ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Budownictwo z. 41 Nr kol. 478

Jerzy Niewiadomski, Helmut Rogowski

METODA SIŁ I METODA PRZEMIESZCZEŃ W STATYCZNEJ ANALIZIE SZKIELETOWYCH CHŁODNI KOMINOWYCH

Streszczenie. Przeprowadzono porównanie rozwiązania metodami sił i przemieszczeń szkieletowej chłodni kominowej obciążonej wiatrem przy uwzględnieniu współpracy pierścieni pośrednich z przestrzenną kratownicą układu. Ponadto przedstawiono odpowiednio rozwinięte rozwiązanie metodą sił w formie macierzowej oraz poddano analizie trzy warianty układu zastępczego metody przemieszczeń. Za racjonalny uznano wariant, w którym jako niewiadome występują: jeden kąt poziomego obrotu i trzy przesunięcia węzłów.

1. Uwagi wstępne

W obliczeniach statycznych stalowej konstrukcji chłodni kominowych stosuje się z reguły metodę sił w formie zaproponowanej przez Andree'a [1] i przedstawionej również w monografii [2]. Dla przypadku obciążenia parciem wiatru, mającego decydujący wpływ na wartości sił w szkielecie, stalowa konstrukcja chłodni jest traktowana jak przestrzenna kratownica, statycznie wyznaczalna po eliminacji ściskanych krzyżulców, połączona z podbudową za pomocą nieprzesuwnych podpór i stężona na górnym brzegu wielobocznym pierścieniem kratowym.

Niekiedy rygle kratownicy, w celu redukcji momentów zginających od bezpośredniego obciążenia wiatrem, łączy się w sposób sztywny w narożach uzyskując w ten sposób dodatkowe, pośrednie pierścienie. W dotychczasowych rozwiązaniach uwzględniano jedynie wpływ górnego pierścienia na rozkład sił w kratownicy przestrzennej szkieletu, traktując go dla uproszczenia obliczeń jako nieskończenie sztywny. W rzeczywistości wpływ górnego pierścienia jest, wskutek jego odkształcalności, znacznie mniejszy. Z drugiej jednak strony wspomniane pierścienie pośrednie korzystnie wpływają na wyrównanie sił w kratownicy przestrzennej; dlatego powinny one być i w tym aspekcie uwzględnione w obliczeniach statycznych. Uwzględnienie wpływu wszystkich pierścieni i to jako elementów odkształcalnych nie stwarza zasadniczych trudności w rozwiązaniu konstrukcji chłodni metodą sił. Możliwe są przy tym przynajmniej dwa różniące się od siebie istotnie układy zastępcze. Pierwszy uzyskać można odrzucając dodatkowe więzy w narożach i zastępując ich działanie momentami, co prowadzi do n nadliczbowych wielkości, gdzie n równe połowie liczby węzłów (jeżeli uwzględnić symetrię obciążenia parciem wiatru). W drugim układzie zastępczym wykorzystuje się

fakt, że wpływ odkształceń osiowych rygli dowolnego poziomu na przemieszczenia węzłów tego poziomu jest niewielki. Pozwala to odrębnie potraktować pierścienie i kratownicę przestrzenną szkieletu i jako nadliczbowe wielkości przyjąć poziome siły ich wzajemnego oddziaływania, przyłożone w węzłach prostopadle do kierunku parcia wiatru, co stanowi określone rozwinięcie [1]. W porównaniu z pierwszym układem zastępczym w miejsce jednego układu równań o n niewiadomych otrzymuje się k podukładów o dwóch niewiadomych, gdzie k - liczba pierścieni i jeden układ o n - 2k niewiadomych.

Wprawdzie w rozwiązaniu metodą sił liczba niewiadomych jest stosunkowo niewielka, jednak cechą charakterystyczną obydwu układów zastępczych tej metody jest duży zasięg wpływu obciążeń jednostkowych, co prowadzi do złożonych wyrażeń na współczynniki δ_{ik} układu równań kanonicznych metody. Dodatkowo rozwiązanie komplikuje się w przypadku uwzględnienia mimośrodowego działania kratownic ściennych szkieletu na pierścienie.

Wymienione trudności skłoniły do rozpatrzenia możliwości zastosowania w obliczeniach chłodni szkieletowych metody przemieszczeń. Jak wiadomo, metodę tę charakteryzuje duża prostota jej formuł na siły oddziaływania dodatkowych więzów i tym samym obliczenie współczynników przy niewiadomych jest znacznie prostsze aniżeli w metodzie sił. Ponadto metoda ta pozwala w prosty sposób uwzględnić ewentualne załamanie ścian. Istotne wydaje się również i to, że rozwiązanie wysokiej chłodni szkieletowej, z uwagi na jej wiotkość, należy przeprowadzać według nieliniowej geometrycznie teorii - co wymaga zastosowania metody przemieszczeń. Ujemną natomiast stroną rozwiązania metodą przemieszczeń jest znacznie większa - w porównaniu z metodą sił - liczba niewiadomych.

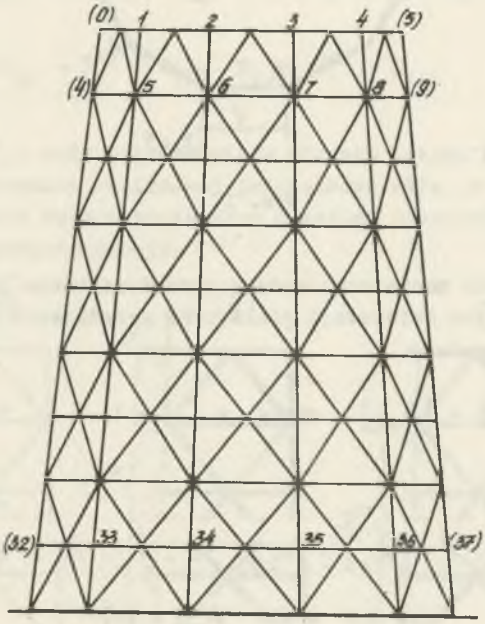
Udoskonalone rozwiązanie chłodni szkieletowej metodą sił zostanie przedstawione w następnym punkcie artykułu, przy czym rozwiązaniu nadano formę właściwą z punktu widzenia programowania na EMC. W trzecim punkcie przeprowadza się analizę kilku wariantów układów zastępczych metody przemieszczeń pod kątem możliwości redukcji liczby niewiadomych.

2. Rozwiązanie metodą sił

Przedstawia się rozwiązanie chłodni szkieletowej obciążonej parciem wiatru przy następujących założeniach - zgodnie z p. 1: słupy krawędziowe stanowią wspólne elementy przyległych ścian, osie rygli leżą w płaszczyźnie ścian, odkształcenia osiowe rygli pierścieni są znikome i mogą być pominięte.

Siły wzajemnego oddziaływania Z_j pierścieni i szkieletu oblicza się przyjmując ustrój podstawowy złożony z przestrzennej statycznie wyznaczalnej kratownicy szkieletu oraz z dwa razy statycznie niewyznaczalnych - jeśli uwzględnić symetrię układu względem płaszczyzny równoległej do kie-

runku parcia wiatru - płaskich pierścieni. Dla uproszczenia strony formalnej ograniczono się do podania rozwiązania dla chłodni dwunastobocznej o dziewięciu poziomach rygli - rys. 1.



Rys. 1

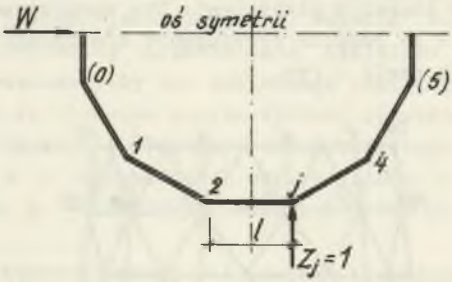
Przemieszczenia δ_{ij} w układach pomocniczych od obciążeń $Z_j = 1$ znajduje się jako sumę odpowiadających sobie przemieszczeń pierścienia δ'_{ij} i kratownicy przestrzennej δ''_{ij}.

