ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 85 Nr kol. 895

Jarosław Koczarski

Centralny Ośrodek Badań
i Rozwoju Techniki Kolejnictwa

ZAGADNIENIE WYZNACZANIA HARMONOGRAMU REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘCIA Z UWZGLĘDNIENIEM DOSTĘPNOŚCI ŚRODKÓW

Streszczenie. Realizacja złożonych przedsięwzięć wymaga koordynacji użycia środków technicznych, których ilość jest ograniczona i zmienna w czasie. W artykule przedstawiono matematyczny opis zjawisk i zależności charakteryzujących przedsięwzięcie, który może być podstawą do wyznaczania harmonogramów i ich optymalizacji.

1. Zastosowanie grafu do opisu przedsięwzięcia

W przedsięwzięciu można wyróżnić szereg ściśle określonych zadań indywidualnych, które nazwiemy operacjami. Ze względu na uwarunkowania technologiczne i organizacyjne poszczególne operacje są porządkowane relacjami poprzedzania. Jeżeli dany jest zbiór operacji w przedsięwzięciu oraz określone są relacje poprzedzania dla poszczególnych operacji, to przedsięwzięcie można przedstawić w formie grafu. Każdy łuk tego grafu reprezentuje operację, natomiast wierzchołki przedstawiają zdarzenia rozpoczęcia i zakończenia operacji. Wierzchołki grafu nazywane będą zdarzeniami w przedsięwzięciu.

Graf G przedstawimy jako trójkę uporządkowaną

$$G=\langle X,M,P\rangle \quad \text{przy czym}$$

$X=\{x(n);\ n=1,\dots,N\}$ - zbiór wierzchołków grafu /zbiór zdarzeń w przedsięwzięciu/

$M=\{m(k);\ k=1,\dots,K\}$ - zbiór łuków grafu /zbiór operacji/

P - relacja określona na iloczynie kartezjańskim $X\times M\times X$, spełniająca następujące warunki [1]:

a/ dla każdego łuku m istnieje taka para wierzchołków $x,y\in X$, że $\langle x,m,y\rangle\in P$

b/ jeżeli dla łuku m istnieją $\langle x,m,y\rangle\in P$ i $\langle v,m,z\rangle\in P$, to $x=v$ i $y=z$.

Tak sformułowane określenie grafu wskazuje, że do ilustracji przedsięwzięcia będziemy używali digrafu /grafu skierowanego/ bez pętli własnych, gdzie relacja P jest opisana w sposób następujący:

$$\text{jeżeli } x\neq y \wedge \langle x,m,y\rangle\in P \Rightarrow \langle y,m,x\rangle\notin P$$

W celu jednoznacznego scharakteryzowania relacji poprzedzania dla poszczególnych operacji /łuków/ i zdarzeń /wierzchołków/ przedsięwzięcia opiszemy graf $G=(X,M)$ binarną macierzą przejść

$$P^b(G)=\left[p(\mu,\nu)\right]_{N\times N}\quad ;\quad N=|X|$$

$\nu=1,\ldots,N$ - numer kolumny

$\mu=1,\ldots,N$ - numer wiersza

$p(\mu,\nu)\in\{0,1\}$

$p(\mu,\nu)=1$, gdy dla uporządkowanej pary wierzchołków (μ,ν), μ-ty jest poprzednikiem ν-tego, co zapiszemy $\mu=\Gamma^{-1}(\nu)$.

Zbiór poprzedników ν-tego wierzchołka przedstawimy:

$$\mathbb{\Gamma}^{-1}(\nu)=\left\{\mu:\mu=\Gamma^{-1}(\nu)\right\}\quad ;\qquad \mu=\Gamma^{-1}(\nu)\Leftrightarrow p(\mu,\nu)=1.$$

Zauważmy, że jedynki w μ-tym wierszu macierzy tworzą zbiór następników μ-tego wierzchołka, natomiast jedynki w ν-tej kolumnie tworzą zbiór poprzedników ν-tego wierzchołka.

