

Wilfried Sauer

Technische Universität Dresden, DDR

#### MODELLIERUNG DISKRETER FERTIGUNGSPROZESSE MITTELS ERZEUGNISFLUSSGRAPHEN

**Zusammenfassung:** In dem Beitrag wird die Theorie der Flußgraphen auf diskrete Fertigungsprozesse angewendet. Insbesondere in der elektronischen Industrie existieren in der Struktur des Erzeugnisflußgraphen zahlreiche Schleifen, bedingt durch Prüfprozesse. Durch die Anwendung von Operatoren entsteht ein einfaches Mittel zur Berechnung des Zeit- und Qualitätsverhaltens, wobei insbesondere im zweidimensionalen Fall ein neuartiges Additionstheorem für Regressionsgleichungen hergeleitet wird.

### 1. Der Erzeugnisfluß

In diskreten Fertigungsprozessen (Stückgutprozesse) ist ein Fluß zu beobachten, der Erzeugnisfluß genannt werden soll. Das Wort Erzeugnis steht verallgemeinert für den Arbeitsgegenstand, d.h. beispielsweise für Teil, Bauelement, Baugruppe, Gerät. Dieser Fluß hat einen Zahlenwert, eine Maßeinheit und eine Richtung; somit existiert eine Erzeugnisflußstärke eine Erzeugnisflußstärke oder Erzeugnisstromstärke  $I$ . Sie wird auch Intensität, Durchsatz, Ausstoß, Produktivität, mitunter auch "Leistung" genannt. Die Maßeinheit ist i.allg. Stück pro Stunde (manchmal auch Stück pro Minute). Der Erzeugnisfluß kann sich aufspalten. Dabei muß für  $I$  der "Erhaltungssatz für Erzeugnisse" gelten, da innerhalb der Fertigungsprozesse die Erzeugnisse nicht verlorengehen bzw. entstehen, d.h. reine Quellen bzw. reine Senken werden als Eingänge bzw. Ausgänge angesehen. Bei Montageprozessen wird somit davon ausgegangen, daß ein "Basiserzeugnis" existiert, worauf ein Montageteil zu befestigen ist. Dieses "Basiserzeugnis" wird von Schritt zu Schritt kompletter und fließt von Station zu Station. Die zu montierenden Teile werden als zur Station gehörend betrachtet (was ja auch oft durch Magazine u.ä. realisiert wird), anderenfalls müssen 2 oder mehr Prozesse getrennt untersucht werden (z.B. Statorfertigung und Rotorfertigung im Elektromotorenbau). Mit diesen Überlegungen lassen sich alle diskreten Fertigungsprozesse nach einheitlichen Gesichtspunkten analysieren, d.h.

z.B. auch Prozesse der Demontage.

## 2. Die Elementeklassen diskreter Fertigungsprozesse

Nach der Art der Zustandsänderung der Erzeugnisse lassen sich 8 Klassen von Elementen diskreter Fertigungsprozesse unterscheiden. Jedes dieser Prozeßelemente PE ist als Maschine, Ausrüstung, Aggregat usw. realisierbar und wird verallgemeinert als "Station" bezeichnet. Stationen werden gegenwärtig immer mehr durch Mikrorechner kontrollier- und steuerbar, sie bestehen im technologischen Sinne gewissermaßen aus Hard- und Software. Sie sind in der Lage, mittels verschiedener Programme unterschiedliche Aufgaben zu lösen; die 8 Klassen der Elemente sind:

### 1). Bearbeitung

Hierzu zählen Bohren, Drehen, Stanzen, Biegen, Abschneiden usw.

### 2). Montage

Hierzu zählen Schweißen, Löten, Verschrauben, Verdrahten, Bestücken, Bonden, Verkepseln u.a.