Dla dowolnego pierścienia o kształcie wieloboku foremnego i stałym przekroju - rys. 2, jednostkowe przemieszczenia δ'_{ij} wyrazić można następującym wzorem

$$\delta'_{ij} = k_{ij}^{(M)} \frac{l^3}{EJ} + k_{ij}^{(Q)} \cdot \gamma_t \cdot l, \tag{1}$$

gdzie

$\gamma_t = \dfrac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot EF_k}$ - oznacza jednostkowy kąt odkształcenia postaciowego, α - kąt nachylenia krzyżulców do pasa, a $k_{ij}^{(M)}$ i $k_{ij}^{(Q)}$ wartości współczynników - zależne tylko od liczby boków pierścienia.



Rys. 2

Wprowadzając zapis macierzowy możemy przemieszczenia jednostkowe w całym układzie od wpływu deformacji pierścieni przedstawić za pomocą następującej macierzy pasmowej

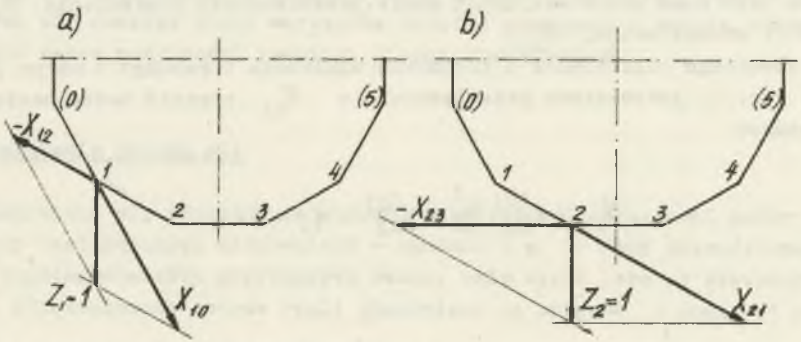
$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{st}], \quad \text{gdzie} \quad s, \quad t = 1, 2 \ldots 9, \tag{2}$$

przy czym

$$\text{dla} \quad s = t, \quad \mathbf{A}_{st} = [\delta_{ij}], \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \tag{3}$$

$$\text{zaś dla} \quad s \neq t \quad \mathbf{A}_{st} = [0].$$

Obliczenie przemieszczeń jednostkowych δ''_{ij} w kratownicy przestrzennej jest już bardziej złożone i dlatego ograniczono się do podania obliczenia tylko kilku wybranych przemieszczeń.



Rys. 3

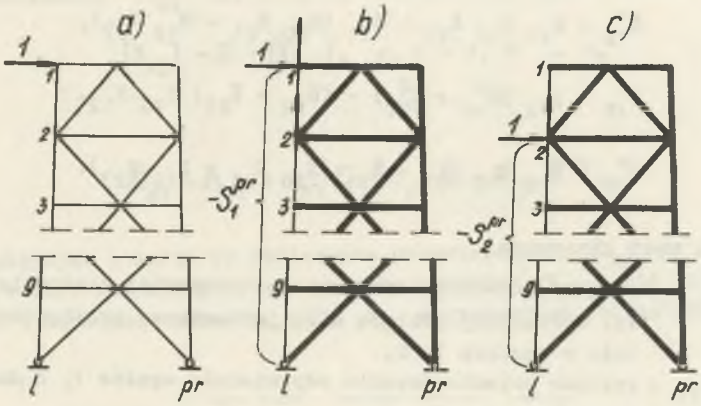
W celu obliczenia np. δ''_{11} - wyznaczamy składowe X_{12} i X_{10} siły $Z_1 = 1$ - rys. 3 i w następujący sposób wyrażamy siły w słupach krawędzio-

wych 0, 1, 2 i prętach skratowania ścian 0-1 i 1-2 kratownicy przestrzennej (oznaczenia wg oznaczeń węzłów górnego pierścienia)

$$S_0 = \bar{S}_1^l \cdot X_{10}, \quad S_1 = \bar{S}_1^l \cdot X_{12} + \bar{S}_1^{pr} X_{10}, \quad S_2 = \bar{S}_1^{pr} \cdot X_{12},$$

$$S_{01} = \bar{S}_1^{kr} \cdot X_{10}, \quad S_{12} = \bar{S}_1^{kr} \cdot X_{12},$$

gdzie $\bar{S}_1^l$, $\bar{S}_1^{pr}$, $\bar{S}_1^{kr}$ - siły odpowiednio w słupach lewym, prawym i skratowaniu płaskiej kratownicy obciążonej jednostkową siłą w pierwszym węźle - rys. 4a (oznaczenia węzłów kratownicy płaskiej niezależne od oznaczeń węzłów kratownicy przestrzennej).



Rys. 4

$$\delta_{11}'' = \sum S^2 \ (Z_1 = 1) \frac{l}{EA} =$$

$$= \sum \bar{S}_1^2 \frac{l}{EA} (X_{10}^2 + X_{12}^2) + 2\sum \bar{S}_1^l \cdot \bar{S}_1^{pr} \frac{l}{EA} X_{10} \cdot X_{12}, \tag{5}$$

gdzie

$\bar{S}_1$ - siły w prętach kratownicy płaskiej.

W podobny sposób możemy wyznaczyć wszystkie przemieszczenia δ_{ij}'', w szczególności otrzymamy

$$\delta_{12}'' = \sum \bar{S}_1^2 \frac{l}{EA} X_{12} \cdot X_{21} + \sum \bar{S}_1^l \bar{S}_1^{pr} \frac{l}{EA} (X_{10} \cdot X_{21} + X_{12} \cdot X_{23}), \tag{6}$$

$$\delta''_{15} = \sum \bar{S}_1 \bar{S}_2 \frac{l}{EA} (X_{10}^2 + X_{12}^2) + (\sum \bar{S}_1^1 \bar{S}_2^{pr} \frac{l}{EA} + \bar{S}_2^1 \bar{S}_1^{pr} \frac{l}{EA}) X_{10} \cdot X_{12},$$

$$\delta''_{16} = \sum \bar{S}_1 \bar{S}_2 \frac{l}{EA} X_{12} X_{21} + \sum \bar{S}_2^1 \bar{S}_1^{pr} \frac{l}{EA} (X_{10} X_{21} + X_{12} X_{23}), \tag{6}$$

gdzie

$\bar{S}_2$ - siły w prętach kratownicy płaskiej obciążonej w węźle 2 siłą jednostkową.

Znalezione przemieszczenia można jeszcze wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}
\delta''_{11} &= b_{11} (X_{10}^2 + X_{12}^2) - 2 \bar{b}_{11} X_{10} X_{12}, \\
\delta''_{12} &= b_{11} X_{12} X_{21} - \bar{b}_{11} (X_{10} X_{21} + X_{12} X_{23}), \\
\delta''_{15} &= b_{12} (X_{10}^2 + X_{12}^2) - (\bar{b}_{12} + \bar{b}_{21}) X_{10} X_{12}, \\
\delta''_{16} &= b_{12} X_{12} X_{21} - \bar{b}_{21} (X_{10} X_{21} + X_{12} X_{23}).
\end{aligned} \tag{7}$$

We wzorach tych oznaczono

b_{11}, b_{12} - poziome przemieszczenia węzła 1 płaskiej kratownicy - rys. 4a, obciążonej poziomą siłą jednostkową przyłożoną odpowiednio w węzłach 1, 2,

$\bar{b}_{11}$, $\bar{b}_{21}$ - poziome przemieszczenia odpowiednio węzłów 1, 2 płaskiej kratownicy - rys. 4b,

$\bar{b}_{12}$ - poziome przemieszczenie węzła 1 płaskiej kratownicy - rys. 4c.

Wyrażenia $\bar{b}$ można więc traktować jako określające również przemieszczenia węzłów płaskiej kratownicy ale odpowiednio obciążonej i usztywnionej (prętom przedstawionym na rys. 4b, 4c liniami tłustymi należy przypisać $EF = \infty$).

