum_{\mathfrak{q}\in K^p_{m-r}} \left[S_m(\Delta\mathfrak{q})\right](n). \tag{3.5.12}$$

Po określeniu jądra h_m można wprowadzić operator S_{m-1} o stopniu obniżonym:

$$\left[S_{m-1}(x)\right](n) = \left[S_m(x)\right](n) - \sum_{p\in\mathcal{N}^m} h_m(n\mathbf{1}-p)x^{(m)}(p).$$

a następnie wyznaczyć jądro h_{m-1} ze wzoru analogicznego do (3.5.12):

$$h_{m-1}(n1-p) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r \sum_{q \in K^p_{m-1-r}} \left[S_{m-1}(\Delta q)\right](n).$$

Postępując dalej w ten sposób można kolejno określić wszystkie elementy $h_m, h_{m-1}, \ldots, h_1$ operatora S_m i tym samym zakończyć identyfikację.

Chcąc aproksymować operatorem wielomianowym operator układu zadany w sposób uwikłany, można zastosować połączony algorytm analizy i identyfikacji analogicznie jak podczas aproksymacji operatorem jednorodnym (paragraf 3.4). Postępowanie takie można stosować nawet wówczas, gdy charakterystyka bloku nieliniowego nie jest zadana w sposób analityczny, lecz graficzny.

Każdy operator wielomianowy jest syntetyzowalny w strukturze równoległej złożonej z bloków realizujących składowe operatory jednorodne.

4. OPERATORY UKŁADÓW CZASOWO ZMIENNYCH

4.1. $\mathcal{K}_r$ i $\mathcal{K}$-algebry

Niech h będzie C-wartościową funkcją zadaną w $\mathcal{N} \times \mathcal{N}^M$ taką, że

(I) $h(n,\mathbf{n}) = 0$ dla $\mathbf{n} > n1$, $(\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M)$,

(II) $\bigvee_{\alpha \in R_+} \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M} |h(n,\mathbf{n})| \leqslant \alpha$.

Przez $\overset{(M)}{\mathcal{K}}_r$ oznaczmy zbiór wszystkich funkcji h spełniających warunki (I) i (II). Łatwo zauważyć, że $\overset{(M)}{\mathcal{K}}_r$ jest przestrzenią liniową, a po wprowadzeniu normy

$$\|h\| = \sup_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M} |h(n,\mathbf{n})| \tag{4.1.1}$$

staje się przestrzenią Banacha.

TWIERDZENIE 4.1.1

Operator przyczynowy $\hat{h}$ określony wyrażeniem

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n})x(\mathbf{n}) \tag{4.1.2}$$

odwzorowuje przestrzeń $\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ w $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in \overset{(M)}{\mathcal{K}}_r$.

Dowód. Jeżeli $h \in \overset{(M)}{\mathcal{K}}_r$, to istnieją takie liczby $\alpha, \beta \in R_+$, że dla dowolnego $x \in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ i dowolnego $n \in \mathcal{N}$ zachodzi nierówność

$$\left|\left[\hat{h}(x)\right](n)\right| = \left|\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n})x(\mathbf{n})\right| \leqslant \beta \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M} |h(n,\mathbf{n})| \leqslant \alpha\beta,$$

a więc $\hat{h}(x) \in \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$. Zatem warunek $h \in \overset{(M)}{\mathcal{K}}_r$ jest wystarczający.

Dowód konieczności trzeba rozpocząć od wykazania, że jeżeli $\hat{h}: \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ to szereg $\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n})$ jest absolutnie zbieżny przy dowolnym $n \in \mathcal{N}$. Załóżmy, że jest przeciwnie i wybierzmy sygnał $x \in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ taki, że

$$x(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad h(n,\mathbf{n}) \geqslant 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad h(n,\mathbf{n}) < 0 \end{cases}$$

Wówczas:

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^M} \left|h(n,\mathfrak{n})\right|,$$

skąd wynika, że $\hat{h}(x) \notin \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$, a więc szereg $\sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathfrak{n})$ musi być absolutnie zbieżny przy dowolnym n. Aby wykazać, że funkcja $\sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^M} |h(\cdot,\mathfrak{n})|$ jest ograniczona, skorzystamy z twierdzenia Banacha-Steinhausa (np. [11], par. 10,9):

Niech $\{u_n\}$ będzie ciągiem funkcjonałów liniowych zadanych w przestrzeni Banacha i niech $\|u_n\|$ oznacza normę funkcjonału u_n. Jeżeli $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n(x)|$ jest skończona dla dowolnego x, to ciąg $\{\|u_n\|\}$ jest ograniczony.

Funkcjonał u_n zadany na $\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ określmy następująco:

$$u_n(x) = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathfrak{n})x(\mathfrak{n}).$$

Wówczas jego normę oblicza się z wyrażenia:

$$\|u_n\| = \sup_{x\in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \frac{|u_n(x)|}{\|x\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}}} = \sup_{\|x\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}}=1} |u_n(x)| = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^M} |h(n,\mathfrak{n})|. \qquad (4.1.3)$$

Jeżeli $\hat{h}: \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$, to ciąg $\{|u_n(x)|\}$ jest ograniczony od góry i z twierdzenia Banacha-Steinhausa oraz ze wzoru (4.1.3) wynika, że

$$\bigvee_{\alpha\in\mathcal{R}_+} \bigwedge_{n\in\mathcal{N}} \sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{N}^M} |h(n,\mathfrak{n})| < \alpha. \quad \blacksquare$$

Z twierdzenia 4.1.1 wynika

W n i o s e k

Każdemu elementowi h przestrzeni $\overset{(M)}{\mathcal{K}_r}$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie element $\hat{h}$ przestrzeni Banacha $\overset{(M)}{\hat{\mathcal{K}}_r}$ przyczynowych operatorów liniowych odwzorowujących $\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ w $\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$, z normą

$$\|\hat{h}\| = \sup_{x\in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \frac{\|\hat{h}(x)\|_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}}}{\|x\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}}} = \|h\|_{\overset{(M)}{\mathcal{K}_r}}. \qquad (4.1.4)$$

Istotnie

$$\sup_{x\in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}} \frac{\|\hat{h}(x)\|_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}}}{\|x\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}}} = \sup_{\|x\|_{\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}}=1} \|\hat{h}(x)\|_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}} = \sup_{n\in\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} |h(n,\mathbf{n})|.$$

Symbolem $\overset{(M)}{\Gamma}$ oznaczmy następujący zbiór:

$$\overset{(M)}{\Gamma} = \left\{ x\in \overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty} \;\middle|\; \bigvee_{\xi\in C} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathcal{N}^M} \bigwedge_{\mathbf{n}>N} |x(\mathbf{n})-\xi| < \varepsilon \right\}.$$

$\overset{(M)}{\Gamma}$ jest więc zbiorem wszystkich czasowo wielowymiarowych sygnałów ograniczonych i zbieżnych przy $n_1\to\infty, \dots, n_M\to\infty$. Będziemy stosować zapis $\xi = \lim_{\mathbf{n}\to\infty}(x(\mathbf{n}))$, lub $x(\mathbf{n})\to\xi$. Nietrudno przekonać się, że $\overset{(M)}{\Gamma}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\overset{(M)}{\mathcal{L}^\infty}$ z niezmienioną normą.

