

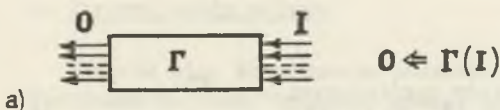
Rudolf Koppel

ZASTOSOWANIE ALGEBRY CZWÓRNIKÓW  
W ZAGADNIENIACH MECHANIKI BUDOWLI

**Streszczenie.** W pracy podano nowy sposób interpretacji klasycznych metod mechaniki budowli. Operacje wykonywane za pomocą grafów czwórników pozwalają na każdym etapie analizy na całościowe ujęcie zagadnienia. Omówiony sposób posiada szczególnie walory dydaktyczne.

1. Pojęcia wstępne

Rozpatrzmy względnie odosobniony układ statyczno-konstrukcyjny symbolizowany za pomocą prostokąta (rys. 1a). Względne odosobnienie tego układu (wyodrębnienie z otoczenia) charakteryzują jego wejścia  $I$  i wyjścia  $O$ .

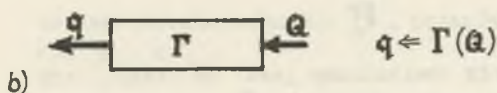


Rys. 1a

W rozpatrywanej tu klasie zagadnień wejścia układu stanowi zbiór wielkości mechanicznych i niemechanicznych powstałych na skutek działania otoczenia na układ. Mogą zatem to być uogólnione siły i przemieszczenia zwane obciążeniem  $Q$ .

Wyjście układu przedstawia działanie tego układu na otoczenie. Temu działaniu przeciwstawia się otoczenie poprzez wywołanie reakcji (będącej co do wielkości ujemną wartością wyjścia), zwanej oddziaływaniem  $q$ <sup>1)</sup>.

Dalej rozpatruje się takie układy, które są w równowadze trwałej pod wpływem obciążeń  $Q$  i oddziaływań  $q$  (rys. 1b).



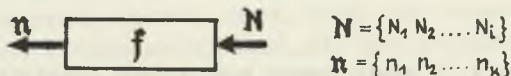
Rys. 1b

Każdy układ posiada zdolność transmitancji  $\Gamma$  (przekształceń) obciążeń w oddziaływania. O rodzaju transmitancji układu stanowią jego współukłady (elementy składowe). Zbiór relacji sprzężeń i przekształceń współukładów określają typ transmitancji układu.

<sup>1)</sup> Dużymi literami oznaczać będziemy obciążenia a odpowiadające im oddziaływania literami małymi.

Podstawą analizy transmitancji układu jest jego podział myślowy na współukłady. Sposoby myślowego wyodrębnienia współukładów i analizy ich transmitancji elementarnych oraz sprzężeń występujących między nimi stanowią podstawę "metód obliczeniowych mechaniki".

Wyodrębnione współukłady możemy przedstawić, podobnie jak układy, za pomocą "skrzynki" z obciążeniem  $\mathbf{N}$ , oddziaływaniem  $\mathbf{n}$  oraz transformacją  $\mathbf{f}$  (rys. 2).



Rys. 2

Zagadnienie analizy układu sprowadza się zatem do:

- I Wyodrębnienia współukładów o znanych transmitancjach
- II Wyznaczenia obciążeń współukładów
- III Określenia transmitancji głównej układu  $\Gamma$  i obliczenia oddziaływan  $\mathbf{q}$ .

## 2. Obciążenia i oddziaływania

Obciążeniem  $\mathbf{O}$  układu nazwijmy zbiór uogólnionych sił  $\mathbf{P}$  oraz zbiór uogólnionych przemieszczeń wymuszonych  $\mathbf{R}$ . Siły  $\mathbf{P}$  i przemieszczenia  $\mathbf{R}$  przyłożone do układu stanowią o tzw. rodzaju obciążenia.

Odpowiednikiem obciążenia układu  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{P}, \mathbf{R}\}$  jest zbiór obciążeń współukładów  $\mathbf{N}$ . Obciążenia współukładu mogą zatem tworzyć zarówno siły jak i przemieszczenia.

Oddziaływania współukładów  $\mathbf{n}$  stanowią zbiór sił i przemieszczeń, analogicznie do oddziaływania  $\mathbf{q}$  układu złożonego ze zbioru sił  $\mathbf{p}$  i przemieszczeń  $\mathbf{r}$ , tj.  $\mathbf{q} = \{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ .

## 3. Transmitancja współukładu

Podział myślowy układu na współukłady uzależniony jest od tego, czy możemy w łatwy sposób określić transmitancje składowe  $\mathbf{f}_i$  wyodrębnionych współukładów.

Transmitancja  $\mathbf{f}$  wiąże obciążenia z oddziaływaniami, co można wyrazić za pomocą zapisu macierzowego następująco

$$\mathbf{k}_n^i = \mathbf{k}_f^i \times \mathbf{i}^i \mathbf{N}^i \quad (3.1)$$

Z punktu widzenia mechaniki transmitancja wyraża zależności między siłami i przemieszczeniami elementów. Mogą to być np. zależności teorii pręta liniowo-sprężystego albo inne (teorii drugiego rzędu).