Wprowadzając macierze

$$\mathbf{B} = [b_{st}], \quad \bar{\mathbf{B}} = [\bar{b}_{st}], \qquad s, t = 1, 2 \ldots 9$$

oraz (8)

$$\mathbf{C} = [c_{ij}], \quad \bar{\mathbf{C}} = [\bar{c}_{ij}], \qquad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$c_{11} = c_{44} = X_{10}^2 + X_{12}^2$, $c_{22} = c_{33} = X_{21}^2 + X_{23}^2$, $c_{12} = c_{34} = X_{12} \cdot X_{21}$,

$c_{23} = X_{23} \cdot X_{32}$, pozostałe $c = 0$,

$$\bar{c}_{11} = \bar{c}_{44} = X_{10} \cdot X_{12}, \quad \bar{c}_{22} = \bar{c}_{33} = X_{21} \cdot X_{23}, \quad \bar{c}_{21} = \bar{c}_{43} = X_{10} \cdot X_{21} + X_{12} \cdot X_{23} \tag{9}$$

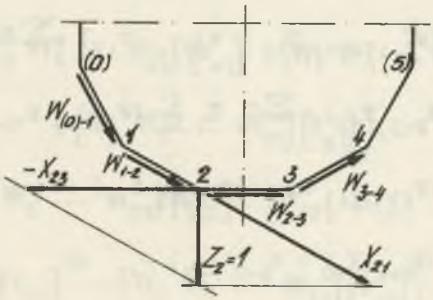
$\bar{c}_{31} = \bar{c}_{42} = X_{12} \cdot X_{32}$, $\bar{c}_{32} = X_{21} \cdot X_{32} + X_{23} \cdot X_{34}$, pozostałe $\bar{c} = 0$ oraz uwzględniając macierz przemieszczeń $\mathbf{A}$ pierścieni można jednostkowym przemieszczeniom δ_{ij} układu nadać następującą ogólną postać

$$[\delta_{ij}] = \mathbf{D} = [\mathbf{D}_{st}], \quad s, t = 1, 2 \ldots 9, \tag{10}$$

gdzie

$$\mathbf{D}_{st} = \mathbf{A}_{st} + b_{st}\mathbf{C} - \delta_{st}\bar{\mathbf{C}} - \delta_{ts}\bar{\mathbf{C}}^{Tr}.$$

Przystępując z kolei do obliczenia przemieszczeń Δ_{iw} od obciążenia parciem wiatru określamy wpierw poziome składowe W_{i-j} sił parcia wiatru - rys. 5 a następnie wyrażamy siły S_w w kratownicy przestrzennej przez



Rys. 5

siły S w płaskiej kratownicy. Np. dla obliczenia Δ_{1w} siły w prętach kratownic ściennych 0-1 i 1-2 wyraża się następująco:

$$S_{ow} = (\bar{S}_1^l \cdot W_{(0)-1} + \bar{S}_1^{pr} W_{(-1)-(0)}) + (\bar{S}_2^l \cdot W_{(4)-5} + \bar{S}_2^{pr} W_{(3)-(4)} +$$

$$+ \dots + (\bar{S}_9^l \cdot W_{(32)-33} + \bar{S}_9^{pr} W_{(31)-(32)},$$

$$S_{1w} = (\bar{S}_1^l W_{1-2} + \bar{S}_1^{pr} \cdot W_{(0)-1}) + (\bar{S}_2^l \cdot W_{5-6} + \bar{S}_2^{pr} \cdot W_{(4)-5}) +$$

$$+ \dots + (\bar{S}_9^l W_{33-34} + \bar{S}_9^{pr} W_{(32)-33}), \tag{11}$$

$$S_{2w} = (\bar{S}_1^l W_{2-3} + \bar{S}_1^{pr} \cdot W_{1-2}) + (\bar{S}_2^l W_{6-7} + \bar{S}_2^{pr} W_{5-6}) +$$

$$+ \dots + (\bar{S}_9^l \cdot W_{34-35} + \bar{S}_9^{pr} W_{33-34}),$$

$$S_{0-1w} = \bar{S}_1^{kr} \cdot W_{(0)-1} + \bar{S}_2^{kr} W_{(4)-5} + \dots + \bar{S}_9^{kr} W_{(32)-33}, \tag{12}$$

$$S_{1-2\ w} = \bar{S}_1^{kr} \cdot W_{1-2} + \bar{S}_2^{kr} \cdot W_{5-6} + \dots + \bar{S}_9^{kr} W_{33-34}, \tag{13}$$

i uwzględniając jeszcze wyrażenia na siły $S\ (Z_1 = 1)$ znajduje się

$$\Delta_{1w} = \sum S\ (Z_1 = 1)\ S_w \frac{1}{EA} =$$

$$= \sum \bar{S}_1^2 \frac{1}{EA} (W_{(0)-1} \cdot X_{10} + W_{1-2} \cdot X_{12}) +$$

$$+ \sum \bar{S}_1^l \bar{S}_1^{pr} \frac{1}{EA} (W_{(-1)-(0)} X_{10} + W_{(0)-1} X_{12}) + \sum \bar{S}_1^l \bar{S}_1^{pr} \frac{1}{EA} \cdot$$

$$\cdot (W_{1-2} X_{10} + W_{2-3} X_{12}) + \sum \bar{S}_1 \bar{S}_2 \frac{1}{EA} (W_{(4)-5} X_{10} + W_{5-6} X_{12}) +$$

$$+ \sum \bar{S}_1^l \bar{S}_2^{pr} \frac{1}{EA} (W_{(3)-(4)} X_{10} + W_{(4)-5} X_{12}) +$$

$$+ \sum \bar{S}_2^l \bar{S}_1^{pr} \frac{1}{EA} (W_{5-6} X_{10} + W_{6-7} X_{12}) +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \sum \bar{S}_1 \bar{S}_9 \frac{1}{EA} (W_{(32)-33} X_{10} + W_{33-34} X_{12}) +$$

$$+ \sum \bar{S}_1^l \bar{S}_9^{pr} \frac{1}{EA} (W_{(31)-(32)} X_{10} + W_{(32)-33} X_{12}) +$$

$$+ \sum \bar{S}_9^l \bar{S}_1^{pr} \frac{1}{EA} (W_{33-34} X_{10} + W_{34-35} X_{12}). \tag{14}$$

Wyrażeniu temu można nadać następującą postać macierzową:

$$\Delta_{1w} = [X_{10}\ X_{12}]\left(\begin{bmatrix} W_{(0)-1} & W_{(4)-5} & \cdots & W_{(32)-33} \\ W_{1-2} & W_{5-6} & \cdots & W_{33-34} \end{bmatrix} [b_{s1}] - \right.$$

$$- \begin{bmatrix} W_{(-1)-(0)} & W_{(3)-(4)} & \cdots & W_{(31)-(32)} \\ W_{(0)-1} & W_{(4)-5} & \cdots & W_{(32)-33} \end{bmatrix} [\bar{b}_{1t}]^{Tr} -$$

$$\left. - \begin{bmatrix} W_{1-2} & W_{5-6} & \cdots & W_{33-34} \\ W_{2-3} & W_{6-7} & \cdots & W_{34-35} \end{bmatrix} [\bar{b}_{s1}] \right), \tag{15}$$

$$\Delta_{1w} = \bar{X}_1 \Big([\mathbf{W}_1\ \mathbf{W}_5 \cdots \mathbf{W}_{33}] [b_{s1}] - [\mathbf{W}_{(0)}\ \mathbf{W}_{(4)} \cdots \mathbf{W}_{(32)}] \cdot$$

$$\cdot [\bar{b}_{1t}]^{Tr} - [\mathbf{W}_2\ \mathbf{W}_6 \cdots \mathbf{W}_{34}] [\bar{b}_{s1}] \Big), \tag{16}$$

gdzie

$[b_{s1}]$ - 1-a kolumna macierzy $\mathbf{B}$, zaś $[\bar{b}_{1t}]$ i $[\bar{b}_{s1}]$ - odpowiednio - 1-y wiersz i 1-a kolumna macierzy $\bar{\mathbf{B}}$..