Przez $\overset{(M)}{\mathcal{K}}$ oznaczmy zbiór wszystkich $h\in \overset{(M)}{\mathcal{K}_r}$ takich, że:

(I) istnieje $\lim_{n\to\infty} h(n,\mathbf{n}) = \alpha_{\mathbf{n}}$ dla dowolnego ustalonego $\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M$, (4.1.5)

(II) $\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n}) = \beta_n \to \beta$ przy $n\to\infty$. (4.1.6)

Łatwo sprawdzić, że $\overset{(M)}{\mathcal{K}}$ z normą określoną wzorem (4.1.1) jest podprzestrzenią przestrzeni Banacha $\overset{(M)}{\mathcal{K}_r}$.

TWIERDZENIE 4.1.2

Operator przyczynowy $\hat{h}$, określony wyrażeniem (4.1.2), odwzorowuje przestrzeń $\overset{(M)}{\Gamma}$ w $\overset{(1)}{\Gamma}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h\in\overset{(M)}{\mathcal{K}}$. Ponadto, jeżeli $\xi = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} x(\mathbf{n})$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left[\hat{h}(x)\right](n) = \beta\xi + \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} \alpha_{\mathbf{n}}\left[x(\mathbf{n}) - \xi\right]. \qquad (4.1.7)$$

Dowód. Niech $h\in\overset{(M)}{\mathcal{K}}$. Wówczas istnieje taka liczba $\gamma\in R_+$, że przy dowolnym $n\in\mathcal{N}$ spełniona jest nierówność:

$$\sum_{\mathbf{n}\le N} |h(n,\mathbf{n})| \le \gamma,$$

skąd wynika, że

$$\sum_{\mathbf{n}\le N} |\alpha_{\mathbf{n}}| \le \gamma.$$

czyli szereg $\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M}\alpha_{\mathbf{n}}$ jest absolutnie zbieżny. Wybierzmy $x \in \Gamma^{(M)}$ i połóżmy $x(\mathbf{n}) = \xi + \Delta x(\mathbf{n})$, gdzie $\Delta x(\mathbf{n}) \to 0$. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\mathbf{N} \in \mathcal{N}^M$ takie, że $|\Delta x(\mathbf{n})| < \frac{\varepsilon}{3\eta}$ dla $\mathbf{n} > \mathbf{N}$ oraz istnieje $N \in \mathcal{N}$ takie, że

$$\left|\sum_{\mathbf{n}\leq\mathbf{N}}\left[h(n,\mathbf{n}) - \alpha_{\mathbf{n}}\right]\Delta x(\mathbf{n})\right| < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > N.$$

Zatem dla $n > N$ ma miejsce następująca nierówność:

$$\left|\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M}\left[h(n,\mathbf{n}) - \alpha_{\mathbf{n}}\right]\Delta x(\mathbf{n})\right| \leq \left|\sum_{\mathbf{n}\leq\mathbf{N}}\left[h(n,\mathbf{n}) - \alpha_{\mathbf{n}}\right]\Delta x(\mathbf{n})\right| +$$

$$+ \sum_{\mathbf{n}>\mathbf{N}}\left(|h(n,\mathbf{n})| + |\alpha_{\mathbf{n}}|\right)\Delta x(\mathbf{n}) < \frac{1}{3}\varepsilon + 2\eta\frac{\varepsilon}{3\eta} = \varepsilon.$$

Stąd otrzymuje się

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n})\Delta x(\mathbf{n}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n})\left[x(\mathbf{n}) - \xi\right] = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M}\alpha_{\mathbf{n}}\Delta x(\mathbf{n}). \tag{4.1.8}$$

Z wyrażeń (4.1.6) i (4.1.8) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n})x(\mathbf{n}) = \beta\xi + \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M}\alpha_{\mathbf{n}}\left[x(\mathbf{n}) - \xi\right],$$

a więc $\hat{h}(x) \in \Gamma^{(1)}$.

Na odwrót, jeżeli $\hat{h}: \Gamma^{(M)} \to \Gamma^{(1)}$, to z tego, że $\Gamma^{(M)}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\ell^{\infty(M)}$ i z twierdzenia 4.1.1 wynika, że $h \in \mathcal{K}_r^{(M)}$. Podstawiając $x = \hat{\delta}^{\mathbf{p}}$, ($\delta^{\mathbf{p}} \in \Gamma^{(M)}$), otrzymuje się

$$\left[\hat{h}(\delta^{\mathbf{p}})\right](n) = h(n,\mathbf{p}),$$

a więc musi istnieć $\lim_{n\to\infty} h(n,\mathbf{p}) = \alpha_{\mathbf{p}}$ przy dowolnym ustalonym $\mathbf{p}$. Jeżeli podstawić $x(\mathbf{n}) = 1$ dla wszystkich $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M$, to

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^M} h(n,\mathbf{n}),$$

a więc musi być spełniony warunek (4.1.6). Czyli $h \in \mathcal{K}^{(M)}$. ■

W szczególnym przypadku, gdy M=1, twierdzenie 4.1.2 przechodzi w twierdzenie Kojimy-Schura ([11] par. 4.1).

Niech $\Gamma_0^{(M)}$ będzie zbiorem wszystkich czasowo M-wymiarowych sygnałów ograniczonych i zbieżnych do zera, tj.:

$$\overset{(M)}{\Gamma_o} = \left\{ x \in \overset{(M)}{\ell^\infty} \;\middle|\; \bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{N \in \mathcal{N}^M} \; \bigwedge_{n>N} |x(n)| < \varepsilon \right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\overset{(M)}{\Gamma_o}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\overset{(M)}{\Gamma}$. Niech

$$\overset{(M)}{\mathcal{K}_o} = \left\{ h \in \overset{(M)}{\mathcal{K}} \;\middle|\; \bigwedge_{n \in \mathcal{N}^M} \alpha_n = 0 \right\}.$$

Z twierdzenia 4.1.2 wynika następujące

TWIERDZENIE 4.1.3

Operator przyczynowy $\hat{h}$, określony wyrażeniem (4.1.2), odwzorowuje przestrzeń $\overset{(M)}{\Gamma_o}$ w $\overset{(1)}{\Gamma_o}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in \overset{(M)}{\mathcal{K}_o}$.

Z twierdzeń 4.1.2 i 4.1.3 wynika

W n i o s e k

Każdemu elementowi h przestrzeni $\overset{(M)}{\mathcal{K}}$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie element $\hat{h}$ przestrzeni Banacha $\overset{(M)}{\hat{\mathcal{K}}}$ przyczynowych operatorów liniowych odwzorowujących $\overset{(M)}{\Gamma}$ w $\overset{(1)}{\Gamma}$ z normą określoną wzorem (4.1.4). Każdemu elementowi h przestrzeni $\overset{(M)}{\mathcal{K}_o}$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie element $\hat{h}$ przestrzeni Banacha $\overset{(M)}{\hat{\mathcal{K}}_o}$ operatorów przyczynowych liniowych odwzorowujących $\overset{(M)}{\Gamma_o}$ w $\overset{(1)}{\Gamma_o}$, z normą określoną wzorem (4.1.4).