Bearbeitung und Montage sind die Hauptelemente der Fertigungsprozesse,

### 3). Demontage

Hierzu zählt z.B. Auslöten von Bauelementen (die defekt sind). Die Demontage ist i. allg. bei Reparatur- und Fehlerbeseitigungsprozessen nötig.

### 4). Prüfung

Hierbei wird die Erzeugnisqualität ermittelt. Auch Abgleich- und Justageprozesse können zu den Prüfprozessen gezählt werden. Prüfprozesse beinhalten oftmals Sortierprozesse, so daß im Sinne des Erzeugnisflusses bei Prüfprozessen mindestens 2 Ausgänge existieren. Prüfstationen stellen Informationsquellen über die Erzeugnisqualität dar.

### 5). Fehlerbeseitigung

Sie wird auch Reparatur (einschließlich Fehlerlokalisierung) genannt und schließt sich an einen Prüfprozeß an. Oftmals ist im Anschluß an die Fehlerbeseitigung eine erneute Prüfung erforderlich.

### 6). Handhabung

Dazu zählen Zuführen, Einlegen, Beschicken, Drehen, Wenden, Heben, Senken, Entnehmen, Ablegen, Positionieren, Sortieren u.a.

Handhabeprozesse vollziehen keine echte Zustandsänderung der Erzeugnisse, sind jedoch bei der Durchführung aller anderen Prozesse erforderlich (zur Lage- und Ortsveränderung der Erzeugnisse).

Flexible Handhabestationen werden oftmals in andere Prozesse integriert und als Industrieroboter realisiert.

### 7). Transport

Wenn 2 Stationen, die technologisch aufeinanderfolgende Prozesse realisieren, räumlich soweit auseinander entfernt sind, daß der Erzeugnisfluß durch Handhabung nicht möglich ist, so muß ein Transportprozeß zwischengeschaltet werden.

Neben den Transportmitteln ("Transportstationen") existieren oftmals auch Transporthilfsmittel wie Rahmen, Kisten, Magazine, Kassetten, Paletten, Container u.a.. Auch Transportprozesse vollziehen keine echte Zustandsänderung.

### 8). Lagerung der Erzeugnisse

Dazu zählt auch Speicherung und Pufferung. Jedes der 7 Klassen besitzt theoretisch die Möglichkeit für eine Lagerung der Erzeugnisse am Eingang und am Ausgang (bezüglich des Erzeugnisflusses).

Das Eingangslager ist die potentielle Quelle und das Ausgangslager die potentielle Senke für den Prozeß.

Bei der Prozeßkopplung stellt die Quelle die Senke für den vorhergehenden Prozeß dar und die Senke wird zur Quelle für den nachfolgenden Prozeß. Bei Kopplung werden die Lager zu Zwischenlagern.

Gesamte Fertigungsprozesse bestehen aus einer Menge von Prozeßelementen (i.allg. aus allen 8 Klassen) und einer Kopplungsstruktur bezüglich des Erzeugnisflusses. Damit besitzen Fertigungsprozesse einen ausgeprägten Systemcharakter.

### 3. Der Erzeugnisflußgraph diskreter Fertigungsprozesse

Stellt man die Lagerung durch Knoten und alle anderen Prozesse durch Pfeile dar, so erhält man einen den Fertigungsprozeß charakterisierenden gerichteten Graphen auf der Basis des Erzeugnisflusses, der Erzeugnisflußgraph genannt werden soll. Man geht dabei von der Vorstellung aus, daß die Erzeugnisse durch alle Stationen fließen (außer im Falle der Lagerung); ihr "Verweilen" in den Stationen wird indirekt durch die Intensität erfaßt. In den Knoten bleibt das Verweilen unberücksichtigt.

Es wird damit vorerst folgende Modellvorstellung zugrundegelegt:

Im Lager sind ständig Erzeugnisse vorhanden, so daß der nachfolgende Prozeß keine Stillstandszeiten aufweist.

Entlang eines Weges addieren sich folglich die "Verweil"-dauern für die einzelnen Prozeßelemente.

