ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: BUDOWNICTWO z. 45 Nr kol. 525

Karol H. BOJDA

RÓWNANIA NAPRĘŻENIOWE W ASYMPTOTYCZNYCH TEORIACH POWŁOK SIATKOWYCH

Streszczenie. W pracy wyprowadzono równania naprężeniowe teorii niepolarnej oraz teorii skrępowanych obrotów powłok siatkowych. Wskazano także na istnienie analogii pomiędzy równaniami naprężeniowymi i przemieszczeniowymi obu teorii asymptotycznych.

Wstęp

Równania naprężeniowe dla ogólnej teorii powłok siatkowych, których modelem jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cosseratów, przedstawiono w pracy [2], gdzie funkcje naprężeń wprowadzono dzięki wykorzystaniu analogii statyczno-geometrycznej.

W niniejszej pracy omówiono równania naprężeniowe w teorii niepolarnej oraz teorii skrępowanych obrotów.

Równania przemieszczeniowe dla rozważanych teorii asymptotycznych wyprowadzono w pracy [1], a równania dla asymptotycznej teorii powłok mało wyniosłych w pracy [3].

1. Równania naprężeniowe w teorii niepolarnej

W pracy będziemy stosować dwa układy współrzędnych:

1) Współrzędne z^k w przestrzeni odniesienia.
Przyjmujemy, że przestrzeń ta jest przestrzenią euklidesową, co pozwala na traktowanie współrzędnych przestrzennych z^k jako prostokątnych współrzędnych kartezjańskich.

2) Współrzędne krzywoliniowe x^K parametryzujące powierzchnię podstawową π powłoki, będącą dwuwymiarową przestrzenią Riemanna.
Jednorodne równania równowagi w teorii niepolarnej mają postać [1].

$$p^{KN}\Big|_K - b^N_K\, p^K = 0,$$

$$p^K\Big|_K + b_{KL}p^{KL} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
m^{KN}\Big|_{K} + e^{N}_{K}\, p^{K} &= 0 \\
e_{KL}\, p^{KL} + b_{KL}\, m^{KL} &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

gdzie wielkości p^{KN}, p^{K}, m^{KN}, m^{K} są składowymi stanu naprężenia, b_{KL} są składowymi drugiego tensora podstawowego powierzchni π, wielkości e_{KL} są składowymi dwuwektora Ricciego powierzchni π, pionowa kreska oznacza różniczkowanie kowariantne w metryce układu x^{K}. Wprowadzając następujące obiekty naprężenia:

$$
\begin{aligned}
q^{k}_{K} &= e_{LK}\, p^{LM} \psi^{k}{}_{,M} + e_{MK}\, p^{M} \nu^{k}, \\
S^{k}_{K} &= e_{LK}\, m^{LM} \psi^{k}{}_{,M},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

równania (1.1) przedstawimy w postaci

$$
\begin{aligned}
q^{k}_{[K,L]} &= 0, \\
S^{k}_{[K,L]} + \varepsilon^{k}{}_{l\,m}\, q^{m}_{[K} \psi^{l}{}_{,L]} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

W równaniach (1.2) i (1.3) wielkości ψ^{k} i ν^{k} są kolejno składowymi, w układzie z^{k}, wektora wodzącego punktów powierzchni π oraz wektora jednostkowego normalnego do π, $\varepsilon_{kl\,m}$ jest symbolem Ricciego, przecinek oznacza różniczkowanie cząstkowe, a ujęcie wskaźników w nawias prostokątny ich alternację.

Ze wzorów (1.2) wynika, że tensory o składowych q^{k}_{K} i S^{k}_{K} są tzw. wielkościami rozdwojonymi, których składowe przekształcają się niezależnie w przestrzeniach Euklidesa i Riemanna tak jak składowe wektorów w tych przestrzeniach. Nie są to jednak tensory naprężenia i naprężenia momentowego Pioli-Kirchhoffa.

Wyrażając wielkości q^{k}_{K} i S^{k}_{K} przez sześć funkcji t^{k} i r^{k} w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
q^{k}_{K} &= t^{k}{}_{,K}, \\
S^{k}_{K} &= r^{k}{}_{,K} + \varepsilon^{k}{}_{lm}\, t^{m} \psi^{l}{}_{,K},
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

łatwo sprawdzić, że równania (1.3) będą spełnione tożsamościowo.