Przestrzenie $\overset{(1)}{\mathcal{K}_r}$, $\overset{(1)}{\mathcal{K}}$, $\overset{(1)}{\mathcal{K}_o}$ oznaczmy krótko przez $\mathcal{K}_r$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_o$.

TWIERDZENIE 4.1.4

Przestrzenie $\mathcal{K}_r$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_o$ z mnożeniem

$$h_1 h_2(n,m) \triangleq \sum_{p \in \mathcal{N}} h_1(n,p) h_2(p,m) \tag{4.1.9}$$

tworzą algebry Banacha. Ponadto dla algebr $\mathcal{K}_r$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_o$ obowiązuje inkluzja $\mathcal{K}_o \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_r$.

Dowód. Z wniosków do twierdzeń 4.1.1 oraz 4.1.2 i 4.1.3 wynika, że przestrzenie $\hat{\mathcal{K}}_r$, $\hat{\mathcal{K}}$, $\hat{\mathcal{K}}_o$ z mnożeniem określonym jako złożenie operatorów tworzą, każda z osobna, algebry Banacha (dowolna przestrzeń operatorów liniowych ograniczonych z mnożeniem określonym jako złożenie operatorów tworzy algebrę Banacha). Niech $\hat{h}_1, \hat{h}_2 \in \hat{\mathcal{K}}_r$, wówczas

$$\left[\hat{h}_1 \circ \hat{h}_2(x)\right](n) = \sum_{p\in\mathcal{N}} h_1(n,p) \sum_{m\in\mathcal{N}} h_2(p,m)x(m) =$$

$$= \sum_{m\in\mathcal{N}} \Big(\sum_{p\in\mathcal{N}} h_1(n,p)h_2(p,m)\Big)x(m) = \sum_{m\in\mathcal{N}} h_1h_2(n,m)x(m),$$

skąd wynika, że $\hat{h}_1 \circ \hat{h}_2 \rightleftharpoons h_1h_2$, a więc odwzorowanie $\hat{h} \rightleftharpoons h$ jest izomorfizmem, czyli $\mathcal{K}_r$ jest algebrą Banacha. Analogicznie wykazuje się, że algebrami Banacha są $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_o$, przy czym $\mathcal{K}_o \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_r$. ■

Algebra $\mathcal{K}_r$ znajduje zastosowanie w teorii $\mathcal{L}^{(1)}_{\infty}$-stabilnych LTVSDS, gdzie $\hat{h}$ jest operatorem układu elementarnego. Oznaczmy przez e element neutralny algebry $\mathcal{K}_r$, tj.:

$$e(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad n = m \\ 0 & \text{gdy} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Jak wiadomo, zagadnienie $\mathcal{L}^{(1)}_{\infty}$-stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym prowadzi do warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby $e - h \in G(\mathcal{K}_r)$, gdzie $h \in \mathcal{K}_r$ jest jądrem operatora układu z otwartą pętlą. W przypadku algebry $\mathcal{K}_r$ jest to zagadnienie o wiele trudniejsze niż dla algebry $\mathcal{L}_1$ (paragraf 3.1). Można tu korzystać z warunków dostatecznych podanych przez twierdzenia 2.1, 2.2, 2.8. Podobne zagadnienia dotyczące stabilności czasowo zmiennych, czasowo ciągłych układów liniowych ze sprzężeniem zwrotnym były badane przez WILLEMSA [59], VIDYASAGARA [62], ZAMESA i KALLMANA [65]. W pracy [52] opisano metodę przybliżonego wyznaczania jądra h za pomocą macierzy o skończonych rozmiarach, dla obwodu elektrycznego ze zmiennymi parametrami.

Algebra $\mathcal{K}$ może znaleźć zastosowanie w teorii liniowych układów zmiennych okresowo. Niech $\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma}$ oznacza sumę prostą przestrzeni $\mathcal{P}_N$ i $\overset{(1)}{\Gamma}$ tj.:

$$\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma} = \left\{ x \mid x = x_1 + x_2,\ \ x_1 \in \mathcal{P}_N,\ \ x_2 \in \overset{(1)}{\Gamma} \right\},$$

(przyjmijmy też, że $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{L}^{(1)}_{\infty}$). Niech h tak jak poprzednio będzie jądrem operatora określonego wyrażeniem (4.1.2). Utwórzmy nowe jądro h' dane wzorem:

$$h'(n,p) = h(n,n-p).$$

TWIERDZENIE 4.1.5

Operator $\hat{h}$, określony wzorem (4.1.2), odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma}$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy:

(I) $h \in \mathcal{K}$,

(II) $h'(n+N,p) = h'(n,p)$ dla dowolnego n i dowolnego ustalonego p.

Ponadto przestrzeń wszystkich h spełniających warunki (I) i (II) tworzy algebrę Banacha.

Dowód. Biorąc pod uwagę twierdzenie 4.1.2 wystarczy wykazać, że operator $\hat{h}$, określony wzorem (4.1.2), odwzorowuje $\mathcal{P}_N$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (I) i (II). Mamy

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}} h(n,m)x(m) = \sum_{m \in \mathcal{N}} h'(n,n-m)x(m).$$

Stąd

$$\left[\hat{h}(x)\right](n+N) - \left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}} h'(n+N,n+N-m)x(m) - \sum_{m \in \mathcal{N}} h'(n,n-m)x(m) =$$

$$= \sum_{m \in \mathcal{N}} h'(n+N,n-(m-N))x(m) - \sum_{m \in \mathcal{N}} h'(n,n-m)x(m) =$$

$$= \sum_{q \in \mathcal{N}} h'(n+N,n-q)x(q+N) - \sum_{m \in \mathcal{N}} h'(n,n-m)x(m) =$$

$$= \sum_{m \in \mathcal{N}} \left[h'(n+N,n-m) - h'(n,n-m)\right]x(m).$$

Równość

$$\sum_{m \in \mathcal{N}} \left[h'(n+N,n-m) - h'(n,n-m)\right]x(m) = 0$$

dla dowolnego n i przy każdym $x \in \mathcal{P}_N$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$h'(n+N,n-m) = h'(n,n-m)$$

dla dowolnych n,m, a więc gdy spełniony jest warunek (II). ■

Twierdzenie 4.1.5 pozostaje słuszne, jeżeli $\overset{(1)}{\Gamma}$ i $\mathcal{K}$ zamieni się odpowiednio na $\overset{(1)}{\Gamma_0}$ i $\mathcal{K}_0$. Ma ono ważne znaczenie praktyczne, mówi bowiem, że ustalona odpowiedź układu na pobudzenie okresowe jest też okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja h spełnia warunki (I) i (II).