Ordnet man nun jedem Lager einen Knoten und allen anderen Elementen einen Pfeil zu, so ergibt sich der Erzeugnisflußgraph als ~~Karte~~ von

Elementen E und Menge von Lagern  $L_m$ . Ein Beispiel für einen Erzeugnisflußgraph zeigt Bild 1.

#### 4. Operator von Prozebelementen

Jedes Prozebelement E ist charakterisierbar durch eine Prozeßdauer T, die i. allg. eine Zufallsgröße mit der Dichte  $f(t)$  ist. Für praktische Untersuchungen interessiert der Erwartungswert der Dauer  $\mu$

$$\mu = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) dt \quad (1)$$

als "mittlere Dauer" und die Streuung der Dauer  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} (t - \mu)^2 f(t) dt. \quad (2)$$

Darüberhinaus existiert für jedes Element E eine sog. Realisierungswahrscheinlichkeit w. Das ist praktisch der relative Anteil der Erzeugnisse, die das Prozebelement durchfließen. Die Summe aller Realisierungswahrscheinlichkeiten für Pfeile, die von einem Knoten weggehen, ist stets gleich 1 (Erzeugnis-Erhaltungssatz).

Man bildet eine Gewichtsfunktion  $g(t)$

$$g(t) = w \cdot f(t) \quad (3)$$

und erhält daraus durch Laplace-Transformation die Übertragungsfunktion  $G(p)$

$$G(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (4)$$

$G(p)$  heißt auch Operator des Prozebelementes.

Mittels Grenzwertsätze der Laplace-Transformation [1, 2] erhält man leicht aus Gl.(4) mit Gl.(3).

$$w = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = G(0) \quad (5)$$

und ebenso durch Differentiation aus Gl.(4) nach p

$$\mu = -\frac{1}{w} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{dG(p)}{dp} \right\} = -\frac{G'(0)}{G(0)} \quad (6)$$

sowie

$$\sigma^2 = \left( \frac{G'(0)}{G(0)} \right)' = \frac{G''(0)}{G(0)} - \left( \frac{G'(0)}{G(0)} \right)^2 \quad (7)$$

Desgl. erhält man entsprechende Beziehungen für weitere Momente.

### 5. Gesamtoperator

Da in diskreten Produktionsprozessen auch Verzweigungen möglich sind, existieren neben den Kettenstrukturen auch Parallel- und Rückführstrukturen.

Mit den Methoden der Flußgraphentheorie [3] bzw. durch eine sog. symbolische Methode ist der Gesamtoperator ( $G_{ges}(\rho)$ ) als Funktion der Elementoperatoren  $G_n(\rho)$  angebar. Die Strukturen sind i.allg. gemischter Art, und der Gesamtoperator ist eine gebrochen rationale Funktion der Einzeloperatoren

$$G_{ges}(\rho) = R \left\{ G_1(\rho), G_2(\rho), \dots, G_n(\rho), \dots, G_N(\rho) \right\} \quad (8)$$

Durch Grenzwertbildung folgt daraus mit Gl.(5)

$$w_{ges} = R \left\{ w_1, w_2, \dots, w_n, \dots, w_N \right\} \quad (9)$$

d.h. für  $w_{ges}$  erhält man den gleichen funktionellen Aufbau wie für den Operator  $G_{ges}$ .