Podobnie znajdziemy

$$\Delta_{2w} = \mathbf{X}_2 \Big([\mathbf{W}_2\ \mathbf{W}_6 \cdots \mathbf{W}_{34}] [b_{s1}] - [\mathbf{W}_1\ \mathbf{W}_5 \cdots \mathbf{W}_{33}] [\bar{b}_{1t}]^{Tr} -$$

$$- [\mathbf{W}_3\ \mathbf{W}_7 \cdots \mathbf{W}_{35}] [\bar{b}_{s1}] \Big),$$

$$\Delta_{5w} = \mathbf{X}_1 \Big([\mathbf{W}_1\ \mathbf{W}_5 \cdots \mathbf{W}_{33}] [b_{s2}] - [\mathbf{W}_{(0)}\ \mathbf{W}_{(4)} \cdots \mathbf{W}_{(32)}] \cdot$$

$$\cdot [\bar{b}_{2t}]^{Tr} - [\mathbf{W}_2\ \mathbf{W}_6 \cdots \mathbf{W}_{34}] [\bar{b}_{s2}] \Big), \tag{17}$$

$$\Delta_{6w} = \mathbf{X}_2 \Big([\mathbf{W}_2\ \mathbf{W}_6 \cdots \mathbf{W}_{34}] [b_{s2}] - [\mathbf{W}_1\ \mathbf{W}_5 \cdots \mathbf{W}_{33}] [\bar{b}_{2t}]^{Tr} -$$

$$- [\mathbf{W}_3\ \mathbf{W}_7 \cdots \mathbf{W}_{35}] [\bar{b}_{s2}] ,$$

gdzie

$$\mathbf{X}_i = \left[X_{i,i-1}\ x_{i,i+1}\right],\quad \mathbf{W}_i = \left[W_{i-1,i}\ W_{i,i+1}\right]^{Tr}. \tag{18}$$

Wprowadzając macierze

$$\mathbf{W} = \left[W_{ij}\right],\ \overline{\mathbf{W}} = \left[\overline{W}_{ij}\right],\ \overline{\overline{\mathbf{W}}} = \left[\overline{\overline{W}}_{ij}\right],\quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \ldots 4; \\ j = 1, 2 \ldots 9 \end{array} \tag{19}$$

gdzie

$$W_{ij} = \mathbf{X}_i\left[\mathbf{W}_i\ \mathbf{W}_{i+4} \ldots \mathbf{W}_{i+4(j-1)} \ldots \mathbf{W}_{i+32}\right], \tag{20}$$

$$\overline{W}_{ij} = \mathbf{X}_i\left[\mathbf{W}_{i-1}\ \mathbf{W}_{i+3} \ldots \mathbf{W}_{i-1+4(j-1)} \ldots \mathbf{W}_{i+31}\right], \tag{21}$$

$$\overline{\overline{W}}_{ij} = \mathbf{X}_i\left[\mathbf{W}_{i+1}\ \mathbf{W}_{i+5} \ldots \mathbf{W}_{i+1+4(j-1)} \ldots \mathbf{W}_{i+33}\right] \tag{22}$$

możemy przemieszczenia wszystkich węzłów od obciążenia wiatrem zapisać w następującej formie

$$\left[\Delta_{iw}\right] = \mathbf{F} = \left[\mathbf{F}_{si}\right],\quad i = 1, 2 \ldots 36;\quad s = 1, 2 \ldots 9, \tag{23}$$

przy czym

$$\mathbf{F}_{si} = \mathbf{W}\left[b_{ts}\right] - \overline{\mathbf{W}}\left[\overline{b}_{st}\right]^{Tr} - \overline{\overline{\mathbf{W}}}\left[\overline{\overline{b}}_{ts}\right],\quad t = 1, 2 \ldots 9. \tag{24}$$

Siły wzajemnego oddziaływania Z_j pierścieni i kratownicy przestrzennej znajdziemy z układu równań

$$\mathbf{DZ} + \mathbf{F} = [0]. \tag{25}$$

Siły osiowe, np. w prętach kratownicy płaskiej 1-2, obliczymy teraz ze wzorów

w słupie 1

$$\begin{aligned} S_1 = {} & (\overline{S}_1^{pr} Z_1 + \overline{S}_2^{pr} Z_5 + \ldots + \overline{S}_9^{pr} Z_{33})\, X_{10} + \\ & + (\overline{S}_1^{l} Z_1 + \overline{S}_2^{l} Z_5 + \ldots + \overline{S}_9^{l} Z_{33})\, X_{12} + \\ & + (\overline{S}_1^{l} Z_2 + \overline{S}_2^{l} Z_6 + \ldots + \overline{S}_9^{l} Z_{34})\, X_{21} + S_{1w}, \end{aligned} \tag{26}$$

w słupie 2

$$S_2 = (\bar{S}_1^{pr} Z_1 + \bar{S}_2^{pr} Z_5 + \ldots + \bar{S}_9^{pr} Z_{33}) X_{12} +$$

$$+ (\bar{S}_1^{pr} Z_2 + \bar{S}_2^{pr} Z_6 + \ldots + \bar{S}_9^{pr} Z_{34}) X_{21} +$$

$$+ (\bar{S}_1^{l} Z_2 + \bar{S}_2^{l} Z_6 + \ldots + \bar{S}_9^{l} Z_{34}) X_{23} +$$

$$+ (\bar{S}_1^{l} Z_3 + \bar{S}_2^{l} Z_7 + \ldots + \bar{S}_9^{l} Z_{35}) X_{32} + S_{2w}, \tag{27}$$

w prętach skratowania ściany 1-2

$$S_{12} = (\bar{S}_1^{kr} Z_1 + \bar{S}_2^{kr} Z_5 + \ldots + \bar{S}_9^{kr} Z_{33}) X_{12} +$$

$$+ (\bar{S}_1^{kr} Z_2 + \bar{S}_2^{kr} Z_6 + \ldots + \bar{S}_9^{kr} Z_{34}) X_{21} + S_{12w}. \tag{28}$$

Ogólnie możemy zapisać następujące wyrażenia na siły osiowe w słupie i-ym

$$S_i = X_{i-1,i} \sum_j \bar{S}_j^{pr} Z_{i-1+4(j-1)} + X_{i,i-1} \sum_j \bar{S}_j^{pr} Z_{i+4(j-1)} +$$

$$+ X_{i,i+1} \sum_j \bar{S}_j^{l} Z_{i+4(j-1)} + X_{i+1,i} \sum_j \bar{S}_j^{l} Z_{i+1+4(j-1)} + S_{iw} \tag{29}$$

w prętach skratowania ściany i,i+1

$$S_{i,i+1} = X_{i,i+1} \sum_j \bar{S}_j^{kr} Z_{i+4(j-1)} + X_{i+1,i} \sum_j \bar{S}_j^{kr} Z_{i+1+4(j-1)} + S_{i,i+1w} \tag{30}$$