Często zachodzi potrzeba wyznaczenia tylko ustalonej odpowiedzi okresowej na pobudzenie okresowe. Można tego dokonać za pomocą operatora $\hat{H}$:

$$\left[\hat{H}(x)\right](n) = \sum_{m=0}^{N-1} H(n,m)x(m), \quad 0 \leqslant n,m \leqslant N-1. \tag{4.1.11}$$

Jak widać, jądro operatora $\hat{H}$ jest macierzą skończonych rozmiarów. Macierz tę określa wzór:

$$H(n,m) = \left[\hat{h}(Ш^{m})\right](n).$$

Mamy więc:

$$H(n,m) = \sum_{p=-\infty}^{n} h(n,p)Ш^{0}(p-m) = \sum_{q=-\infty}^{n-m} h(n,m+q)Ш^{0}(q) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{p=-\infty}^{-1} h(n,m+pN) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} h(n,m-pN), & \text{gdy} \quad 1-N \leqslant n-m \leqslant -1, \\ \sum\limits_{p=-\infty}^{0} h(n,m+pN) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} h(n,m-pN), & \text{gdy} \quad 0 \leqslant n-m \leqslant N-1. \end{cases}$$

W pracach [51] i [52] opisano metodę numeryczną bezpośredniego wyznaczania macierzy H bez pośrednictwa jądra h dla obwodu elektrycznego o parametrach okresowo zmiennych. Pokazano tam, że problem ten sprowadza się do analizy aktywnego drabinkowego obwodu rezystancyjnego o wspólnym początku i końcu. Podany algorytm umożliwia zastosowanie maszyny cyfrowej. W pracy [50] porównano wyniki obliczeń i eksperymentów przeprowadzonych na rzeczywistym układzie elektronicznym.

4.2. Jednorodne operatory czasowo zmienne

Funkcję $h \in \mathcal{K}_r^{(M)}$ nazywamy w pełni symetryczną, jeżeli przy ustalonym $n \in \mathcal{N}$ jej wartość $h(n,\mathbf{n})$ nie zmienia się przy dowolnej permutacji współrzędnych $n_1,\ldots,n_M$ elementu $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^M$. Przestrzeń $\mathcal{K}_r^{(M)}$ złożoną z funkcji h w pełni symetrycznych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{K}_{r\ sym}^{(M)}$. Analogicznie wprowadza się przestrzenie $\mathcal{K}_{sym}^{(M)}$ i $\mathcal{K}_{o\ sym}^{(M)}$.

TWIERDZENIE 4.2.1

Dla każdego $h' \in \mathcal{K}_r^{(M)}$ istnieje $h \in \mathcal{K}_{r\ sym}^{(M)}$ takie, że

$$\sum_{p \in \mathcal{N}^M} h'(n,p)x(p) = \sum_{p \in \mathcal{N}^M} h(n,p)x(p)$$

przy dowolnym $x \in \mathcal{E}_{sym}^{\infty(M)}$ i dowolnym $n \in \mathcal{N}$.

Dowód. Stosując takie same oznaczenia jak w dowodzie twierdzenia 3.4.1 otrzymuje się:

$$\sum_{p\in\mathcal{N}^M} h'(n,p)x(p) = \sum_{q\in(\mathcal{N}^M)} x(q) \sum_{p\in\mathcal{N}^M(q)} h'(n,p). \qquad (4.2.1)$$

Zawsze istnieje taki element $h \in \overset{(M)}{\mathcal{K}}_{r\ sym}$, że dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$ zachodzi

$$l_q h(n,q) = \sum_{p\in\mathcal{N}^M(q)} h'(n,p). \qquad (4.2.2)$$

Z wyrażeń (4.2.1) i (4.2.2) wynika, że

$$\sum_{p\in\mathcal{N}^M} h'(n,p)x(p) = \sum_{q\in(\mathcal{N}^M)} l_q h(n,q)x(q) = \sum_{p\in\mathcal{N}^M} h(n,p)x(p). \blacksquare$$

Analogiczne twierdzenie jest oczywiście słuszne dla przestrzeni $\overset{(M)}{\mathcal{K}}$ i $\overset{(M)}{\mathcal{K}}_o$.

Z twierdzenia 4.2.1 wynika, że operator j e d n o r o d n y czasowo zmienny stopnia m można zdefiniować analogicznie, jak to uczyniono w paragrafie 3.4, a więc jako złożenie operatora $(\cdot)^{ⓜ}$ i operatora określonego wzorem (4.1.2):

$$\left[\hat{h}_m(x)\right](n) \triangleq \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^m} h_m(n,\mathbf{n})\, x^{ⓜ}(\mathbf{n}). \qquad (4.2.3)$$

Operator $(\cdot)^{ⓜ}$ odwzorowuje $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ w $\overset{(m)}{\mathcal{L}^\infty}$, zatem z twierdzeń 4.1.1 i 4.2.1 wynika, że operator jednorodny $\hat{h}_m$ odwzorowuje $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $h_m \in \overset{(m)}{\mathcal{K}}_{r\ sym}$. Łatwo się przekonać, że operator $(\cdot)^{ⓜ}$ odwzorowuje przestrzeń $\overset{(1)}{\Gamma}$ w $\overset{(m)}{\Gamma}$, a więc z twierdzeń 4.1.2 i 4.2.1 wynika, że operator jednorodny $\hat{h}_m$ odwzorowuje $\overset{(1)}{\Gamma}$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $h_m \in \overset{(m)}{\mathcal{K}}_{sym}$. Ponadto, jeżeli $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$, to $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} x^{ⓜ}(\mathbf{n}) = \xi^m$ i z wyrażenia (4.1.7) mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\hat{h}_m(x)\right](n) = \beta\xi^m + \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^m} \alpha_{\mathbf{n}}(x^{ⓜ}(\mathbf{n})-\xi^m).$$

Analogicznie, operator $(\cdot)^{ⓜ}$ odwzorowuje przestrzeń $\overset{(1)}{\Gamma}_o$ w $\overset{(m)}{\Gamma}_o$, czyli z twierdzeń 4.1.3 i 4.2.1 wynika, że operator jednorodny $\hat{h}_m$ odwzorowuje $\overset{(1)}{\Gamma}_o$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $h_m \in \overset{(m)}{\mathcal{K}}_{o\ sym}$.

Normę elementu $\hat{h}_m(x)$ można łatwo oszacować za pomocą nierówności

$$\left\|\hat{h}_m(x)\right\|^{(1)}_{\mathcal{L}^\infty} \leq \left\|h_m\right\|^{(m)}_{\mathcal{K}_r} \left\|x\right\|^{m\,(1)}_{\mathcal{L}^\infty} .$$

Identyfikacja układu nieliniowego czasowo zmiennego przy użyciu operatora jednorodnego stopnia m niczym istotnym się nie różni od identyfikacji układu czasowo niezmienniczego. Polega ona na wyznaczeniu funkcji $h((\cdot),p_1,\ldots,p_m)$ dla wszystkich wartości $p_1,\ldots,p_m$ drogę pomiaru odpowiedzi układu na cięg $\{\Delta_n(i)\}$ pobudzeń, określony w paragrafie 3.4. Funkcję tę określa się ze wzoru (3.4.12) przy niezmienionych oznaczeniach

$$h(n,p) = \frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r \sum_{g\in K^p_{m-r}} \left[\hat{h}(\Delta_g)\right](n). \tag{4.2.4}$$

Rozpatrzmy jeszcze zagadnienia układów z okresowo zmiennymi parametrami. Nietrudno spostrzec, że operator $(\cdot)^{(m)}$ odwzorowuje $\mathcal{P}_N$ w $\mathcal{P}^{(m)}_{N1}$. Niech h będzie jądrem operatora określonego wyrażeniem (4.1.2). Utwórzmy nowe jądro h' dane wzorem:

$$h'(n,p) = h(n,n1-p). \tag{4.2.5}$$

Uogólnieniem twierdzenia 4.1.5 jest następujące

TWIERDZENIE 4.2.2

Operator $\hat{h}$, określony wzorem (4.1.2), odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{P}^{(m)}_{N1} \oplus \Gamma^{(m)}_o$ w $\mathcal{P}_N \oplus \Gamma^{(1)}_o$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(I) $h \in \mathcal{K}^{(m)}_o$;

(II) $h'(n+N,p) = h'(n,p)$ dla dowolnego $n\in\mathcal{N}$ i dowolnego ustalonego $p\in\mathcal{N}^m$.