Wierzchołki określające początek $x(1)$ i koniec $x(N)$ realizacji przedsięwzięcia opiszemy:

$$x(1)=\left\{\nu:\bigwedge_{\mu}p(\mu,\nu)=0\right\}$$

/jeżeli ν-ta kolumna macierzy zawiera same zera, to ν-ty wierzchołek jest początkowym w grafie G/

$$x(N)=\left\{\mu:\bigwedge_{\nu}p(\mu,\nu)=0\right\}$$

/jeżeli μ-ty wiersz zawiera same zera, to μ-ty wierzchołek jest końcowym w grafie G/.

2. Jakościowo-ilościowy opis realizacji przedsięwzięcia z uwzględnieniem dostępności środków

Wprowadzimy odwzorowanie zbioru operacji /zbioru łuków grafu/ M w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$ i utworzymy zbiór $K=\{1,\ldots,k,\ldots,K\}$, gdzie k jest numerem $m(k)$-tej operacji.

Każda operacja może być realizowana przy użyciu określonych typów środków należących do zbioru typów środków technicznych ponumerowanych zmienną s, przy tym $\mathcal{S}=\{1,\ldots,s,\ldots,S\}$ jest zbiorem numerów typów. Określimy, które typy środków o numerach ze zbioru $\mathcal{S}$ mogą być wykorzystane do realizacji operacji $m(k)$ o numerze k.

Przyjmiemy, że na iloczynie kartezjańskim $K\times\mathcal{S}$ zadane jest odwzorowanie r, które przeprowadza go na zbiór $\{0,1\}$. Gdy parze (k,s) odwzorowanie r przyporządkowuje 1, czyli $r(k,s)=1$, oznacza to, że do realizacji $m(k)$-tej operacji może być użyty środek s-tego typu. W przypadku gdy $r(k,s)=0$,

oznacza to, że środek oznaczony numerem s jest nieprzydatny w realizacji m(k)-tej operacji.
Operację o numerze k możemy więc opisać wektorem

$$r(k)= \langle r(k,1),\dots,r(k,s),\dots,r(k,S)\rangle \quad ; \ r(k,s)\in \{0,1\}$$

Założymy, że realizacja m(k)-tej operacji jest możliwa przy wykorzystaniu różnych, alternatywnych zestawów typów środków. Zestawy te ponumerujemy zmienną a, przy tym $A =\{1,\dots,a,\dots,A\}$ jest zbiorem numerów zestawów.
Wprowadzimy wektor

$$r(k,a)= \langle r(k,1,a),\dots,r(k,s,a),\dots,r(k,S,a)\rangle,$$

w którym $r(k,s,a)\in \{0,1\}$.
Gdy $r(k,s,a)=1$, oznacza to, że w skład zestawu typów środków o numerze a, umożliwiającego realizację m(k)-tej operacji, wchodzi środek techniczny o numerze s. Natomiast, jeśli $r(k,s,a)=0$, oznacza to, że a-ty zestaw środków, przy pomocy którego m(k)-ta operacja może zostać zrealizowana, nie zawiera środka o numerze s.
Założymy, że środki techniczne niezbędne do realizacji przedsięwzięcia nie są dostępne w sposób nieograniczony tak pod względem ich ilości, jak i typów. Przyjmiemy więc, że dostępność poszczególnych typów środków zmienia się w czasie.
Wprowadzimy do rozważań pojęcie obserwowanego okresu czasu. Jest to okres czasu, w którym planujemy zrealizować przedsięwzięcie a jego długość jest wystarczająca do objęcia każdego możliwego do przyjęcia czasu trwania tej realizacji.
Obserwowany okres czasu podzielimy na przedziały czasu o jednostkowej długości i utworzymy zbiór numerów przedziałów czasu.