Jeżeli obciążenie  $\mathbf{N}$  reprezentuje wyłącznie zbiór sił (przemieszczeń) a oddziaływanie  $\mathbf{n}$  zbiór przemieszczeń (sił), to transmitancja  $\mathbf{f}$  określa podatność (sztywność) współukładów.

Wpływy niemechaniczne można uwzględnić superponując oddziaływania. Mamy zatem

$$\mathbf{n}^k = \mathbf{f}^i \times \mathbf{N}^i + \mathbf{n}_n^k \quad (3.2)$$

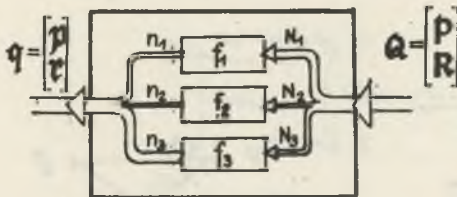
gdzie  $\mathbf{n}_n$  reprezentuje oddziaływania niemechaniczne współukładów.

Dla określenia transmitancji  $\mathbf{f}$  współukładów można posłużyć się takimi metodami mechaniki jak:

- 1) Teoria Castigliano
- 2) Równania różniczkowe odkształcenia
- 3) Teoria obciążenia jednostkowego
- 4) Rozwiązanie równań nierozdzielności lub równowagi.

#### 4. Transmitancja układu

Zakłada się, że dokonano podziału układu na współukłady odpowiednio sprzężone ze sobą. Dokonany sposób podziału implikuje rozplływ wewnętrzny obciążenia  $\mathbf{Q}$  układu na strumienie obciążenia  $\mathbf{N}$  współukładów (rys. 3).



Rys. 3

Dla określenia rozdziału strumienia  $\mathbf{Q}$  służyć mogą podstawowe prawa grafów przepływu wyrażone w postaci warunków wierzchołkowych i konturowych albo inne metody mechaniki budowli.

Przyjmijmy, że wyznaczono już macierz przekształcenia  $\mathbf{B}$ , pozwalającą określić obciążenia współukładów  $\mathbf{N}$ , tj.

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{Q} \quad (4.1)$$

Wydzielając w macierzy  $\mathbf{B}$  bloki  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  odpowiednio do bloków  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{R}$  macierzy obciążenia  $\mathbf{Q}$ , otrzymamy

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}, \mathbf{D}] \times \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

### 5. Oddziaływanie układu

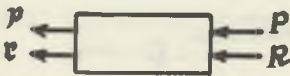
Oddziaływanie  $q$  układu stanowi wypadkową oddziaływań  $n$  współzależnych. Można wykazać [1], że na podstawie twierdzenia Clebscha mamy zależność

$$q = B^* \cdot n \quad (5.1)$$

gdzie  $B^*$  jest macierzą transponowaną macierzy  $B$ .

### 6. Synteza układu metodą czwórników

Rozpatrzmy układ (rys. 4) o obciążeniach  $P, R$  i oddziaływaniach  $p, x$  zwany czwórnikiem.

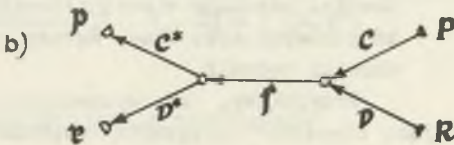
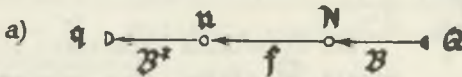


Rys. 4

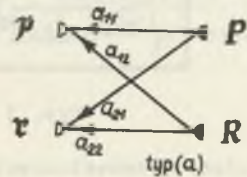
Analiza czwórnika prowadzi do 6 możliwych układów równań wyrażających zależności między zbiorami zmiennych niezależnych i zależnych [3].

W dalszym ciągu uwydatnimy w sposób graficzny zmienne niezależne (wejściowe) za pomocą czarnego półkola (źródło), zaś zmienne zależne jako białe półkola (studnie).

Na rys. 5a,b podano graf przepływu czwórnika, dla którego źródła stanowią zmienne  $P$  i  $R$  a studnie poszukiwane zmienne zależne  $p, x$ .



Rys. 5a,b



Rys. 6

Z grafu przepływu (rys. 5a,b) otrzymamy współczynniki równań czwórnika "typu (a)" (rys. 6), odpowiadający układowi równań

$$q = \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix} = (B^* f B) \cdot a = g a$$

gdzie

$$a_{11} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{C}$$

$$a_{12} = \mathbf{C}^* \mathbf{f} \mathbf{D}$$

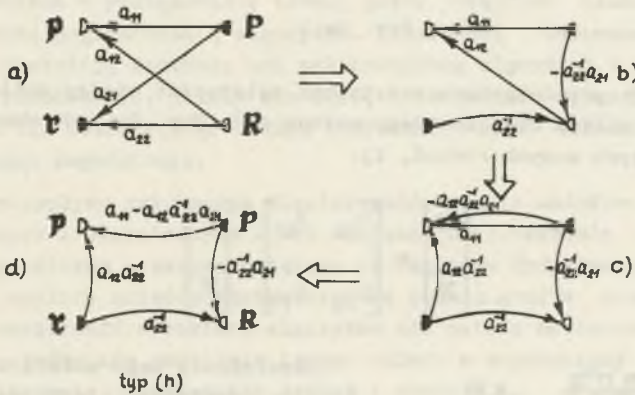
$$a_{21} = \mathbf{D}^* \mathbf{f} \mathbf{C}$$

$$a_{22} = \mathbf{D}^* \mathbf{f} \mathbf{D}$$

macierz  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  znana jest jako macierz podatności ustroju.

