ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: BUDOWNICTWO z. 45 Nr kol. 525

Karol H. BOJDA

O PEWNYM NIEPOLARNYM MODELU TARCZ SIATKOWYCH

Streszczenie. W pracy omówiono pewien przybliżony model obliczeniowy tarcz siatkowych oraz wyprowadzono równanie naprężeniowe dla tego przypadku.

Wstęp

W pracy [2] podano zastosowania równań dyskretnej teorii sprężystości [1] do opisu współdziałających układów dynamicznych złożonych z ciał sztywnych. Między innymi omówiono równania regularnych tarcz oraz płyt siatkowych o węzłach sztywnych.

Jeżeli tarcza siatkowa obciążona jest w sposób niewiele różniący się od równomiernego, to zwłaszcza w obszarze tarczy nie przylegającym do brzegu różnice obrotu sąsiednich elementów tarczy prawie nie różnią się od siebie. Tym samym gradienty obrotu są niewielkie i możemy w przybliżeniu pominąć wpływ momentów polarnych na stan naprężenia łącznika. W przypadku tym można wprowadzić przybliżony model obliczeniowy, dla którego w tej pracy omówione zostało równanie naprężeniowe wykazujące formalne podobieństwo do równania funkcji naprężeń Airy'ego.

Oznaczenia stosowane w pracy są analogiczne do oznaczeń w [2].

1. Tarcze siatkowe jako sprężyste jednobiegunowe ciała dyskretyzowane

Rozpatrywane w pracy [2] tarcze i płyty siatkowe były traktowane jako dyskretne układy sprężyste ciał sztywnych. Jednakże stosowane w tych pracach modele obliczeniowe mogą być także interpretowane jako pewne przypadki dwuwymiarowych dyskretnych ośrodków typu Cosseratów [3]. Wzajemne oddziaływania cząstek elementu dyskretnego realizowane są przez elementy skończone utworzone ze sztywno z sobą połączonych łączników. Cząstkami są węzły siatek. Liczba stopni swobody cząstek w tych modelach jest równa liczbie stopni swobody cząstek w pewnych dwuwymiarowych ośrodkach Cosseratów. Zakładając, że pole przemieszczeń cząstek określa jednoznacznie pole obrotów oraz że nie występują składowe naprężenia momentowego (momenty polarne), można omawiane tarcze siatkowe rozpatrywać w ramach liniowej teorii sprężystych ciał dyskretyzowanych [5], tak jak w pracy [4]. Będzie to pewien przybliżony model obliczeniowy.

W ramach tej teorii można rozpatrywać także tarcze siatkowe o bardziej złożonej strukturze, gdyż kształt elementów skończonych nie ma tu większego znaczenia. Jednak w dalszym ciągu tej pracy będziemy zakładać, że struktura różnicowa rozpatrywanych tarcz jest regularna i że rząd jej wynosi dwa, to znaczy, że utworzona jest z dwóch rodzin łączników, dla których

$$l^k_\Lambda = \text{const.}$$

Podstawowy układ równań tarcz obciążonych tylko wzdłuż brzegów, w tym przypadku [4], składa się z równań równowagi

$$\overline{\Delta}_\Lambda T^\Lambda_k = 0, \tag{1.1}$$

związków geometrycznych

$$\gamma_{\Lambda\Phi} = \Delta({}_\Lambda u^k \, l_\Phi)_k, \tag{1.2}$$

gdzie:

$$l_{\Lambda k} = \delta_{kl} \, l^l_\Lambda$$

oraz równań konstytutywnych

$$p^{\Lambda\Phi} = A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta} \gamma_{\Gamma\Delta}. \tag{1.3}$$

W równaniach (1.1) - (1.3) $\gamma_{\Lambda\Phi}$ są składowymi stanu odkształcenia, $p^{\Lambda\Phi}$ są składowymi stanu naprężenia, a wielkości $A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}$ charakteryzują własności sprężyste rozpatrywanych tarcz. Wielkości te należy wyznaczać sposobem omówionym w [4].

Pomiędzy składowymi stanu naprężenia T_k^Λ i $p^{\Lambda\Phi}$ zachodzą związki [4]

$$T^\Lambda_k = p^{\Lambda\Phi} \, l_{\Phi k}. \tag{1.4}$$

Rugując z przedstawionych równań składowe stanu naprężenia oraz odkształcenia, otrzymamy równanie przemieszczeniowe rozpatrywanych tarcz

$$\overline{\Delta}_\Lambda \left(a^{\Lambda\Phi}_{kl} \, \Delta_\Phi u^l\right) = 0, \tag{1.5}$$

gdzie:

$$a^{\Lambda\Phi}_{kl} = A^{\Lambda\Gamma\Phi\Delta} l_{\Gamma k} \, l_{\Delta l}.$$

Są to dwa równania różnicowe dla dwóch składowych stanu przemieszczenia u^k.

Równania (1.5) są szczególnym przypadkiem równań podanych w [4], gdzie przedstawiono także następujące warunki nierozdzielności odkształcenia:

$$\Delta_{[\Lambda}\Delta_{[\Phi}\gamma_{\Gamma]\Delta]} = 0. \tag{1.6}$$

Obecnie wyprowadzimy równanie naprężeniowe rozważanych tarcz.