Jednak w tym przypadku funkcje t^{k} i r^{k} nie są niezależne.

Istotnie, mnożąc s^k_K przez ν^l oraz dokonująo kontrakoji względem wskaźników k i l, otrzymamy

$$\delta_{kl}\, s^k_K \nu^l = e_{LK}\, m^{LM}\, \delta_{kl} \psi^k{}_{,M}\, \nu^l = 0. \tag{1.5}$$

gdzie:

δ_{kl} jest symbolem Kroneckera.

Stąd funkcje te muszą spełniać dwa równania

$$\delta_{kl}\, r^k{}_{,N} \nu^l + \varepsilon_{kmn}\, t^n \psi^m{}_{,N} \nu^k = 0. \tag{1.6}$$

Wyrażająo funkcje t^k i r^k przez sześć funkcji $\wp^K, \wp, \lambda^K, \lambda$ w następujący sposób:

$$t^k = \wp^K \psi^k{}_{,K} + \wp \nu^k,$$

$$r^k = \lambda^K \psi^k{}_{,K} + \lambda \nu^k,$$

a następnie uwzględniająo (1.4) i (1.2) oraz spełniająo równania (1.6), otrzymamy

$$p^{KL} = e^{KN} e^{LM} (\lambda|_M + b_{MR} \lambda^R)|_N - e^{KN} b^L_N \wp,$$

$$p^K = e^{KN} \wp|_N + e^{KN} e^{LM} b_{LN} (\lambda|_M + b_{MR} \lambda^R), \tag{1.7}$$

$$m^{KL} = e^{KN} (\lambda^L|_N - b^L_N \lambda + e^L{}_N \wp).$$

Wzory (1.7) są związkami między dziesięcioma składowymi stanu naprężenia, a czterema funkcjami naprężeń.

W pracy [4] na nieco innej drodze wyprowadzono podobne związki, lecz dla trzech funkcji naprężeń.

Warunki nierozdzielności dla rozpatrywanych powłok zostały wyprowadzone w pracy [2]. Warunki te można przekształcić do następującej postaci:

$$\varkappa_{[L|N||K]} - b_{[K|N|}\, \varkappa_{L]} = 0,$$

$$\varkappa_{[L|K]} + b^N_{[K}\, \varkappa_{L]N} = 0, \tag{1.8}$$

$$\gamma_{[L|N||K]} - b_{[K|N|}\, \gamma_{L]} + e_{N[K}\, \varkappa_{L]} = 0,$$

$$\gamma_{[L|K]} + b^N_{[K}\, \gamma_{L]N} + e^N_{[K}\, \varkappa_{L]N} = 0,$$

gdzie:

$\varkappa_{KL}, \vartheta_{K}, \gamma_{KL}, \gamma_{K}$ są składowymi stanu odkształcenia.

Związki między składowymi stanu naprężenia i odkształcenia przyjmiemy w postaci [1]

$$\begin{aligned} p^{KL} &= A^{KLMN}\gamma_{MN}, \\ m^{KL} &= C^{KLMN}\varkappa_{MN}, \\ p^{K} &= A^{KL}\gamma_{L}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Wzory dla składowych tensorów sztywności sprężystej podano w [1].
Związki odwrotne do (1.9) mają postać

$$\begin{aligned} \gamma_{KL} &= D_{KLMN}\, p^{MN}, \\ \varkappa_{KL} &= E_{KLMN} m^{MN}, \\ \gamma_{K} &= D_{KL} p^{L}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

przy czym wielkości D_{KLMN}, E_{KLMN} i D_{KL} muszą spełniać równania

$$\begin{aligned} D_{MNKL}\, A^{KLPR} &= \delta_M^P\, \delta_N^R, \\ E_{MNKL}\, C^{KLPR} &= \delta_M^P\, \delta_N^R, \\ D_{MK}\, A^{KL} &= \delta_M^L. \end{aligned}$$

Podstawiając do (1.10) prawe strony (1.7), a otrzymane wyrażenia do (1.8), uzyskamy następujące równania:

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^{KNLM}\left(\lambda_M\big|_L - b_{ML}\lambda + e_{ML}\varphi\right)\Big|_K - b_K^N\, \tilde{\varkappa}^K = 0, \\ &\left\{\tilde{D}^{KL}\left[\varphi\big|_L + b_L^M\left(e_M{}^N\lambda\big|_N + e_M{}^N b_N^P\, \lambda_P\right)\right]\right\}\Big|_K + \\ &+ e_{KL}\, \tilde{E}^{KLMN}\left(\lambda_N\big|_M - b_{NM}\lambda + e_{NM}\varphi\right) + \\ &+ b_{KL}\, \tilde{D}^{KLMN}\left[\left(e_N{}^P\lambda\big|_P + e_N{}^P b_P^R\, \lambda_R\right)\Big|_M - b_{NM}\varphi\right] = 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\tilde{\varkappa}^{K}\Big|_{K} + b_{KL}\,\tilde{E}^{KLMN}\left(\lambda_{N}\big|_{M} - b_{NM}\lambda + e_{NM}\varphi\right) = 0,$$

$$e^{N}{}_{K}\tilde{\varkappa}^{K} + \left\{\tilde{D}^{KNLM}\left[\left(e_{L}{}^{P}\lambda\big|_{P} + e_{L}{}^{P}b_{P}^{R}\lambda_{R}\right)\Big|_{M} - b_{LM}\varphi\right]\right\}\Big|_{K} - \qquad (1.11)$$

$$- b_{K}^{N}\,\tilde{D}^{KL}\left[\varphi\big|_{L} + b_{L}^{M}\left(e_{M}{}^{P}\lambda\big|_{P} + e_{M}{}^{P}\,b_{P}^{R}\lambda_{R}\right)\right] = 0,$$

gdzie:

$\tilde{D}^{KPRT} = e^{LK}\,a^{NP}\,e^{MR}\,a^{ST}\,D_{LNMS},$

$\tilde{E}^{KPRT} = e^{LK}\,a^{NP}\,e^{MR}\,a^{ST}\,E_{LNMS},$

$\tilde{D}^{KS} = e^{LK}\,e^{MS}\,D_{LM}$

$\tilde{\varkappa}^{K} = e^{KL}\varkappa_{L}.$

Tu wielkości a_{KL} są składowymi pierwszego tensora podstawowego powierzchni π.

W sześciu równaniach (1.11) występuje sześć niewiadomych funkcji $\lambda, \lambda_{K}, \varphi, \tilde{\varkappa}^{K}$. Z równań $(1.11)_4$ algebraicznych względem $\tilde{\varkappa}^{K}$ można łatwo wyznaczyć te wielkości i podstawić do pozostałych równań.
Otrzymamy wtedy układ czterech równań dla czterech niezależnych funkcji naprężeń $\lambda, \lambda_{K}, \varphi$; będzie to układ równań różniczkowych cząstkowych 10 rzędu.

Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe, które w tym przypadku mają postać

$$\left[e^{KN}\,e^{LM}\left(\lambda\big|_{M} + b_{MR}\lambda^{R}\right)\Big|_{N} - e^{KN}\,b_{N}^{L}\varphi\right]n_{K}n_{L} = p,$$

$$\left[e^{KN}\,e^{LM}\left(\lambda\big|_{M} + b_{MR}\lambda^{R}\right)\Big|_{N} - e^{KN}\,b_{N}^{L}\varphi\right]n_{K}t_{L} = \tilde{p},$$

$$\left[e^{KN}\,\varphi\big|_{N} + e^{KN}\,e^{LM}\,b_{LM}\left(\lambda\big|_{M} + b_{MR}\lambda^{R}\right)\right]n_{K} = \check{p},$$

$$\left[e^{KN}\left(\lambda^{L}\big|_{N} - b_{N}^{L}\lambda + e^{L}{}_{N}\varphi\right)\right]n_{K}n_{L} = m,$$

$$\left[e^{KN}\left(\lambda^{L}\big|_{N} - b_{N}^{L}\lambda + e^{L}{}_{N}\varphi\right)\right]n_{K}\,t_{L} = \tilde{m},$$

gdzie:

p jest intensywnością sił normalnych do brzegu,
$\tilde{p}$ intensywnością sił stycznych do brzegu,
$\check{p}$ intensywnością sił poprzecznych,
m intensywnością momentów skręcających,
$\tilde{m}$ intensywnością momentów zginających,
n_{K} i t_{K} są kolejno składowymi wektora jednostkowego normalnego oraz stycznego do brzegu powłoki.