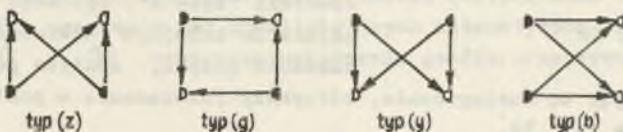
Stosując w dalszym ciągu reguły przekształceń grafów, otrzymamy inne grafy czwórników.

I tak np. jeśli jako zmienne niezależne przyjmiemy  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{x}$ , to poszukiwane zmienne zależne  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{R}$  możemy wyznaczyć, dokonując kolejnych przekształceń czwórnika "typu a" w czwórnik "typu h" jak na rys. 7.



Rys. 7a, b, c, d

Podobnie znaleźć można pozostałe 4 typy czwórników, których grafy przebiegu przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8



Z czwórnika przedstawionego na rys. 9c odczytujemy, że macierz podatności  $\mathbf{g}$  przekształcająca obciążenie  $\mathbf{P}$  w oddziaływanie  $\mathbf{x}$  jest równa:

$$\mathbf{g} = D_{00} - D_{01} D_{11}^{-1} D_{10}$$

- Wielkości hiperstatyczne  $\mathbf{X}$  są dla  $\mathbf{x} = 0$  jedynie funkcjami obciążeń  $\mathbf{p}$ .

### 8. Zalety metody czwórników

Przedstawione powyżej rozwiązania pozwalają na podkreślenie następujących zalet metody czwórników.

Algebra czwórników jest przede wszystkim wygodną metodą analizy ustrojów statycznych i posiada niezaprzeczalne walory dydaktyczne. Metody algebraiczne związane z liniowym wypisywaniem relacji, równań itd. wymagają licznych odwołań do uprzednio zapisanych zależności co po kilkakrotnym powtórzeniu czyni wywód skomplikowanym i utrudnia przyswojenie treści. Metoda czwórników w powiązaniu z teorią grafu przepływu cechuje się natomiast większą poglądowością algorytmu. Zależności zobrazowane grafami przepływu ułatwiają kontrolę nad całokształtem algorytmu i sprzyjają poprawności rozumowania. Należy zauważyć, że wszelkie operacje wykonywane na grafach nie tracą na żadnym pośrednim etapie całościowego ujęcia analizowanego zagadnienia.

Grafy przepływu zwiększają elastyczność badania układów. Wybór wielkości zależnych i niezależnych i ich wzajemne oddziaływanie zyskują interpretację graficzną - zawsze pożądaną ze względów dydaktycznych.

Metoda analizy układów statycznych za pomocą grafów przepływu pozwala lepiej uzewnętrznzić strukturę algorytmu niż metody macierzowe.

Metoda czwórników umożliwia łączyć układy w superukłady i ułatwia ich analizę (łączenie odpowiednich źródeł i studni).

Z matematycznego punktu widzenia metoda czwórników lepiej ilustruje sposób częściowego rozwiązania układu równań liniowych niż teoria macierzy.

Na niekorzyść przedstawionego sposobu analizy przemawia konieczność stosowania dużej liczby operacji przekształcania grafów przepływu. Okoliczność ta straci jednak na znaczeniu z chwilą zastosowania dla tych celów odpowiednich programów emc umożliwiających automatyczne generowanie macierzy  $\mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}_1$  oraz przekształcanie grafów przepływu.

## LITERATURA

- [1] Asplund S.O.: Zastosowanie algebry macierzy w statyce konstrukcji, PAN 1964.
- [2] Pestel E., Leckie F.: Matrix Method in Elastomechanics, New York 1963.
- [3] Robichaud L., Boisvart M., Robert J.: Grafy przepływu sygnałów, Warszawa 1968.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАГРАФОВ  
В ВОПРОСАХ МЕХАНИКИ СТРОИТЕЛЬСТВА

## Р е з ю м е

В статье представлен новый способ интерпретации классических методов механики строительства. Операции, выполняемые при помощи метода графов дают возможность на каждом этапе анализа всесторонне рассмотреть вопрос. Представленный метод имеет особо важное дидактическое значение.

AN APPLICATION OF FLOW GRAPHS IN PROBLEMS OF STRUCTURE  
MECHANICS

## S u m m a r y

The paper presents a new application of flow graphs in the mechanics of structure. The flow graphs operations for analysis of a uniphase system has been shown. The presented method is particularly useful in didactics.