Podstawiając (1.4) do (1.1), otrzymamy następujące równanie równowagi

$$\bar{\Delta}_{\Lambda} p^{\Lambda\Phi} = 0. \tag{1.7}$$

Wyrażając składowe stanu naprężenia $p^{\Lambda\Phi}$ przez funkcję naprężeń φ w następujący sposób:

$$p^{\Lambda\Phi} \quad \varepsilon^{\Lambda\Gamma}\varepsilon^{\Phi\Omega}\bar{\Delta}_{\Gamma}\bar{\Delta}_{\Omega}\varphi, \tag{1.8}$$

łatwo sprawdzić, że równanie (1.7) będzie spełnione tożsamościowo.

Związki odwrotne do (1.3) przedstawimy w postaci

$$\gamma_{\Lambda\Phi} = \tilde{A}_{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\, p^{\Gamma\Delta}. \tag{1.9}$$

Wielkości $\tilde{A}_{\Lambda\Delta\Phi\Gamma}$ muszą spełniać równania

$$\tilde{A}_{\Lambda\Delta\Phi\Gamma} A^{\Phi\Gamma\Sigma\Psi} = \delta^{\Sigma}_{\Lambda}\,\delta^{\Psi}_{\Delta}$$

Podstawiając (1.8) do (1.9) a otrzymane wyrażenia do (1.6), dochodzimy do równania różnicowego funkcji naprężeń φ

$$\Delta_{[\Lambda}\Delta_{[\Phi}(\tilde{A}_{\Gamma]\Delta]\Omega\Xi}\,\varepsilon^{\Omega\Psi}\varepsilon^{\Xi\Sigma}\bar{\Delta}_{\Psi}\bar{\Delta}_{\Sigma}\varphi) = 0. \tag{1.10}$$

Wprowadzając nowe wielkości $c^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}$, charakteryzujące własności sprężyste rozpatrywanych tarcz, za pomocą wzoru

$$c^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta} = \varepsilon^{\Lambda\Psi}\varepsilon^{\Phi\Sigma}\varepsilon^{\Omega\Gamma}\varepsilon^{\Xi\Delta}\quad \tilde{A}_{\Psi\Sigma\Omega\Xi},$$

równanie (1.10) można przedstawić w następującej postaci:

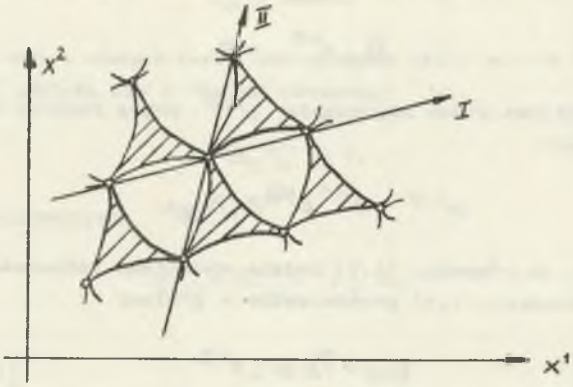
$$\Delta_{\Lambda}\Delta_{\Phi}(c^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\bar{\Delta}_{\Gamma}\bar{\Delta}_{\Delta}\varphi) = 0. \tag{1.11}$$

W szczególnym przypadku, dla tarcz jednorodnych, równanie (1.11) ma kształt

$$c^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\Delta_{\Lambda}\Delta_{\Phi}\bar{\Delta}_{\Gamma}\bar{\Delta}_{\Delta}\varphi = 0. \tag{1.12}$$

Z budowy równań (1.11) i (1.12) wynika, że funkcja φ odpowiada funkcji Airy'ego.

Na koniec warto zwrócić uwagę na to, że rozpatrywany w tej pracy przybliżony model tarcz siatkowych o węzłach sztywnych jest modelem ścisłym dla regularnych tarcz zbudowanych z jednakowych skończonych elementów połączonych między sobą przegubowo w trzech punktach (rys. 1), przy czym kształt tych elementów może być dowolny.



Rys. 1

LITERATURA

[1] Woźniak Cz.: Discrete elasticity. Arch.Mech.Stos. 6, 23, 1971,801-816.

[2] Konieczny S., Pietras F., Woźniak Cz.: O liniowych zagadnieniach dyskretnej teorii sprężystości. I. Rozpr.Inż. 2, 20, 1972, 201-216.

[3] Woźniak Cz.: Discrete elastic Cosserat media, Arch.Mech.Stos., 2, 25, 1973, 119-136.

[4] Kufel W.: O liniowych zagadnieniach teorii sprężystości ciał dyskretyzowanych, Mech. Teoret. i Stos., 1, 11, 1973, 63-74.

[5] Woźniak Cz.: Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych, Mech. Teoret. i Stos., 1, 11, 1973, 47-61.

ОБ ИЗВЕСТНОЙ НЕПОЛЯРНОЙ МОДЕЛИ СЕТЧАТЫХ ДИСКОВ

Р е з ю м е

В работе описано известную приближённую расчётную модель сетчатых дисков, а также выведено уравнение в напряжениях для этого случая.

ON CERTAIN NON - POLAR MODEL OF LATTICE DISCS

S u m m a r y

In the paper certain approximate calculating model of lattice discs is discussed and a stress equation for this case is led out.