2. Równania naprężeniowe w teorii skrępowanych obrotów

Ponieważ w teorii skrępowanych obrotów równania równowagi są takie same jak w ogólnej teorii powłok siatkowych, należy przyjąć

$$s^k_K = e_{LK}\, m^{LM}\, \psi^k{}_{,M} + e_{MK}\, m^M \gamma^k.$$

A zatem w tym przypadku nie muszą być spełnione równania (1.6). Stąd związki pomiędzy składowymi stanu naprężenia i funkcjami naprężeń mają postać

$$
\begin{aligned}
p^{KL} &= e^{KN}\left(\varphi^L\big|_N - b^L_N \varphi\right),\\
p^K &= e^{KN}\left(\varphi\big|_N + b_{LN}\varphi^L\right),\\
m^{KL} &= e^{KN}\left(\lambda^L\big|_N - b^L_N \lambda + e^L{}_N \varphi\right),\\
m^K &= e^{KN}\left(\lambda\big|_N + b_{LN}\lambda^L + e_{NL}\varphi^L\right).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

W teorii skrępowanych obrotów zachodzą równości

$$\gamma_K = 0.$$

Zatem warunki nierozdzielności mają postać

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_{[L|N|}\big|_{K]} - b_{[K|N|}\varkappa_{L]} = 0,\\
&\varkappa_{[L}\big|_{K]} + b^N_{[K}\varkappa_{L]N} = 0,\\
&\gamma_{[L|N|}\big|_{K]} + e_{N[K}\varkappa_{L]} = 0,\\
&b^N_{[K}\gamma_{L]N} + e^N_{[K}\varkappa_{L]N} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Ostatnie równanie jest równaniem algebraicznym.

Związki między składowymi stanu naprężenia i odkształcenia wyrażają się wzorami

$$
\begin{aligned}
p^{KL} &= A^{KLMN}\gamma_{MN},\\
m^{KL} &= C^{KLMN}\varkappa_{MN},\\
m^K &= C^{KL}\varkappa_L,
\end{aligned}
$$

a związki odwrotne mają postać następującą:

$$\gamma_{KL} = L_{KLMN}\, p^{MN},$$
$$\varkappa_{KL} = E_{KLMN}\, m^{MN}, \qquad (2.3)$$
$$\varkappa_{K} = E_{KL}\, m^{L}.$$

W związkach tych nie występuje p^K, a zatem z $(2.1)_2$ nie będziemy korzystać.

Podstawiając $(2.1)_{1,3,4}$ do (2.3) a następnie do (2.2), otrzymamy

$$\left[\tilde{E}^{KNLM}\left(\lambda_M\big|_L - b_{ML}\lambda + e_{ML}\varphi\right)\right]\Big|_K -$$
$$- b_K^N\,\tilde{E}^{KL}\left(\lambda\big|_L + b_L^M\,\lambda_M + e_{LM}\varphi^M\right) = 0,$$
$$\left[\tilde{E}^{KL}\left(\lambda\big|_L + b_L^M\lambda_M + e_{LM}\varphi^M\right)\right]\Big|_K +$$
$$+ b_{KL}\,\tilde{E}^{KLMN}\left(\lambda_N\big|_M - b_{NM}\lambda + e_{NM}\varphi\right) = 0, \qquad (2.4)$$
$$\left[\tilde{D}^{KNML}\left(\varphi_L\big|_M - b_{LM}\varphi\right)\right]\Big|_K +$$
$$+ e^N_K\,\tilde{E}^{KL}\left(\lambda\big|_L + b_L^M\lambda_M + e_{LM}\varphi^M\right) = 0,$$
$$e_{KL}\,\tilde{E}^{KLMN}\left(\lambda_N\big|_M - b_{NM}\lambda + e_{NM}\varphi\right) +$$
$$+ b_{KL}\,\tilde{D}^{KLMN}\left(\varphi_N\big|_M - b_{NM}\varphi\right) = 0.$$

Z ostatniego algebraicznego równania względem φ można łatwo wyznaczyć tę funkcję i podstawić do pozostałych równań; otrzymamy wtedy pięć równań dla pięciu funkcji naprężeń λ, λ_K, φ_K; będzie to również układ równań różniczkowych cząstkowych 10 rzędu.