$$\Phi = \{1,\dots,\varphi,\dots,\Phi\}$$

gdzie φ jest numerem przedziału czasu o jednostkowej długości.
Założymy, że na iloczynie kartezjańskim $S\times\Phi$ określone jest odwzorowanie z przeprowadzające go na zbiór $\{0,1\}$. Gdy parze (s,φ) odwzorowanie przyporządkowuje 1, czyli $z(s,\varphi)=1$, oznacza to, że w jednostkowym przedziale czasu o numerze φ środek o numerze s jest dostępny. Jeśli natomiast $z(s,\varphi)=0$, oznacza to, że w φ-tym przedziale czasu nie dysponujemy środkiem technicznym o numerze s.
Dostępność jakościową a więc określenie, w których przedziałach czasu tworzących obserwowany okres czasu dysponujemy środkiem o numerze s,

opiszemy wektorem

$$z(s)=\langle z(s,1),\dots,z(s,\varphi),\dots,z(s,\Phi)\rangle;\quad \text{gdzie } z(s,\varphi)\in\{0,1\}$$

Ponieważ -jak wspomniano wyżej- zakładamy, że dostępność środków zmienia się w czasie tak pod względem jakości, jak i ilości, wprowadzimy odwzorowanie d przeprowadzające iloczyn kartezjański $\mathcal{S}\times\Phi$ na zbiór $\mathcal{R}^+$. Wielkość $d(s,\varphi)$ będziemy interpretować jako ilość jednostek środka typu s pozostających do dyspozycji realizatorów przedsięwzięcia w jednostkowym przedziale czasu o numerze φ. Dostępność ilościową, a więc określenie jaką ilością jednostek środka typu s dysponujemy w poszczególnych przedziałach czasu tworzących obserwowany okres czasu opiszemy wektorem

$$d(s)=\langle d(s,1),\dots,d(s,\varphi),\dots,d(s,\Phi)\rangle$$

Zauważmy przy tym, że zachodzi oczywista zależność:

$$d(s,\varphi)=0\Rightarrow z(s,\varphi)=0$$

$$d(s,\varphi)>0\Rightarrow z(s,\varphi)=1$$

Wprowadziliśmy wyżej wektor $r(k,a)$, określający, który z typów środków jest używany, gdy $m(k)$ -ta operacja jest realizowana za pomocą zestawu typów środków o numerze a.

Ponieważ realizacja $m(k)$ -tej operacji odbywać się może ściśle określonym nie tylko jakościowo ale także ilościowo zestawem środków technicznych wprowadzimy zbiór $\mathbb{L}\subset\mathcal{N}$ $(\mathbb{L}=\{l: l=1,\dots,L\})$, którego elementy określają numer odmiany ilościowej a-tego zestawu typów środków. Zakładamy więc, że a-ty zestaw typów środków może występować w wielu odmianach /oznaczonych numerami od 1 do L/, z których każda zawiera inne ilości środków należących do tego zestawu. Oczywiście każdy typ środka wchodzący w skład a-tego zestawu występuje także w każdej odmianie tego zestawu w ilości co najmniej jednej jednostki.

Wprowadzimy odwzorowanie u przeprowadzające iloczyn kartezjański $\mathbb{K}\times\mathcal{S}\times\mathbb{A}\times\mathbb{L}$ w zbiór $\mathcal{R}^+$. Wielkość $u(k,s,a,l)$ oznaczać będzie ilość jednostek środka typu s użytego do realizacji $m(k)$-tej operacji zgodnie z l-tą odmianą ilościową a-tego zestawu typów środków opisanego wektorem $r(k,a)$. Wektor

$$u(k,a,l)=\langle u(k,1,a,l),\dots,u(k,s,a,l),\dots,u(k,S,a,l)\rangle$$

określi ilości poszczególnych typów środków użytych do realizacji $m(k)$-tej operacji l-tą odmianą a-tego zestawu typów środków.