Bei Anwendung der totalen Differentiation folgt aus Gl.(8) mit Anwendung von Gl.(6) und Gl.(9)

$$\mu_{ges} = \sum_{n=1}^N c_n \cdot \mu_n \quad (10)$$

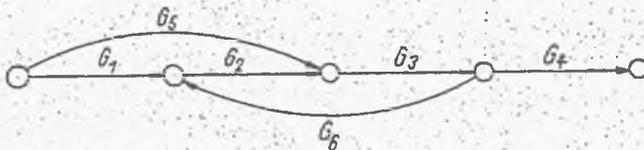
mit den Intensitätskoeffizienten  $c_n$

$$c_n = \frac{w_n}{w_{ges}} \cdot \frac{\partial w_{ges}}{\partial w_n} \quad (11)$$

Gl.(10) ist bemerkenswert, da man zur Berechnung der mittleren Gesamtdauer für beliebige Fertigungsstrukturen lediglich die Einzeldauern und deren Intensitäts-Koeffizienten als "Gewichte" benötigt, wobei in die Intensitätskoeffizienten nur die Realisierungswahrscheinlichkeiten eingehen. Mit anderen Worten: zur Berechnung der mittleren Durchlaufzeit von Erzeugnissen in beliebigen Fertigungsstrukturen ist die genaue Kenntnis der Verteilungsfunktionen nicht erforderlich.

An einem einfachen Beispiel soll die Anwendung der Erzeugnisflußgraphen zur Berechnung der mittleren Dauer gezeigt werden:

Aus der Analyse eines Fertigungsprozesses erhält man den im Bild 1 gezeigten Erzeugnisflußgraphen.



Man berechnet leicht

$$G_{ges} = \frac{(G_1 \cdot G_2 + G_5) \cdot G_3 \cdot G_4}{1 - G_2 \cdot G_3 \cdot G_6} \quad (12)$$

Vereinfacht wurde dabei geschrieben:  $G_n(p) = G_n$

Damit ist

$$W_{ges} = \frac{(w_1 \cdot w_2 + w_5) \cdot w_3 \cdot w_4}{1 - w_2 \cdot w_3 \cdot w_6} \quad (13)$$

Aus dem Erhaltungssatz folgt (siehe Bild 1)

$$\begin{aligned} w_1 + w_5 &= 1 \\ w_2 &= 1 \\ w_3 &= 1 \\ w_4 + w_6 &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

(Setzt man Gl.(14) in Gl.(13) ein, so muß für ein abgeschlossenes System auch  $w_{ges} = 1$  als Probe erfüllt sein).

Mit Anwendung von Gl.(11) auf Gl.(13) erhält man

$$\mu_{ges} = w_1 \mu_1 + \left( w_1 + \frac{w_6}{1 - w_6} \right) \mu_2 + \frac{1}{1 - w_6} \cdot \mu_3 + \mu_4 + w_5 \mu_5 + \frac{w_6}{1 - w_6} \mu_6 \quad (15)$$

Durch die quantitative Analyse erhält man

$w_5 = 0,6$  und  $w_6 = 0,2$ . Die Prozesse  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  und  $P_5$  stellen Montageprozesse dar, während  $P_3$  ein Prüfprozeß und  $P_6$  ein Demontage-Reparaturprozeß ist. Dann konkretisiert sich Gl.(15) mit Gl.(14).

$$\mu_{ges} = 0,4 \mu_1 + 0,65 \mu_2 + 1,25 \mu_3 + \mu_4 + 0,6 \mu_5 + 0,25 \mu_6 \quad (16)$$

Die Intensitätskoeffizienten lassen sich wie folgt interpretieren:

Werden beispielsweise insgesamt 1000 Stück Erzeugnisse produziert, so durchlaufen den Prozeß  $P_1$  (im Mittel) 400 Stück, den Prozeß  $P_2$  (im Mittel) 650 Stück, den Prozeß  $P_3$  (im Mittel) 1250 Stück, usw.

Der Prozeß  $P_3$  ist damit am stärksten belastet, weil die defekten Erzeugnisse nach der Reparatur ( $P_6$ ) noch einmal geprüft werden.

Der nächste Schritt der Prozeßanalyse ergibt die Mittelwerte für die Dauern, z.B.:

$$\mu_1=11, \mu_2=6, \mu_3=4, \mu_4=3, \mu_5=5, \mu_6=4.$$

Damit ergibt sich für die Gesamtdurchlaufzeit (Gl.16)  $\mu_{ges} = 20,3$  Min.