<u>Dowód</u> przeprowadzamy analogicznie jak dla twierdzenia 4.1.5.

Mamy:

$$\left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{p\in\mathcal{N}^m} h(n,p)x(p) = \sum_{p\in\mathcal{N}^m} h'(n,n1-p)x(p),$$

skęd

$$\left[\hat{h}(x)\right](n+N) - \left[\hat{h}(x)\right](n) = \sum_{p\in\mathcal{N}^m} h'(n+N,(n+N)1-p)x(p) -$$

$$-\sum_{p\in\mathcal{N}^m} h'(n,n1-p)x(p) = \sum_{g\in\mathcal{N}^m} h'(n+N,n1-g)x(g+N1) -$$

$$-\sum_{p\in\mathcal{N}^m} h'(n,n\mathbf{1}-p)x(p) = \sum_{p\in\mathcal{N}^m}\left[h'(n+N,n\mathbf{1}-p) - h'(n,n\mathbf{1}-p)\right]x(p).$$

Zatem musi być spełniony warunek (II). ■

Łatwo można stwierdzić, że operator $(\cdot)^{(m)}$ odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{P}_N^{(1)} \oplus \Gamma_0^{(m)}$ w $\mathcal{P}_{N\mathbf{1}}^{(m)} \oplus \Gamma_0$, a więc gdy h_m spełnia warunki (I) i (II) twierdzenia 4.2.2, to operator jednorodny określony wzorem (4.2.3) odwzorowuje $\mathcal{P}_N^{(1)} \oplus \Gamma_0$ w siebie. Oznacza to, że ustalona odpowiedź układu na pobudzenie okresowe jest też okresowa. Przestrzeń wszystkich h spełniających warunki twierdzenia 4.2.2 oznaczmy przez $\mathcal{K}_P^{(m)}$.

Przystąpimy teraz do określenia operatora jednorodnego odwzorowującego $\mathcal{P}_N$ w siebie. Uogólnieniem operatora $\hat{H}$ określonego wzorem (4.1.11) jest operator $\hat{H}^{(m)}: \mathcal{P}_{N\mathbf{1}} \to \mathcal{P}_N$ zdefiniowany następująco:

$$\left[\hat{H}(x)\right](n) = \sum_{p=0}^{(N-1)\mathbf{1}} H(n,p)x(p),$$

gdzie $0 \leqslant n \leqslant N-1$, $p \in \mathcal{N}^m$.

Jeżeli $h \in \mathcal{K}_P^{(m)}$, to macierz H określa się z następującego wyrażenia:

$$H(n,p) = \left[\hat{h}(\omega^p)\right](n).$$

Stąd, podobnie jak w paragrafie 4.1, otrzymuje się:

$$H(n,p) = \sum_{q\leqslant n\mathbf{1}} h(n,q)\omega^{\circ}(q-p) = \sum_{q\leqslant n\mathbf{1}-p} h(n,p+q)\omega^{\circ}(q) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{s\leqslant -\mathbf{1}} h(n,p+sN) = \sum_{s\geqslant \mathbf{1}} h(n,p-sN), & \text{gdy} \quad (1-N)\mathbf{1} \leqslant n\mathbf{1}-p < 0 \\ \displaystyle\sum_{s\leqslant 0} h(n,p+sN) = \sum_{s\geqslant 0} h(n,p-sN), & \text{gdy} \quad 0 \leqslant n\mathbf{1}-p \leqslant (N-1)\mathbf{1}. \end{cases}$$

Operator jednorodny stopnia m odwzorowujący $\mathcal{P}_N$ w siebie określa wzór:

$$\left[\hat{H}(x)\right](n) = \sum_{p=0}^{(N-1)\mathbf{1}} H(n,p)x^{(m)}(p).$$

4.3. Analityczne operatory czasowo zmienne

Operatorem wielomianowym, czasowo zmiennym stopnia m nazywa się operator S_m określony następująco:

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{h}_k(x), \tag{4.3.1}$$

gdzie $\hat{h}_k$ jest operatorem jednorodnym stopnia k, określonym wzorem (4.2.3). Operator wielomianowy jest odwzorowaniem $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma} \to \overset{(1)}{\Gamma}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma_o} \to \overset{(1)}{\Gamma_o}$ lub $P_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_o} \to P_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_o}$ wtedy i tylko wtedy, gdy h_k dla $k=1,\dots,m$ należą odpowiednio do $\overset{(k)}{\mathcal{K}}_{r\ sym}$, $\overset{(k)}{\mathcal{K}}_{sym}$, $\overset{(k)}{\mathcal{K}}_{o\ sym}$, $\overset{(k)}{\mathcal{K}}_{P}$.

Normę elementu $S_m(x)$ można oszacować za pomocą nierówności:

$$\|S_m(x)\|_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|h_k\|_{\overset{(k)}{\mathcal{K}_r}} \|x\|^k_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}} . \tag{4.3.2}$$

Podobnie jak w paragrafie 3.5 wprowadzamy pojęcie operatora analitycznego $S: \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$. Jeżeli dla każdego $x \in Z$, gdzie Z jest zbiorem[6] w $\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$, istnieje granica $S(x)$ ciągu $\{S_m(x)\}$ w sensie normy, to operator $S: \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty} \to \overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}$ nazwiemy operatorem analitycznym. Z wyrażenia (4.3.2) wynika, że jeżeli zwykły potęgowy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_{\overset{(k)}{\mathcal{K}_r}} \|x\|^k_{\overset{(1)}{\mathcal{L}^\infty}}$$

jest zbieżny, to szereg funkcjonalny

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}_k(x)$$

także jest zbieżny. Analogicznie określa się operatory analityczne

$$S: \overset{(1)}{\Gamma} \to \overset{(1)}{\Gamma}, \quad S: \overset{(1)}{\Gamma_o} \to \overset{(1)}{\Gamma_o}, \quad S: P_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_o} \to P_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_o}.$$

---

[6] Z jest więc obszarem zbieżności ciągu $\{S_m\}$.

Rozwiążemy teraz podobny problem jak w paragrafie 3.5: kiedy operator układu zadany w postaci uwikłanej można rozwikłać przy użyciu operatora analitycznego?