Jak wspomniano wyżej, operacja $m(k)$ może być realizowana przy wykorzystaniu różnych alternatywnych zestawów typów środków ponumerowanych zmienną $a\in\mathbb{A}$, a ponadto każdy a-ty zestaw może występować w wielu odmianach

ilościowych oznaczonych numerem $l \in L$.
Utworzymy iloczyn kartezjański $L \times A$ i za pomocą odwzorowania i przeprowadzimy go na zbiór $\mathcal{N}$. Każdą parę (l,a) oznaczającą l-tą odmianę ilościową a-tego zestawu typów środków użytych do realizacji $m(k)$-tej operacji ponumerujemy zmienną i. Nazwiemy ją i-tym wariantem realizacji operacji. Dla każdej operacji $m(k)$ utworzymy zbiór $\mathbb{J}(k)$ wariantów jej realizacji

$$i(k) \in \mathbb{J}(k) \subset \mathcal{N} \quad (i=1,\ldots,I)$$

Za pomocą wektora

$$u(k,i) = \langle u(k,1,i),\ldots,u(k,s,i),\ldots,u(k,S,i) \rangle$$

określimy, jakie ilości poszczególnych typów środków są niezbędne do realizacji $m(k)$-tej operacji i-tym wariantem.

3. Harmonogram realizacji przedsięwzięcia

Aby umożliwić czasowy opis realizacji przedsięwzięcia oraz poszczególnych operacji oznaczymy:

$\varphi'(k,i)$ – numer przedziału, w którym rozpoczyna się realizacja $m(k)$-tej operacji i-tym wariantem,

$\varphi''(k,i)$ – numer przedziału, w którym kończy się realizacja $m(k)$-tej operacji i-tym wariantem.

Przyporządkowując każdemu przedziałowi czasu $\varphi \in \Phi$ jednostkową długość η otrzymamy:

- moment rozpoczęcia realizacji $m(k)$-tej operacji i-tym wariantem

$$t'(k,i) = [\varphi'(k,i) - 1] \cdot \eta$$

- moment zakończenia realizacji $m(k)$-tej operacji i-tym wariantem

$$t''(k,i) = \varphi''(k,i) \cdot \eta$$

Powiemy, że znany jest harmonogram realizacji $m(k)$-tej operacji, jeśli znane są wielkości $t'(k,i)$ i $u(k,i)$.
Podobnie jak w [2] harmonogram realizacji przedsięwzięcia określimy jako uporządkowaną parę $(\mathbb{t}',\mathbb{U})$ i oznaczymy $H=(\mathbb{t}',\mathbb{U})$, przy czym:

$\mathbb{t}' = \{ t'(k,i) : k \in K;\ i \in \mathbb{J}(k) \}$ – jest zbiorem momentów rozpoczęcia realizacji poszczególnych operacji odpowiednimi wariantami

$\mathbb{U} = \{ u(k,i) : k \in K;\ i \in \mathbb{J}(k) \}$ – jest zbiorem wektorów określających ilości poszczególnych typów środków niezbędnych do realizacji poszczególnych operacji odpowiednimi wariantami.

Przyjęta definicja harmonogramu realizacji przedsięwzięcia jak również przedstawienie przedsięwzięcia jako uporządkowanego zbioru operacji zobrazowanego grafem wskazuje na fakt,że wielkości opisane zbiorami $\mathfrak{U}'$ i $\mathfrak{U}$ nie mogą przyjmować wartości dowolnych.

W pracy [2] przedstawiono trzy ograniczenia warunkujące istnienie harmonogramu dopuszczalnego.Ograniczenia te można scharakteryzować następująco:

1/ dla każdej operacji m(k) można określić takie operacje m(l),które należy wykonać przed rozpoczęciem realizacji operacji m(k).Rozpoczęcie m(k)-tej operacji może więc nastąpić nie wcześniej niż w momencie zakończenia realizacji ostatniej z poprzedzających ją operacji m(l);

2/ żaden z egzemplarzy środka o numerze $s \in \mathcal{S}$ nie może być użyty jednocześnie do realizacji dwóch /kilku/ różnych operacji;

3/ wszystkie operacje wchodzące w skład przedsięwzięcia muszą zostać zrealizowane.