W równaniach (2.4) wielkości $\tilde{E}^{KS}$ określone są wzorem

$$\tilde{E}^{KS} = e^{LK}\, e^{MS}\, E_{LM}.$$

Warunki brzegowe w tym przypadku mają postać

$$\left[e^{KN}\left(\varphi^L\big|_N - b_N^L\varphi\right)\right] n_K\, n_L = \bar{p},$$
$$\left[e^{KN}\left(\varphi^L\big|_N - b_N^L\varphi\right)\right] n_K\, t_L = \tilde{p},$$

$$\left[e^{KN}\left(\varphi\big|_N + b_{LN}\varphi^L\right)\right] n_K +$$

$$+\left[e^{KN}\left(\lambda^L\big|_N - b^L_N\lambda + e^L{}_N\varphi\right)n_K\, n_L\right]\Big|_M t^M = \check{p},$$

$$\left[e^{KN}\left(\lambda^L\big|_N - b^L_N\lambda + e^L{}_N\varphi\right)\right] n_K\, t_L = \tilde{m},$$

$$\left[e^{KN}\left(\lambda\big|_N + b_{LN}\lambda^L + e_{NL}\varphi^L\right)\right] n_K = \check{m},$$

gdzie $\check{m}$ jest momentem polarnym obciążającym brzeg powłoki.

3. Analogia pomiędzy równaniami w teoriach asymptotycznych

Pomiędzy równaniami teorii niepolarnej i teorii skrępowanych obrotów zachodzi pełna analogia. Można ją sformułować następująco:

Jeżeli w równaniach naprężeniowych (1.11) teorii niepolarnej dokonamy następującej zamiany symboli:

$$A^{KLMN} \longrightarrow \tilde{E}^{KLMN},$$

$$C^{KLMN} \longrightarrow \tilde{D}^{KLMN},$$

$$C^{KL} \longrightarrow \tilde{D}^{KL},$$

$$u \longrightarrow \lambda, \qquad u_K \longrightarrow \lambda_K$$

$$\vartheta \longrightarrow \varphi,$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe ale dla teorii skrępowanych obrotów. Podobnie, jeżeli w równaniach naprężeniowych (2.4) teorii skrępowanych obrotów dokonamy następującej zamiany symboli:

$$A^{KLMN} \longrightarrow \tilde{E}^{KLMN},$$

$$C^{KLMN} \longrightarrow \tilde{D}^{KLMN},$$

$$A^{KL} \longrightarrow \tilde{E}^{KL},$$

$$u \longrightarrow \lambda, \qquad u_K \longrightarrow \lambda_K,$$

$$\vartheta_K \longrightarrow \varphi_K,$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe lecz teraz dla teorii niepolarnej.

Analogia ta wykazuje pełne podobieństwo do omówionej w pracy [5] analogii tarczowo-płytowej w teorii dźwigarów siatkowych.

Zachodzi więc możliwość zamiany rozwiązań naprężeniowych jednej teorii na rozwiązania przemieszczeniowe drugiej teorii. Przy zamianie takiej należy odpowiednio zmodyfikować tensory sztywności sprężystej oraz warunki brzegowe podobnie jak to ma miejsce w znanej analogii Wieghardta.

LITERATURA

[1] Woźniak Cz.: Siatkowe dźwigary powierzchniowe, PWN, Warszawa 1970.

[2] Kleiber M., Woźniak Cz.: On Equations of the Linear Theory of Elastic Lattice Shells, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn.19,3,(1971).

[3] Kleiber M., Woźniak Cz.: The Equations of Shallow Lattice Shells,Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 19, 4(1971).

[4] Bojda K.H.: Funkcje naprężeń w teorii powłok siatkowych. Rozpr. Inż. 21, 3(1973).

[5] Bojda K.H.: Analogia tarczowo-płytowa w teorii dźwigarów siatkowych, Mech. Teor. i Stos. (w druku).

УРАВНЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ В АСИМПТОТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

Р е з ю м е

В работе выведено уравнения в напряжениях неполярной теории и теории связанных оборотов сетчатых оболочек. Указано также существование аналогии между уравнениями в напряжениях и уравнениями в перемещениях обеих асимптотических теорией.

STRESS EQUATIONS IN ASYMPTOTIC THEORIES OF LATTICE SHELLS

S u m m a r y

In the paper stress equations of the non - polar theory and of the pinioned turns theory of lattice shells are led out. The subsistence of an analogy between the stress equations and the displacement equations of both the asymptotic theories is also indicated.