gdzie

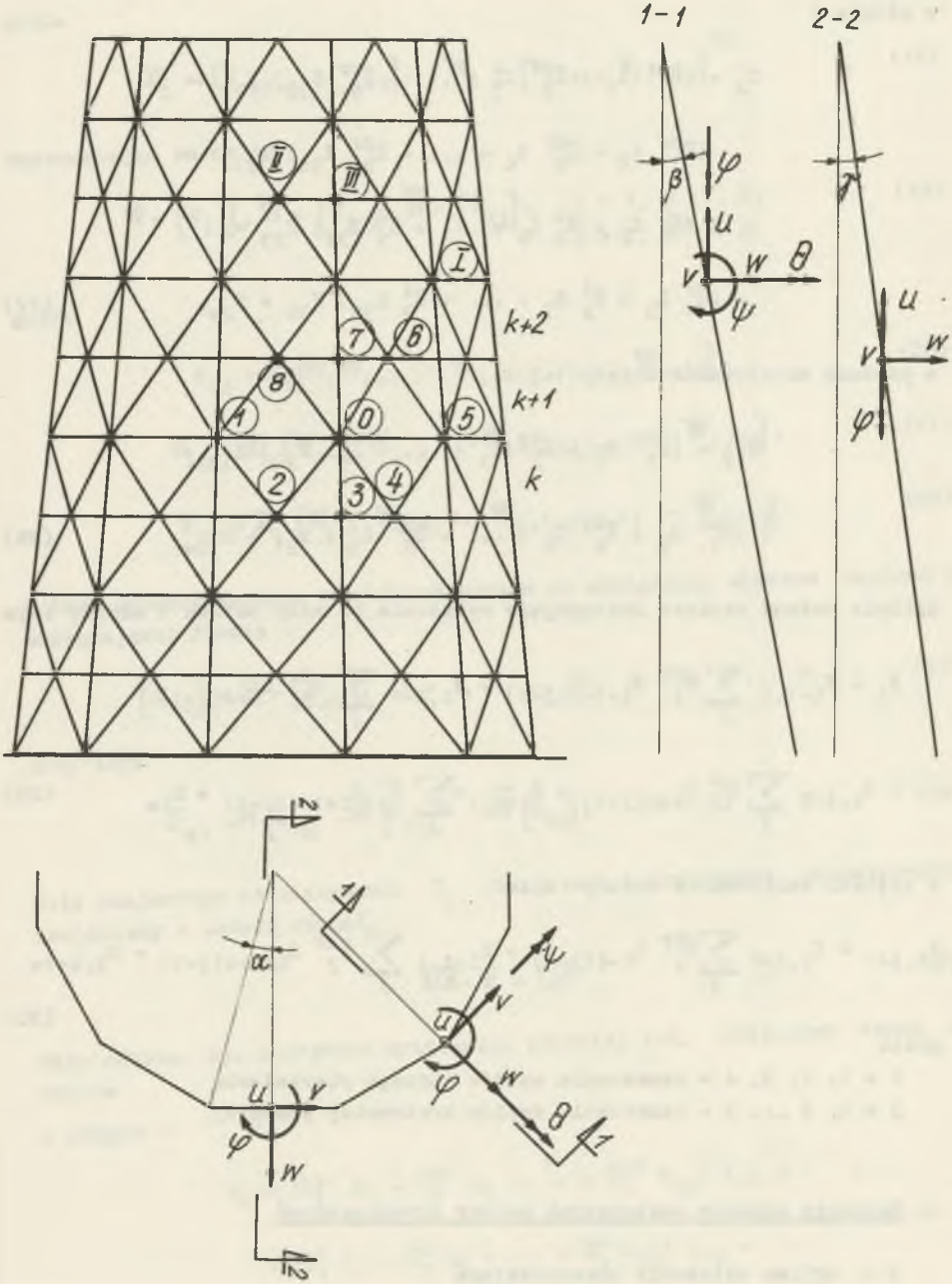
i = 1, 2, 3, 4 - oznaczenia węzłów górnego pierścienia

j = 1, 2 ... 9 - oznaczenia węzłów kratownicy płaskiej.

3. Warianty układów zastępczych metody przemieszczeń

3.1. Ogólne założenia upraszczające

Charakterystyczne dla stalowej konstrukcji chłodni kominowej, posiadającej kształt ostrosłupa ściętego o małej zbieżności, jest pewne odchylenie rygli ściennych od poziomu. Rygle ścienne bowiem, wykonywane jako dwu-

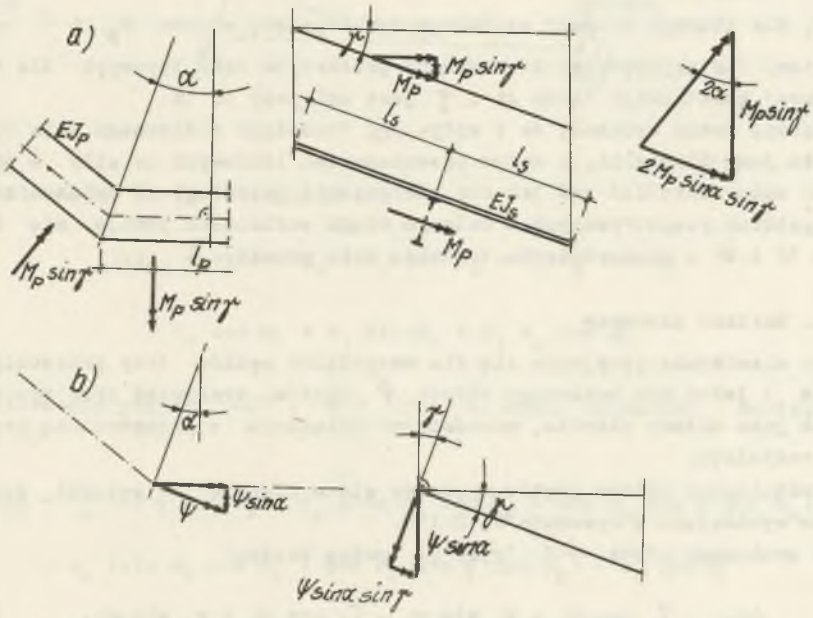


Rys. 6

gałęziowe pręty skratowane, ze względów konstrukcyjnych zakładane są z reguły prostopadle do ścian szkieletu. Przez połączenie takich rygli w sposób sztywny w narożach uzyskuje się przestrzenne pierścienie nieznacznie odchylające się od pierścieni płaskich. Wyjątek stanowi górny pierścień, który ze względów eksploatacyjnych jest wykonywany jako płaski.

Dla oceny wpływu przestrzennego charakteru pierścieni pośrednich rozpatrzmy na przykład narożny węzeł I (rys. 6) zakładając, że rygle tworzą ze ścianami kąty proste i są jednakowo obciążone siłami działającymi w płaszczyznach ich skratowania. W takim przypadku równe co do wartości momenty przywęzłowe M_p pierścieni (rys. 7a) oddziaływują na pręty krawędziowe momentem

$$M = 2\, M_p \sin\alpha \sin\gamma\,, \tag{31}$$



Rys. 7

który wywołuje obrót przekroju przywęzłowego tych prętów o kąt ψ. Obrót ten wywołuje z kolei, jeśli uwzględnić tylko sztywność rygli na zginanie w płaszczyźnie skratowania, dodatkowe momenty przywęzłowe (rys. 7b), wyrażające się wzorem

$$M_p^{(\psi)} \cong -\frac{2\, EJ_p}{l_p}\, \psi \sin\alpha \sin\gamma\,, \tag{32}$$

oraz momenty w słupach krawędziowych

$$M_s^{(\psi)} = \frac{6\,EJ_s}{l_s}\,\psi\,. \tag{33}$$

Warunek momentów względem osi obrotu kąta ψ przyjmuje postać

$$\frac{6\,EJ_s}{l_s}\,\psi = (M_p - \frac{2\,EJ_p}{l_p}\,\psi \sin\alpha \sin\gamma)\sin\alpha \sin\gamma\,. \tag{34}$$

Stosunek drugiego wyrazu po prawej stronie równania do pierwszego, wyraża wpływ przestrzennej pracy pierścienia i równocześnie wpływ kąta ψ za wartość momentów w pierścieniu.

Dla przypadku obciążenia pierścienia obciążeniem równomiernie rozłożonym q, dla którego momenty wyjściowe wyrażają się wzorem $M_p = \pm \frac{q\,l_p^2}{12}$, wpływ ten, dla najczęściej stosowanych przekrojów oraz typowych dla rozpatrywanej konstrukcji kątów α i γ jest mniejszy od 1%.