We wspomnianej pracy sformułowano i udowodniono twierdzenie,że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia harmonogramu realizacji przedsięwzięcia jest jednoczesne spełnienie warunków zasygnalizowanych wyżej. Ponieważ jednak w rozpatrywanym przez nas zagadnieniu zakładamy,że dostępność środków w czasie realizacji przedsięwzięcia ulega zmianom, do przedstawionych trzech warunków ograniczających musimy dodać warunek czwarty,że dobór wariantów realizacji poszczególnych operacji w konkretnym jednostkowym przedziale czasu musi uwzględniać ilość środków dostępnych w tym przedziale czasu.Inaczej mówiąc, ilość środków s-tego typu używanych w jednostkowym przedziale czasu o numerze φ /przy realizacji różnych operacji/ nie może przekraczać ilości, jaka jest w tym przedziale czasu do dyspozycji.

4. Wyznaczanie harmonogramu realizacji przedsięwzięcia

Podejmując decyzję wyboru harmonogramu należy uwzględnić przedstawione wyżej ograniczenia podstawowe jak również szereg ograniczeń dodatkowych charakterystycznych dla konkretnego rodzaju przedsięwzięcia.Zwykle przy danych warunkach ograniczających istnieje wiele decyzji dopuszczalnych i zachodzi konieczność wyboru decyzji najlepszej - optymalnej. Niezbędne staje się wprowadzenie kryterium rozstrzygającego, która z decyzji dopuszczalnych jest decyzją optymalną.Na zbiorze decyzji dopuszczalnych należy więc określić funkcję celu,która będzie minimalizowana lub maksymalizowana.

Załóżymy, że na iloczynie kartezjańskim $K \times \mathfrak{I}(k) \times \Phi$ zadane jest odwzorowanie x, które przeprowadza go na zbiór $\{0,1\}$. W przypadku gdy trójce (k,i,φ) odwzorowanie* przyporządkuje 1, tzn. gdy $x(k,i,\varphi)=0$, to w φ-tym przedziale czasu m(k)-ta operacja realizowana jest i-tym wariantem.
W przypadku gdy $x(k,i,\varphi)=0$, to w φ-tym przedziale czasu m(k)-ta operacja nie jest realizowana i-tym wariantem.
Wielkość $x(k,i,\varphi)$ nazwiemy zmienną decyzyjną.
Odwzorowując wszystkie elementy iloczynu kartezjańskiego $K \times \mathfrak{I}(k) \times \Phi$ w zbiór $\{0,1\}$ zgodnie z istniejącymi warunkami ograniczającymi otrzymamy zbiór przyporządkowań dopuszczalnych, które po optymalizacji pozwolą określić najlepszy z punktu widzenia przyjętego kryterium harmonogram realizacji przedsięwzięcia.

LITERATURA

[1] Korzan B.: Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania. WNT, Warszawa 1978.
[2] Ambroziak T.: Optymalizacja harmonogramów realizacji przedsięwzięć przedstawionych grafem. Rozprawa doktorska. Warszawa 1978.
[3] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Badania operacyjne dla informatyków. WNT, Warszawa 1983.

Recenzent: Prof.dr Tadeusz Puchałka
Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ С УЧЁТОМ ВРЕМЕННОЙ ДОСТУПНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

Р е з ю м е

Реализация сложных задач требует координации употребления технических средств, которых количество ограничено во времени. В статье дано математическое описание зависимостей характеризующих комплекс операций. Описание это может быть исходной точкой для определения календарных планов и их оптимизации.

THE PROBLEM OF SCHEDULES CALCULATION OF ENTERPRISES REALIZATION WITH ALLOWING FOR EQUIPMENTS ACCESSIBILITY

S u m m a r y

In this paper a problem of the schedule calculation is described when the accessibility of necessary equipments is variable in time. This situation occurs for example when basing on the finite set of equipments a few

enterprises at the same time are realized.

It is assumed that the enterprice consists of finite number of exatly specified tasks called the operations. The set of operations with the ordering relations of preceedence enables description of the enterprise by means of the digraph without the loops. This paper contains a mathematical description of the dependences which are characteristic for enterprice and a definition of the occurence time period in which accessibility of the respective equipments type is altered discretely. Here the variant methods of operation realization are proposed and a mathematical definition of the schedule of enterprices realization in limited equipments accessibility circumstances.