## 6. Intensität

Als mittlere Intensität  $I$  wird die Anzahl der Erzeugnisse je Stunde bezeichnet; sie berechnet sich zu

$$I_n = \frac{1}{\mu_n} \quad (17)$$

Diese Intensität soll jedoch als Grenzintensität bezeichnet werden, da in Prozessen stets eine kleinere (mittlere) Intensität als die Grenzintensität auftreten kann und damit Intensitätsreserven auftreten.

Da die Intensitätskoeffizienten  $c_n$  die Struktur des Gesamtprozesses berücksichtigen, verändert sich die auf den Gesamtprozeß bezogene Grenzintensität auf

$$I'_n = \frac{1}{c_n \cdot \mu_n} \quad (18)$$

Die Prozesse heißen abgeglichen, wenn gilt

$$c_1 \cdot \mu_1 = c_2 \cdot \mu_2 = c_3 \cdot \mu_3 = \dots \quad (19)$$

Im allgemeinen sind Fertigungsprozesse nicht abgleichbar.

Die Intensität des Gesamtprozesses ist

$$I_{ges} = \min_n \left\{ \frac{1}{c_n \cdot \mu_n} \right\} \quad (20)$$

Der Prozeß  $P_k$ , wo dieses Minimum auftritt, heißt Nadelöhr-Prozeß. Alle anderen Prozesse haben Reserven.

Im Beispiel von Abschnitt 5 erhält man:

$$I_1' = 13,6 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}} ; I_2' = 15,4 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}} ; I_3' = 12 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}} ; I_4' = 20 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}} ;$$

$$I_5' = 20 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}} ; I_6' = 60 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}}.$$

Damit ist

$$I_{ges} = 12 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}}$$

Durch die Rationalisierung vom Typ 1 lassen sich Prozesse mit großer Reserve zusammenfassen. Bei einer manuellen Montage lassen sich z.B. die Prozesse  $P_4$  und  $P_6$  von einer Person realisieren. (Einsparung von Arbeitskräften).

Dann ergibt sich

$$I'_{4;6} = \frac{1}{c_4 \mu_4 + c_6 \mu_6} = 15 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}}$$

Dabei wird die Gesamtintensität nicht verringert.

Die Rationalisierung vom Typ 2 läßt die Anzahl der Arbeitskräfte konstant und bringt eine Erhöhung der Gesamtintensität durch Parallelität. Dabei geht man stets vom Nadelöhr aus und nimmt einen weiteren, mit hoher Reserve behafteten Prozeß hinzu, z.B. faßt man  $P_3$  und  $P_5$  zusammen; dann gilt (für 2 Arbeitskräfte)

$$I'_{3;5} = \frac{2}{c_3 \mu_3 + c_5 \mu_5} = 15 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}}$$

Das neue Nadelöhr ist dann  $P_1$  und wir erreichen in diesem Fall als Gesamtintensität

$$I_{ges} = 13,6 \frac{\text{Stück}}{\text{Stunde}}$$

Natürlich müssen beide Arbeitskräfte die gleichen Operationen verrichten, dadurch sind Werkzeuge u.ä. mitunter doppelt erforderlich.

Eine dritte Form der Rationalisierung ist die Steigerung von  $I'_K$ , d.h. der Intensität des Nadelöhr-Prozesses. Damit steigt auch die Gesamtintensität, bis ein neuer Nadelöhrprozeß entsteht und ein weiteres Steigen der Gesamtintensität begrenzt. Nur muß dieses neue Nadelöhr in seiner Intensität gesteigert werden, usw.

Damit liegt eine Rationalisierungsstrategie vor, die in der Praxis von großer Bedeutung ist.