Podobnie można wykazać, że i wpływ θ trzeciego składowego kąta obrotu węzła jest niewielki, a wpływ przemieszczeń liniowych na siły w pierścieniu można określić też jak dla pierścienia płaskiego. W związku z tym we wszystkich rozpatrywanych w dalszym ciągu wariantach pomija się kąty obrotu ψ i θ, a pierścienie traktuje jako płaskie.

3.2. Wariant pierwszy

Jako niewiadome przyjmuje się dla wszystkich węzłów trzy przesunięcia u, v, w i jeden kąt poziomego obrotu φ węzłów, traktując przy tym pierścienie jako układy płaskie, mimośrodowo połączone z przestrzenną kratownicą szkieletu.

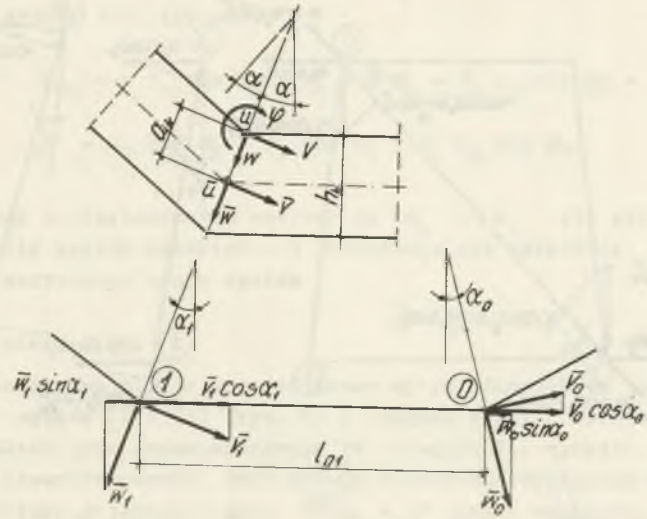
Odkształcenia osiowe prętów wyznacza się w oparciu o związki geometryczne wynikające z rysunków 6, 8 i 9.

Dla poziomego pręta 1-0 (rys. 8) można zapisać

$$\Delta l_{01} = \bar{v}_o \cos\alpha_o + \bar{w}_o \sin\alpha_o - \bar{v}_1 \cos\alpha_1 + w_1 \sin\alpha_1. \tag{35}$$

Uwzględniając zależność między przemieszczeniami pierścienia a przemieszczeniami szkieletu (rys. 8)

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v - \varphi \cdot a_k, \quad \bar{w} = w \tag{36}$$



Rys. 8

i podstawiając do (5) otrzymuje się

$$\Delta l_{01} = v_o \cos\alpha_o + w_o \sin\alpha_o - \varphi_o a_k \cos\alpha_o +$$

$$- v_1 \cos\alpha_1 + w_1 \sin\alpha_1 + \varphi_1 a_k \cos\alpha_1. \tag{37}$$

Odkształcenia prętów 0-2 i 0-3 (rys. 6) można wyznaczyć następująco (rys. 9)

$$\Delta l_{02} = u_o \cos\gamma \sin\delta_k + v_o (\cos\alpha_o \cos\delta_k + \sin\alpha_o \sin\gamma \sin\delta_k) +$$

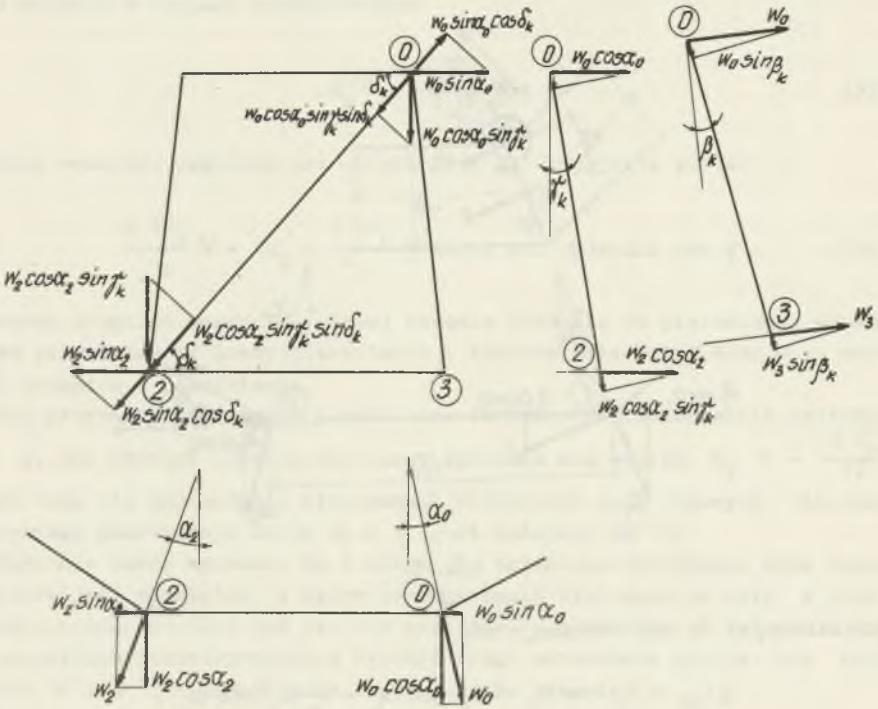
$$+ w_o (\sin\alpha_o \cos\delta_k - \cos\alpha_o \sin\gamma \sin\delta_k) - u_2 \cos\gamma \,.$$

$$. \sin\delta_k + v_2 (\sin\alpha_2 \sin\gamma \sin\delta_k - \cos\alpha_2 \cos\delta_k) +$$

$$+ w_2 (\sin\alpha_2 \sin\delta_k + \cos\alpha_2 \sin\gamma \sin\delta_k), \tag{38}$$

$$\Delta l_{03} = u_o \cos\beta - w_o \sin\beta - u_3 \cos\beta + w_3 \sin\beta \,. \tag{39}$$

W podobny sposób można otrzymać wyrażenia na odkształcenia osiowe pozostałych prętów.



Rys. 9

Siłę osiową w dowolnym pręcie oblicza się ze wzoru

$$S_{oj} = E\,F_{oj}\,\frac{\Delta l_{oj}}{l_{oj}}. \tag{40}$$

Momenty zginające i siły poprzeczne w przywęzłowych przekrojach pierścieni, od wpływu przesunięć u, v, w i kąta obrotu φ, wyznacza się z zależności:

$$M_{01} = \frac{2\,EJ}{l}\,(2\,\varphi_o + \varphi_1) - \frac{6\,EJ}{l^2}\,\Delta_{01},$$

$$M_{10} = \frac{2\,EJ}{l}\,(\varphi_o + 2\,\varphi_1) - \frac{6\,EJ}{l^2}\,\Delta_{01}, \tag{41}$$

$$T_{01} = -\frac{1}{l}\,(M_{01} + M_{10}),$$

gdzie dla pręta 1-0 (rys. 8)

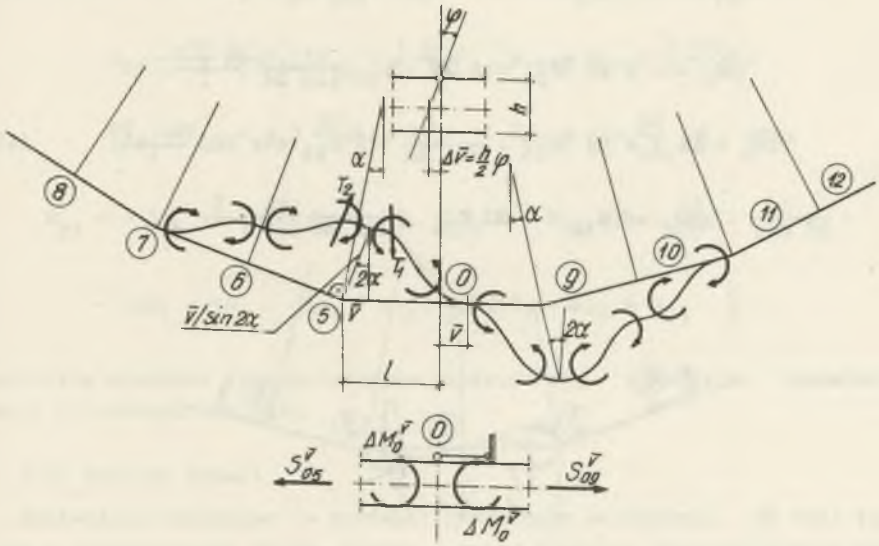
$$\Delta_{01} = - v_o \sin \alpha_o + w_o \cos \alpha_o + \varphi_o a_k \sin \alpha_o +$$

$$- v_1 \sin \alpha_1 - w_1 \cos \alpha_1 + \varphi_1 a_k \sin \alpha_1 . \qquad (42)$$

Podstawiając w przytoczonych wzorach za α_o i α_j dla węzłów narożnych - c , zaś dla węzłów płaskich - 0 otrzymuje się wyrażenia na siły i momenty dla wszystkich typów węzłów.