TWIERDZENIE 4.3.1

Niech w równaniu

$$y = x + \hat{g}\left[\Phi(y)\right] \tag{4.3.3}$$

$x \in \overset{(1)}{\ell^\infty}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma_0}$ lub $\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0}$; $\hat{g} \in \hat{\mathcal{K}}_r$ lub $\hat{\mathcal{K}}$, lub $\hat{\mathcal{K}}_0$ lub $\hat{\mathcal{K}}_p$; Φ jest funkcją taką, że

$$\left[\Phi(y)\right](n) = \varphi\left[y(n)\right], \tag{4.3.4}$$

gdzie $\varphi : R \to R$ jest funkcją analityczną. Jeżeli operator $\hat{g} \circ \Phi$ spełnia warunek zwężania, to istnieje operator analityczny $\hat{R}: \overset{(1)}{\ell^\infty} \to \overset{(1)}{\ell^\infty}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma} \to \overset{(1)}{\Gamma}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma_0} \to \overset{(1)}{\Gamma_0}$ lub $\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0} \to \mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0}$.

Dowód. Wykażemy najpierw niezbędny

L e m a t

Jeżeli funkcja $\varphi : R \to R$ w wyrażeniu (4.3.4) jest wielomianem, a $\hat{S}$ jest operatorem wielomianowym $\overset{(1)}{\ell^\infty} \to \overset{(1)}{\ell^\infty}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma} \to \overset{(1)}{\Gamma}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma_0} \to \overset{(1)}{\Gamma_0}$ lub $\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0} \to \mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0}$, to $\hat{g} \circ \Phi \circ \hat{S}$ też jest operatorem wielomianowym odpowiednio $\overset{(1)}{\ell^\infty} \to \overset{(1)}{\ell^\infty}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma} \to \overset{(1)}{\Gamma}$ lub $\overset{(1)}{\Gamma_0} \to \overset{(1)}{\Gamma_0}$ lub $\mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0} \to \mathcal{P}_N \oplus \overset{(1)}{\Gamma_0}$.

D o w ó d l e m a t u. Bez utraty ogólności można przyjąć, że φ jest jednomianem stopnia $r: \varphi(t) = t^r$. Wówczas

$$\left[\Phi(\hat{S}(x))\right](n) = \sum_{k=1}^{m} h_k(n,p)x^{(k)}(p). \tag{4.3.5}$$

Wyrażenie (4.3.5) jest skończoną sumą składników typu:

$$\sum_{p_1 \in \mathcal{N}^{k_1}} h_{k_1}(n,p_1)x^{(k_1)}(p_1) \ldots \sum_{p_r \in \mathcal{N}^{k_r}} h_{k_r}(n,p_r)x^{(k_r)}(p_r) =$$

$$= \sum_{p_1,\ldots,p_r} h_{k_1}(n,p_1) \ldots h_{k_r}(n,p_r)\, x^{(k_1)}(p_1) \ldots x^{(k_r)}(p_r) =$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{N}^{k_1+\ldots+k_r}} h_{k_1,\ldots,k_r}(n,p)\, x^{(k_1+\ldots+k_r)}(p). \qquad (4.3.6)$$

Z wyrażenia (4.3.6) wynikają następujące implikacje

$$h_{k_j} \in \mathcal{X}_{r\ \mathrm{sym}}^{(k_j)}, \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,r \Rightarrow h_{k_1,\ldots,k_r} \in \mathcal{X}_{r\ \mathrm{sym}}^{(k_1+\ldots+k_r)}$$

$$h_{k_j} \in \mathcal{X}_{\mathrm{sym}}^{(k_j)}, \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,r \Rightarrow h_{k_1,\ldots,k_r} \in \mathcal{X}_{\mathrm{sym}}^{(k_1+\ldots+k_r)}$$

$$h_{k_j} \in \mathcal{X}_{o\ \mathrm{sym}}^{(k_j)}, \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,r \Rightarrow h_{k_1,\ldots,k_r} \in \mathcal{X}_{o\ \mathrm{sym}}^{(k_1+\ldots+k_r)}$$

Oprócz tego, mamy

$$h'_{k_1,\ldots,k_r}(n,p) = h_{k_1,\ldots,k_r}(n,n\mathbf{1}-p) = \sum_{p_1,\ldots,p_r} h_{k_1}(n,n\mathbf{1}-p_1)\ldots h_{k_r}(n,n\mathbf{1}-p_r) =$$

$$= \sum_{p_1,\ldots,p_r} h'_{k_1}(n,p_1)\ldots h'_{k_r}(n,p_r),$$

skąd wynika, że $h'_{k_1,\ldots,k_r}(n+N,p) = h'_{k_1,\ldots,k_r}(n,p)$, jeżeli tylko $h_{k_j}(n+N,p) = h_{k_j}(n,p)$ dla $j=1,\ldots,r$. Zatem ma miejsce następująca implikacja:

$$h_{k_j} \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}}^{(k_j)}, \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,r \Rightarrow h_{k_1,\ldots,k_r} \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}}^{(k_1+\ldots+k_r)}.$$

Z twierdzeń 4.1.4 i 4.1.5 wynika, że operator $\hat{g} \circ \Phi \circ \hat{S}$ jest operatorem wielomianowym. □

Dalszą część dowodu przeprowadza się identycznie jak dla twierdzenia 3.5.1. ■

Identyfikację układu czasowo zmiennego przy użyciu operatora wielomianowego przeprowadza się metodą opisaną w paragrafie 3.5, polegającą na kolejnym obniżaniu stopnia wielomianu funkcjonalnego.

LITERATURA

[1] AHMADI M., KING R.A.: A stability criterion for N-dimensional zero-phase recursivedigital filters. Proc. IEEE v. 65, pp. 893-898, June 1977.

[2] ANDERSON B.D., NEWCOMB R.W.: Linear pasiv networks: functional theory Proc. IEEE, pp. 72-88, Jan. 1976.

[3] ANDERSON B.D., JURY E.I.: Stability test for two-dimensional recursive filters, IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, pp. 366-372, Aug. 1973.

[4] BARKER H.A., AMBATI S.: Nonlinear sampled-data system analysis by multidimensional Z transforms. Proc. IEE, pp.1407-1413, Sept.1972.

[5] BAUMGARTNER S L., RUGH W.J.: Complete identification of a class of nonlinear systems from steady-state frequency response. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 753-758, Sept. 1975.

[6] BELAL A.A., SHENOI B.A.: Scaling of linear time-varying networks passivity, and losslessness. IEEE Trans. Circuits and Systems, May 1977.

[7] BIESIEKIERSKIJ W.A.: Cifrowyje awtomaticzeskije sistiemy. Moskwa. 1976.

[8] BITTNER R.: Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych. Warszawa 1974.

[9] BOSE N.K.: Problems and progress in multidimensional systems theory. Proc. IEEE, pp. 824-840, June 1977.

[10] CHRISTENSEN G.S.: On the convergence of Volterra series. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 736-737, Dec. 1968.

[11] COOKE R.G., Infinite matrices and sequence spaces. Macmillan and Company, Ltd. London, England, 1950.

[12] CRUZ J.B.Jr.: A generalization of the impulse train approximation for time-varying linear system synthesis in the time domain. IRE Trans. Circuit Theory, pp. 393-394, Dec. 1959.

[13] CRUZ J.B.Jr.: On the realizability of linear differential systems. IRE Trans. Circuit Theory pp. 347-348, Sept. 1960.