#### 7. Weitere Berechnungen

Aus Gl.(8) bzw. Gl.(9) läßt sich mit Gl.(7) auch eine Berechnungsvorschrift für die Streuung angeben

$$\sigma_{ges}^2 + \mu_{ges}^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N d_{mn} \mu_m \mu_n + \sum_{n=1}^N c_n (\sigma_n^2 + \mu_n^2)$$

$$d_{mn} = \frac{w_m \cdot w_n}{w_{ges}} \cdot \frac{\partial^2 G_{ges}(p)}{\partial \sigma_m(p) \cdot \partial \sigma_n(p)} \Big|_{p=0} \quad (21)$$

Natürlich lassen sich auch höhere Momente berechnen.

### 8. Zusammenhänge für zweidimensionale Zufallsgrößen in diskreten Prozessen

Die hergeleiteten Zusammenhänge lassen sich in einfacher Weise auf zweidimensionale Zufallsgrößen  $(X, Y)$  mit der Dichte  $f(x, y)$  übertragen. Auch hier läßt sich die (zweidimensionale) Gewichtsfunktion

$$g(x, y) = w \cdot f(x, y) \quad (22)$$

bilden und damit für jedes Prozebelement der Operator

$$\begin{aligned} G(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot e^{-px} \cdot e^{-qy} dx dy \\ &= L_p L_q \{g(x, y)\} \end{aligned} \quad (23)$$

als zweidimensionale Laplace-Transformierte.

Für die Randdichte

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (24)$$

gelten dann sämtliche in den vorangegangenen Kapiteln hergeleiteten Zusammenhänge. Ebenso lassen sich die Beziehungen für die andere Randdichte

$$f_x(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (25)$$

angeben. Im Grunde genommen sind damit keine neuartigen Aussagen entstanden.

Interessant werden die Zusammenhänge jedoch für die Regression

$$E \{y | X = x\} = \mu_y(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dy}{f_y(x)} \quad (26)$$

Die Regression ist ja die eigentlich interessierende Gleichung für den Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  in der Praxis. Sie gibt an, wie sich im Mittel der Wert für  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  verhält. Zum Beispiel: wie hängt in der Elektronik beim Beschichten von Substraten (zur Herstellung von Ohmschen Widerständen) die Schichtdicke (oder deren elektrischer Parameter) von der Beschichtungsdauer ab.

Kennt man nun die einzelnen Regressionen  $\mu_y(x)_1, \mu_y(x)_2, \dots$  der Prozebelemente, so läßt sich die resultierende Regression für den Gesamtprozeß bei Kenntnis des Gesamtoperators berechnen. Das soll im folgenden gezeigt werden.

Entsprechend Gl.(8) gilt für den zweidimensionalen Fall

$$G_{ges}(p, q) = R \left\{ G_1(p, q), G_2(p, q), \dots \right\} . \quad (27)$$

Mit Gl.(23) erhält man durch die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation aus Gl.(26)

$$\mu_y(x) = - \frac{\mathcal{L}_p^{-1} \left\{ \frac{\partial G(p, q)}{\partial q} \right\}}{\mathcal{L}_p^{-1} \left\{ G(p, q) \right\}} \Bigg|_{q=0} . \quad (28)$$

Durch Umformen entsteht daraus

$$\mu_y(x)_{ges} = \frac{1}{f_y(x)_{ges}} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_p^{-1} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} \right\} * [f_y(x)_n \cdot \mu_y(x)_n] \Bigg|_{q=0} . \quad (29)$$

Das ist eine bemerkenswerte Gleichung, aus der sich für einfache Fälle leicht handhabbare Zusammenhänge herleiten lassen.