3.3. Wariant drugi

W wariancie tym pomija się dodatkowo wpływ odkształceń osiowych rygli w poziomie węzłów II i III (rys. 6) w związku z czym przemieszczenia w w tych węzłach oraz przemieszczenia v w węźle III wyrazić można przez pozostałe przemieszczenia. Jako główne niewiadome występują więc: w węzłach I - cztery przemieszczenia u, v, w, φ (jak w wariancie pierwszym), w węzłach II - trzy przemieszczenia u, v, φ , w węzłach III. - tylko kąt obrotu φ .



Rys. 10

Momenty i siły od wpływu grupowego przemieszczenia $\bar{v} = v - \varphi \frac{h}{2}$ węzła II określa się wg wzorów wynikających z planu przemieszczeń przedstawionego na rysunku 10.

$$M_{05} = M_{50} = M_{09} = M_{90} = - EJ\,\varkappa_{05}\,\bar{v},$$

$$M_{56} = M_{65} = M_{67} = M_{76} = M_{9-10} = M_{10-9} = M_{10-11} = M_{11-10} = EJ\,\varkappa_{56}\,\bar{v},$$

$$T_{59} = 2\,EJ\,\varkappa_{05}\,\frac{\bar{v}}{l}, \quad T_{57} = T_{9-11} = -\,2\,EJ\,\varkappa_{56}\,\frac{\bar{v}}{l}, \tag{43}$$

gdzie

$$\varkappa_{05} = \frac{6}{l^2}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha, \quad \varkappa_{56} = \frac{3}{l^2}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha},$$

$$S_{50} = -\,S_{09} = 2\,EJ\left(\varkappa_{05}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha + \varkappa_{56}\,\frac{1}{\sin 2\alpha}\right)\cdot\frac{\bar{v}}{l},$$

$$S_{56} = -\,S_{9-10} = 2\,EJ\left(\varkappa_{05}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha} + \varkappa_{56}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\right)\cdot\frac{\bar{v}}{l}, \tag{44}$$

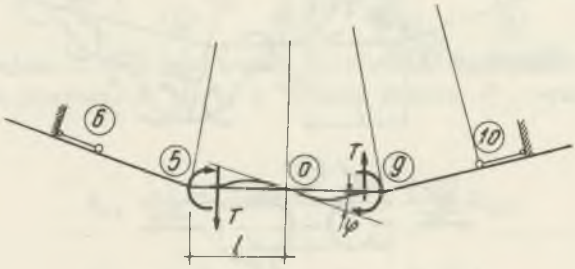
$$S_{67} = -\,S_{10-11} = -\,2\,EJ\cdot\varkappa_{56}\cdot\mathrm{ctg}\,2\alpha\cdot\frac{\bar{v}}{l},$$

$$S_{78} = -\,S_{11-12} = -\,2\,EJ\,\varkappa_{56}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\bar{v}}{l},$$

$$\Delta M_0 = -\,2\,EJ\left(\varkappa_{05}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha + \varkappa_{56}\,\frac{1}{\sin 2\alpha}\right)\frac{h\cdot\bar{v}}{l},$$

$$\Delta M_6 = \Delta M_{10} = EJ\left(\varkappa_{05}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha} + 2\,\varkappa_{56}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\right)\frac{h\cdot\bar{v}}{l}, \tag{45}$$

$$\Delta M_8 = \Delta M_{12} = -\,EJ\,\varkappa_{56}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{h\cdot\bar{v}}{l}.$$



Rys. 11

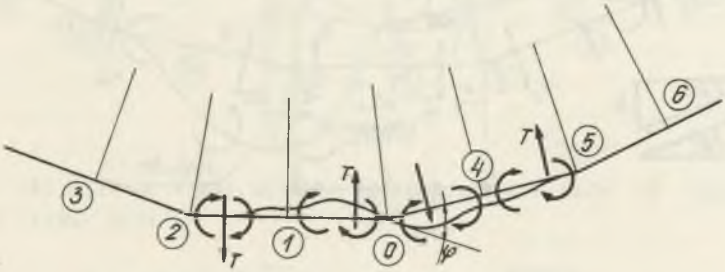
Od wpływu kąta obrotu φ węzła II, odniesionego do punktu osi pierścienia, otrzymuje się z rysunku 11

$$M_{05} = M_{09} = \frac{4\,EJ}{l}\varphi, \quad M_{50} = M_{90} = \frac{2\,EJ}{l}\varphi, \tag{46}$$

$$T_{59} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\varphi, \quad S_{05} = -S_{09} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\cdot\varphi\cdot\operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$S_{56} = -S_{9-10} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\cdot\varphi\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}, \tag{46}$$

$$\Delta M_0 = -2\cdot S_{05}\cdot\frac{h}{2}, \quad \Delta M_6 = \Delta M_{10} = S_{56}\frac{h}{2}.$$



Rys. 12

Obrót węzła III o kąt φ (rysunek 12) wywołuje następujące siły

$$M_{01} = \frac{10}{4}\frac{EJ}{l}\varphi, \quad M_{10} = \frac{1}{2}\frac{EJ}{l}\varphi, \quad M_{12} = M_{21} = \frac{3}{2}\frac{EJ}{l}\varphi,$$

$$T_{02} = T_{05} = -3\frac{EJ}{l^2}\varphi, \quad S_{01} = -S_{04} = -3\frac{EJ}{l^2}\cdot\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

$$S_{21} = -S_{45} = -3\frac{EJ}{l^2}\varphi\operatorname{ctg} 2\alpha, \quad S_{23} = -S_{56} = -3\frac{EJ}{l^2}\varphi\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}, \tag{47}$$

$$\Delta M_1 = \Delta M_4 = (S_{01} - S_{12})\frac{h}{2}, \quad \Delta M_3 = \Delta M_6 = S_{23}\cdot\frac{h}{2}.$$

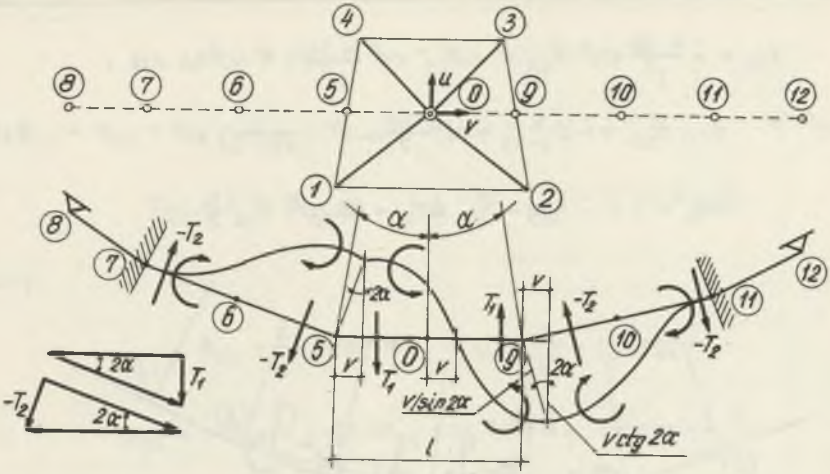
Pozostałe równania transformacyjne uzyskuje się rozwijając odpowiednio wzory pierwszego wariantu.