[14] CYPKIN J.Z., POPKOW J.S.: Tieoria nieliniejnych impulsnych sistiem. Moskwa 1973.

[15] DECARLO R., SAEKS R., MURRAY J.: A Nyquist-like test for the stability of two-dimensional digital filters. Proc. IEEE pp. 978-979, June 1977.

[16] DE SANTIS R.: Causality theory in systems analysis. Proc. IEEE, pp. 36-44, January 1976.

[17] DESOER C.A.: Nonlinear distortion in feedback amplifiers. IRE Trans. Circuit Theory pp. 1-6, March 1962.

[18] DESOER C.A., CHAN W.S.: The feedback interconnection of multivariable systems: simplifying theorems for stability. Proc. IEEE, pp. 139--144, January 1976.

[19] DOUGLAS R.G.: Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press New York, London 1972.

[20] FRIEDLAND B.: A technique for the analysis of time-varying sampled--data systems. Trans. AIEE vol. 75, part II, pp. 407-413, January 1957.

[21] FUKS B.A.: Wwiedienije w tieoriju analiticzeskich funkcij mnogich pieriemiennych. Moskwa 1962.

[22] GACHOW F.D., CZERSKIJ J.I.: Urawnienija tipa swiertki. Nauka, Moskwa 1978.

[23] GELFAND I.M., RAJKOW D.I., SZYŁOW G.E.: Kommutatiwnyje normirowannyje kolca, Moskwa 1960.

[24] GONIEWICZ A., SIWCZYŃSKI M.: Kryterium optymalnego wyboru czwórnika sprzężenia zwrotnego w generatorze sinusoidalnym. Materiały VII Sympozjum Metody Matematyczne w Elektrotechnice, Otmuchów 1978.

[25] HARPER T.R., RUGH W.J.: Structural features of factorable Volterra systems. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 822-832, Dec. 1976.

[26] HOFFMAN K.: Banach spaces of analytic functions. Prentice-Hall, Inc. 1962.

[27] HUANG T.S.: Stability of two-dimensional recursive filters.IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, pp. 158-163, June 1972.

[28] KANTOROWICZ L.W., AKIŁOW G.P.: Funkcjonalnyj analiz. Moskwa 1977.

[29] KLIR G.J.: Trends in general system theory, Wiley, New York, 1972.

[30] KOŹNIEWSKA I.: Równania rekurencyjne. Warszawa 1972.

[31] KREJN S.G.: Liniejnyje urawnienija w banachowom prostranstwie.Moskwa 1971.

[32] LAVI A., NARAYANAN S.: Analysis of a class of nonlinear discrete systems using multidimensional modified Z transforms. IEEE Trans. on Automatic Control, pp. 90-93, Feb. 1968.

[33] MARCHESINI G., PICCI G.: On the functional identification of nonlinear systems from input-output data records. IEEE Trans. Automatic Control pp. 757-759, Dec. 1969.

[34] MC MAHON E.L.: Impuls response synthesis for a class of time-varying networks. IEEE Trans. Circuit Theory, pp. 460-461, Sept. 1963.

[35] MESAROWIC M.D., TAKAHARA Y.: General systems theory: mathematical foundations. Academic Press 1975.

[36] NAYLOR A.W.: Generalized frequency respons concepts for time-varying discrete-time linear systems. IEEE Trans. on Circuit Theory, pp.428--440, Sept. 1963.

[37] PORTER W.A.: An overview of polynomic systems theory. Proc. IEEE, pp. 18-23, Jan. 1976.

[38] PUCHOW G.E.: Prieobrazowanija Taylora i ich primienienije w elektrotechnikie i elektronikie. Kijów, Naukowa Dumka 1978.

[39] PUPKOW K.A., KAPALIN W.I., JUSZCZENKO A.S.: Funkcjonalnyje riady w teorii nieliniejnych sistiem. Nauka, Moskwa 1976.

[40] RICKART C.E.: General theory of Banach algebras. New York, Van Nostrand 1960.

[41] RONKIN L.I.: Elementy teorii analiticzeskich funkcjij mnogich pieremiennych. Kijew, Naukowa Dumka 1977.

[42] RUDIN W.: Functional analysis. Mc Graw-Hill B.C. 1973.

[43] SAMARSKIJ A.A., NIKOŁAJEW E.S.: Metody rieszienija sietocznych urawnenij. Nauka, Moskwa 1978.

[44] SANDBERG I.W.: Realization of a class of periodically variable systems. IRE Trans. Circuit Theory, pp. 416-417, dec. 1962.

[45] SHANMUGAM K., LAL M.: Analysis and synthesis of a class of nonlinear systems. IEEE Trans. Circuits Systs, pp. 17-25, Jan. 1976.

[46] SIWCZYNSKI M.: O stabilności pewnych układów dynamicznych opisywanych nieliniowymi równaniami Volterry. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, z. 35, ss. 91-97, 1972.

[47] SIWCZYŃSKI M.: O istnieniu drgań prawie okresowych w układach synchronizacji. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej z. 35, ss. 105-109. Gliwice 1972.

[48] SIWCZYŃSKI M.: Synchronizacja złożonych słabo sprzęgniętych układów samowzbudnych. Archiwum Elektrotechniki t. XXIII, z. 4, ss. 937-950, 1974.

[49] SIWCZYŃSKI M.: Możliwości zastosowania pewnych grup do analizy układów niestacjonarnych. Materiały Seminarium Polsko-Czechosłowackiego. VSSE Plzeń Czechosłowacja, ss. 48-51, 1978.

[50] SIWCZYŃSKI M., TOPOR-KAMIŃSKI L.: Analiza obwodów o okresowo zmiennych parametrach metodą wariacyjną. Prace Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Polit. Wrocławskiej Nr 40, ss. 125-132, 1978.

[51] SIWCZYŃSKI M., TOPOR-KAMIŃSKI L.: Analiza i modelowanie aktywnych obwodów z okresowo zmiennymi parametrami. Materiały VIII Sympozjum Metody Matematyczne w Elektrotechnice Opole - Pokrzywna 1979.

[52] SIWCZYŃSKI M., TOPOR-KAMIŃSKI L.: Analiza i realizacja aktywnych obwodów z okresowo zmiennymi parametrami (ukaże się w Rozprawach Elektrotechnicznych).

[53] SIWCZYŃSKI M., SONELSKI W.: Drgania w parametronie o równoległych strumieniach magnetycznych. Arch. Elektrotechniki t. XXVIII z. 1, ss. 157-167, 1979.

[54] SIWCZYŃSKA Z., SIWCZYNSKI M.: Drgania w linii długiej obciążonej elementem nieliniowym. Prace Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej Nr 40, ss. 133-135, 1978.

[55] SMETS H.B.: Analysis and synthesis of nonlinear systems. IRE Trans. Circuit Theory, pp. 459-469, Dec. 1960.

[56] STRÖM T., SIGNELL S.: Analysis of periodically switched linear circuits. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 531-541, Oct. 1977.

[57] TROTT G.W., CHRISTENSEN G.S.: On the uniqueness of the Volterra series. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 759-760, Dec. 1969.

[58] TROTT G.W., CHRISTENSEN G.S.: A larger region of convergence for the Volterra series. Int. J. Control, pp. 377-384, v. 14, Nr 2, 1971.