### 9. Additionstheorem für Regressionsfunktionen

Der einfachste Fall für ein System mit 2 Elementen ist die Kettenstruktur, d.h.

$$G_{ges}(p, q) = G_1(p, q) \cdot G_2(p, q) . \quad (30)$$

Dabei werden die Komponenten der Zufallsgrößen jeweils für sich addiert

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{ges} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_2 . \quad (31)$$

Das gleiche gilt für sämtliche Momente, d.h.

$$\begin{aligned} \mu_{x_{ges}} &= \mu_{x_1} + \mu_{x_2} \\ \mu_{y_{ges}} &= \mu_{y_1} + \mu_{y_2} \\ \sigma_{x_{ges}}^2 &= \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 \\ \sigma_{y_{ges}}^2 &= \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2 \\ \sigma_{xy_{ges}} &= \sigma_{xy_1} + \sigma_{xy_2} . \end{aligned} \quad (32)$$

Der Beweis ist recht einfach, er kann aber auch jedem Lehrbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen werden.

Nun sind die für die Prozeßanalyse wichtigsten Beziehungen, nämlich die Regressionsgleichungen leicht aus der jeweiligen zweidimensionalen Dichte  $f_1(x, y)$  bzw.  $f_2(x, y)$  herleitbar ( $w_1 = w_2 = 1$ )

$$\mu_y(x)_1 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_1(x, y) dy}{f_y(x)_1}$$

$$\mu_y(x)_2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(x, y) dy}{f_y(x)_2} \quad (33)$$

mit den Randdichten

$$f_y(x)_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, y) dy \quad f_y(x)_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, y) dy \quad (34)$$

Run steht die Frage, wie berechnet man für den Gesamtprozeß die Regressionsgleichung  $\mu_y(x)_{ges}$ , wenn für die beiden Einzelprozesse jeweils die Regressionsgleichungen bekannt sind.

Das ergibt sich recht einfach aus Gl.(29).

Dabei muß man noch berücksichtigen, daß sich aus dem zweidimensionalen Operator auch die Randdichten leicht berechnen lassen:

$$f_y(x)_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, y) dy = \frac{\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ p \rightarrow 0}} \mathbf{L}_p^{-1} \{ G_1(p, q) \}}{\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ p \rightarrow 0}} G_1(p, q)} \quad (35)$$

$$f_y(x)_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, y) dy = \frac{\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ p \rightarrow 0}} \mathbf{L}_p^{-1} \{ G_2(p, q) \}}{\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ p \rightarrow 0}} G_2(p, q)}$$

Damit ergibt sich endgültig

$$\mu_y(x)_{ges} = \frac{1}{f_y(x)_1 * f_y(x)_2} \left[ f_y(x)_2 * (f_y(x)_1 \cdot \mu_y(x)_1) + f_y(x)_1 * (f_y(x)_2 \cdot \mu_y(x)_2) \right] \quad (36)$$

Gl.(36) heißt Additionstheorem für 2 Regressionsfunktionen. Es gibt an, wie sich bei Addition von zweidimensionalen Zufallsgrößen die Regressionsfunktionen zu einer Gesamtregressionsfunktion zusammensetzen.

Im folgenden Kapitel soll auf den Sonderfall der linearen Regression noch speziell eingegangen werden.

#### 10. Additionstheorem für lineare Regressionsfunktionen

Sind speziell die beiden Dichten  $f_1(x, y)$  und  $f_2(x, y)$  zweidimensionale Normalverteilungen, dann sind die Regressionsfunktionen Geraden

$$\mu_y(x)_1 = \mu_{y1} + \frac{\sigma_{xy1}}{\sigma_{x1}^2} (x - \mu_{x1}) \quad \mu_y(x)_2 = \mu_{y2} + \frac{\sigma_{xy2}}{\sigma_{x2}^2} (x - \mu_{x2}) \quad (37)$$

Die Gesamtregression ist dann mit Gl.(36)

$$\mu_{y_{ges}} = \mu_{y_1} + \mu_{y_2} + \frac{\sigma_{xy_1} + \sigma_{xy_2}}{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} (x - [\mu_{x_1} + \mu_{x_2}]) . \quad (38)$$

D.h. sämtliche Momente werden addiert (s.Gl.32).