3.4. Wariant trzeci

Zakładając dodatkowo (w porównaniu z drugim wariantem), że osie rygli leżą w płaszczyznach ścian, możemy ustalić równania transformacyjne metody bez uwzględnienia kąta φ w węźle II.

Na podstawie planu przemieszczeń (rys. 13) otrzymuje się dla węzłów II następujące wyrażenia na momenty i siły od wpływu przesunięcia v:

$$M_{59} = M_{95} = EJ\,\varkappa_{59}\,v, \tag{48}$$



Rys. 13

$$T_{59} = T_{95} = -\frac{2\,EJ}{l}\,\varkappa_{59}\,v,$$

$$M_{57} = M_{75} = M_{9-11} = M_{11-9} = EJ\,\varkappa_{57}\,v, \tag{48}$$

$$T_{57} = T_{75} = T_{9-11} = T_{11-9} = -\frac{2\,EJ}{l}\,\varkappa_{57}\,v,$$

gdzie

$$\varkappa_{57} = \frac{6}{l^2 \sin 2\alpha}, \quad \varkappa_{59} = -\frac{12}{l^2}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\,.$$

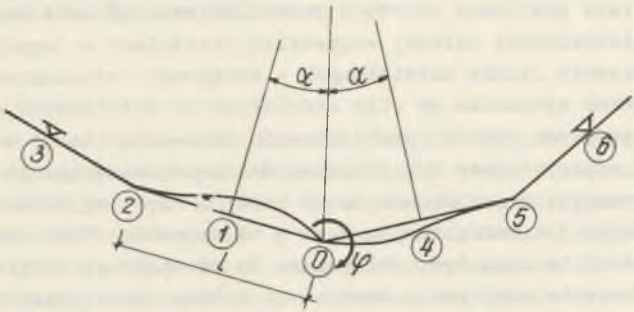
Siły S oddziaływania więzów poziomych wyrażają się wzorami

$$S_{78} = -S_{11-12} = -\frac{2\,EJ}{l}\,\varkappa_{57}\,\frac{v}{\sin 2\alpha},$$

$$S_{76} = -S_{11-10} = -\frac{2\,EJ}{l}\,\varkappa_{57}\,v\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\,,$$

$$S_{56} = -S_{9-10} = -\frac{2\,EJ}{l}\left(\frac{\varkappa_{59}}{\sin 2\alpha} - \varkappa_{57}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\right) v, \tag{49}$$

$$S_{05} = -S_{09} = -\frac{2\,EJ}{l}\left(\varkappa_{59}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha - \frac{\varkappa_{57}}{\sin 2\alpha}\right) v.$$



Rys. 14

Dla węzła III otrzymuje się na siły oddziaływania więzów od wpływu kąta obrotu φ (rys. 14):

$$M_{02} = M_{05} = \frac{4\,EJ}{l}\varphi, \quad M_{20} = M_{50} = \frac{2\,EJ}{l}\varphi,$$

$$T_{02} = T_{20} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\varphi,$$

$$S_{01} = -S_{04} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{50}$$

$$S_{12} = -S_{45} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\varphi\,\mathrm{ctg}\,2\alpha,$$

$$S_{23} = -S_{56} = -\frac{6\,EJ}{l^2}\varphi\frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

3.5. Wybór układu zastępczego metody przemieszczeń

Z przedstawionych trzech wariantów układów zastępczych metody przemieszczeń do najmniejszej liczby niewiadomych prowadzi wskutek poczynionych uproszczeń wariant ostatni. Wariant ten uniemożliwia jednak uwzględnienie mimośrodowego działania kratownic ściennych szkieletu na pierścienie i charakteryzuje się dużym zróżnicowaniem równań transformacyjnych. Jest to m.in. konsekwencją pominięcia odkształceń osiowych pierścieni w poziomach węzłów II i III. Ponadto jak wynika z planu przemieszczeń (rys. 13), zasięg wpływu przemieszczeń węzłów II jest bardzo duży, co dodatkowo prowadzi do złożonych wyrażeń na siły oddziaływania dodatkowych więzów odpowiadających tym węzłom.

Wariant drugi umożliwia wprawdzie uwzględnienie, dzięki wprowadzeniu w węzłach II kąta obrotu φ, wpływu mimośrodowego połączenia pierścieni ze szkieletem chłodni - jednak wariant ten, podobnie jak wariant trzeci, charakteryzuje się dużym zróżnicowaniem i złożonością równań transformacyj - nych.

W wariancie pierwszym przyjęcie we wszystkich węzłach jako niewiadomych jednego kąta poziomego obrotu i trzech przesunięć umożliwiło uwzględnienie odkształcalności osiowej wszystkich pierścieni w wyniku czego - kosztem zwiększenia liczby niewiadomych - otrzymano stosunkowo proste i mało zróżnicowane wyrażenia na siły oddziaływania dodatkowych więzów.

Dla kilku typowych chłodni szkieletowych obliczono liczby niewiadomych przemieszczeń odpowiadające rozpatrzonym wariantom rozwiązania. Dla 15-kondygnacyjnego szkieletu założonego na 12 boku, a więc wyjątkowo dużego obiektu, otrzymano dla wariantów 1, 2, i 3 odpowiednio: 552, 352 i 312 niewiadomych. Liczby te mogą być zmniejszone do ok. połowy, jeśli uwzględnić możliwość rozłożenia obciążenia wiatrem na układy symetryczny i antysymetryczny względem płaszczyzny prostopadłej do kierunku działania wiatru. Należy jednak zauważyć, że liczba niewiadomych otrzymana dla pierwszego wariantu jest możliwa do przyjęcia ze względu na objętość pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej Odra 1204 nawet bez rozkładania obciążenia na symetryczne i antysymetryczne.

W tej sytuacji zadecydowano, że podstawę rozwiązania w przemieszczeniach będzie stanowił, pomimo największej liczby niewiadomych, wariant pierwszy. O wyborze zadecydowały przede wszystkim dające się w sposób ogólny zapisać dla wszystkich węzłów proste wyrażenia na współczynniki przy niewiadomych. Umożliwia to nadanie algorytmowi rozwiązania zwartej i jednolitej formy, właściwej do opracowania programu na maszynę cyfrową.

Pełny algorytm rozwiązania jak i wyniki obliczeń konkretnych chłodni szkieletowych zostaną przedstawione w odrębnym artykule.

LITERATURA

[1] Andreé W.L.: Die Statik des Eisenbaues, Verlag Wittwer, 1922.
[2] Ledwoń J., Golczyk M.: Chłodnie kominowe i wentylatorowe, Arkady, Warszawa 1967.

МЕТОД УСИЛИЙ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
В СТАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ КАРКАСНЫХ ГРАДИРЕН

Р е з ю м е

Проведено сравнение решения методом усилий и методом деформаций каркасной градирни, нагруженной давлением ветра, при учёте совместной работы с пространственной решёткой системы промежуточных колец. Кроме того, представлено соответственно развернутое в виде матрицы решение методом усилий, притом подвергнуто анализу методом деформаций три варианта заместительной системы. Установлено, что наиболее рациональным вариантом является такой, который имеет следующие неизвестные: один угол горизонтального оборота и три перемещения узлов.

THE METHODS OF FORCES AND DISPLACEMENTS IN THE STATICAL
ANALYSIS OF FRAMEWORK COOLING TOWERS

S u m m a r y

In the paper a comparison between solution of the framework cooling tower by methods of forces and displacements has been presented. In solution was taken the influence of collaboration of intermediate rings with a space truss into account. Moreover an explicit solution by method of forces has been presented in matrix form. Three variants of the substitutional structure of displacement method have been also analysis. Variant, in which as unknowns were: one angle of the horizontal rotation and three displacements of knots, was selected as a rational one.