[59] WILLEMS J.C.: Some results on the L_p stability of linear time-varying systems. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 660-665, Dec. 1969.

[60] WILLEMS J.C.: Mechanisms for the stability and instability feedback systems. Proc. IEEE, pp. 24-35, Jan. 1976.

[61] WYSOCKI E.M., RUGH W.J.: Further results on the identification problem for the class of nonlinear systems S_M. IEEE Trans. Circuits Systems, pp. 664-670, Nov. 1976.

[62] VIDYASAGAR M.: Some applications of the spectral - radius concept to nonlinear feedback stability. IEEE Trans. Circuit Theory, pp. 607--615, Nov. 1972.

[63] VOLTERRA V.: Theory of functionals and integral and integro-differential equations. Dover Publications, New York, 1959.

[64] ZAMES G.: Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. IEEE Trans. on Circuit Theory, pp. 392-404, Sept. 1963.

[65] ZAMES G., KALLMAN R.R.: On spectral mappings, higher order circle criteria and periodically varying systems. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 649-652, Dec. 1970.

[66] ZEMANIAN A.H.: Infinite electrical networks. Proc. IEEE, pp. 6-17, Jan. 1976.

[67] ŻELAZKO W.: Algebry Banacha. Warszawa 1968.

TECHNIKI ALGEBR BANACHA SYGNAŁÓW CZASOWO WIELOWYMIAROWYCH
W TEORII NIELINIOWYCH UKŁADÓW ANALITYCZNYCH

Streszczenie

Praca niniejsza jest poświęcona głównie zastosowaniom algebr Banacha wielowymiarowych sygnałów czasowo dyskretnych w teorii nieliniowych układów analitycznych.

We wstępie podano podstawowe określenia i sformułowano problem pracy.

W rozdziale drugim przedstawiono wraz z dowodami podstawowe twierdzenia dotyczące głównie odwracalności elementów algebr Banacha oraz funkcji jednej i wielu zmiennych w algebrach Banacha. Sformułowano tam też twierdzenia o izomorfizmach algebr Banacha i algebr funkcji analitycznych wielu zmiennych.

W rozdziale trzecim wprowadzono algebrę splotową $\mathcal{L}_Q$ sygnałów czasowo wielowymiarowych przyczynowych oraz algebrę splotową sygnałów wielookresowych. Podano kilka twierdzeń dotyczących odwracalności elementów w tych algebrach. Stosując wzory całkowe dla funkcji wielu zmiennych w algebrach Banacha wyprowadzono odpowiednie wyrażenia dla funkcji wielu zmiennych w algebrach $\mathcal{L}_Q$ i $P_{\mathcal{N}}$. Algebry $\mathcal{L}_Q$ i $P_{\mathcal{N}}$ znajdują zastosowanie w teorii liniowych czasowo dyskretnych, czasowo wielowymiarowych układów czasowo niezmienniczych, do ich analizy, syntezy i badania stabilności. Algebry te zastosowano następnie do zdefiniowania operatorów jednorodnych wielomianowych i analitycznych opisujących układy nieliniowe. Podano kilka twierdzeń dotyczących stabilności takich układów. Przedstawiono algorytmy analizy, syntezy i identyfikacji analitycznych układów nieliniowych czasowo dyskretnych, czasowo niezmienniczych.

Rozdział czwarty poświęcono teorii operatorów układów czasowo zmiennych. Wprowadzono pojęcia operatorów jednorodnych, wielomianowych i analitycznych dla układów nieliniowych czasowo zmiennych, czasowo dyskretnych. Sformułowano odpowiednie twierdzenia o stabilności i stabilności asymptotycznej takich układów. Podano twierdzenie o stabilności asymptotycznej nieliniowych układów czasowo dyskretnych z okresowo zmiennymi parametrami.

ТЕХНИКИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Резюме

В работе применены банаховы алгебры многомерных дискретных сигналов к теории нелинейных аналитических систем.

Введение в работу дает основные определения и постановку задачи.

Во второй главе сформулированы основные теоремы об обратимости элементов банаховых алгебр и функциях одной и многих переменных в банаховых алгебрах. Дана тоже формулировка теоремы об изоморфных отображениях банаховых алгебр и алгебр аналитических функций многих переменных.

В третьей главе введены сверточная алгебра $\mathcal{L}_\rho$ многомерных каузальных сигналов и сверточная алгебра P_N многомерных периодических сигналов. Сформулировано несколько теорем об обратимости элементов этих алгебр. Применяя интегральные формулы для функций многих переменных в банаховых алгебрах, получены формулы вычисления функций многих переменных в алгебрах $\mathcal{L}_\rho$ и P_N. Алгебры $\mathcal{L}_\rho$ и P_N можно применить в теории многомерных дискретных инвариантных во времени линейных систем к их анализу, синтезу и теории устойчивости. С помощью этих алгебр определены здесь нелинейные однородные, полиноминальные и аналитические операторы. Сформулировано несколько теорем об устойчивости таких систем. Представлены алгоритмы анализа, синтеза и идентификации аналитических дискретных инвариантных во времени систем.

Четвертая глава содержит теорию параметрических нелинейных аналитических операторов. Здесь даны определения однородных, полиноминальных и аналитических нелинейных неинвариантных во времени дискретных систем. Сформулированы теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости этих систем. В этой главе сформулирована теорема об асимптотической устойчивости нелинейных дискретных систем с периодически изменяющимися параметрами.

THE BANACH ALGEBRA TECHNIQUES OF MULTIDIMENSIONAL SIGNALS IN THE NONLINEAR ANALYTICAL SYSTEMS THEORY

S u m m a r y

This work refers to Banach algebras of multidimensional sampled data signals application in the nonlinear analytical systems theory.

In the preface basic definitions were given and the problem of the work was formulated.

In the second section the general theorems of Banach algebras elements invertibility with proofs and the general theorems of single - and multivariable functions in the Banach algebras were given. There were also formulated the theorems of the Banach algebras and multivariable analytical functions algebras isomorphisms.

In the third section the convolution algebras $\mathcal{L}_\varrho$ of causal multidimensional signals and the convolution algebra $P_{\mathcal{N}}$ of multiperiodical signals were introduced. Some theorems of $\mathcal{L}_\varrho$ and $P_{\mathcal{N}}$ elements invertibility were given. With integral formulas for multivariable functions in the Banach algebras, the appriopriate formulas for multivariable functions in $\mathcal{L}_\varrho$ and $P_{\mathcal{N}}$ algebras were extended. The $\mathcal{L}_\varrho$ and $P_{\mathcal{N}}$ algebras apply to the theory of linear, time invariant, sampled data systems and their analysis, synthesis and stability verification. Then these algebras were applied to the definition of the homogenous, polynomial and analytical nonlinear operators. Some theorems of these operators stability were given. The algorithms of the analysis, the synthesis and the identification of nonlinear analytical time invariant, sampled data systems were shown.

In the fourth section the time varying operators were described. The concept of the homogenous, polynomial and analytical time varying, sampled data operators were introduced. The theorems of bounded input - bounded output and asymptotical stability of these operators were formulated The asymptotical stability theorems of the nonlinear sampled data of the time varying parameters were given.

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.