Bemerkenswert ist dabei die Anwendung, wenn man den Prozeß  $P_1$  als technologischen Prozeß und den Prozeß  $P_2$  als Meßprozeß interpretiert. In vielen Meßprozessen ist  $f_2(x,y)$  so gestaltet, daß

$$\mu_{x_2} = 0 \qquad \mu_{y_2} = 0 \quad (39)$$

gilt, d.h. die systematischen Meßfehler sind Null (sie lassen sich durch Eichung oder Berechnung eliminieren).

Die stochastischen Fehler  $\sigma_{x_2}^2$  und  $\sigma_{y_2}^2$  für die Messung der Größen  $(X)_1$  und  $(Y)_1$  lassen sich aber nicht vermeiden. Im allg. gilt weiterhin stochastische Unabhängigkeit zwischen den stochastischen Meßfehlern so daß  $\sigma_{xy_2} = 0$  ist.

Damit wird aus Gl.(38)

$$\mu_{y_{gem}} = \mu_{y_1} + \frac{\sigma_{xy_1}}{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} (x - \mu_{x_1}) . \quad (40)$$

(gem = gemessen)

Sieht man Gl. (37a) als den wahren Zusammenhang für den technologischen Prozeß  $P_1$  an, so ergibt sich aus Gleichung (40) die bemerkenswerte Erkenntnis, daß durch den Meßprozeß stets der Anstieg der Regressionsgeraden betragsmäßig verringert wird (im Mittel). Ebenso verringert sich der gemessene Regressionskoeffizient.

$$\rho_{gem} = \frac{\sigma_{xy_1}}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} \cdot \sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}} \quad (41)$$

so daß eventuell der statistische Test eine Ablehnung des stochastischen Zusammenhangs ergeben kann, die lediglich durch stochastische Meßfehler hervorgerufen wird. Auf statistische Probleme der stochastischen Meßtheorie wird in [ 5 ] hingewiesen.

## Literatur

- [1] DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, München, R.Odenbourg Verlag 1956
- [2] SAUER, W.: Theorie der Erzeugnisflußgraphen und ihre Anwendung zur Modellierung stochastischer Fertigungsprozesse messen-steuern-regeln 24(1981) H.11 S. 611-613
- [3] MASON, S.L.: Feedback Theory: Some properties of Signal Flow Graphs. In: Proceedings of the Institute of Radio Engineers, vol. 41 (1953) Sept., pp 1144-1156
- [4] SAUER, W.: Ein Additionstheorem für Regressionsfunktionen und seine Anwendung in der technologischen Prozeßanalyse Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 32 (1983) H.3, S. 39-43
- [5] STAUDINGER, G.: Die Berücksichtigung zufälliger Meßfehler bei der statistischen Prozeßanalyse in der Elektronikindustrie Dissertation an der Technischen Universität Dresden 1985

Recenzent: Prof.dr inż.Henryk Kowalowski

Wpłynęło do redakcji do 1986.04.30

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ПОТОКОВЫХ ГРАФОВ

### Резюме

В работе дано применение теории потоковых графов для моделирования дискретных производственных процессов на примере электронной промышленности, где выступают запутывающиеся структуры. Использование операторов, основанных на этой теории, даёт возможность расчёта временных зависимостей. В частности в двумерном случае показывается новый вид регрессии.

## MODELOWANIE DYSKRETNYCH PROCESÓW WYTWARZANIA Z ZASTOSOWANIEM TEORII GRAFÓW PRZEPŁYWOWYCH

### S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono zastosowanie teorii grafów przepływowych do modelowania dyskretnych procesów wytwarzania na przykładzie przemysłu elektrycznego gdzie występują struktury zapętłone. Wykorzystanie operatorów opartych na tej teorii umożliwia obliczenia czasów i stanów jakościowych procesu. W szczególności przypadek dwuwymiarowy umożliwia wykorzystanie do optymalizacji równania regresji.