

Stanisław WĄSIK

PEWNE ZAGADNIENIA STATYKI PŁYT SEGMENTOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie płyty prostokątnej podzielonej sprężystymi przegubami suwnymi. Rozwiązanie uzyskano za pomocą operatorów Mikusińskiego. Podejście to nie wymaga dzielenia płyty segmentowej na osobne segmenty.

Pracę kończy przykład doprowadzony do wartości liczbowych dla trzech przypadków szczególnych: płyta ze sprężystym przegubem suwnym, płyta z gładkim przegubem suwnym, płyta bez przegubu. W pierwszym przypadku uzyskano zmniejszenie ugięcia o 42%, momentu zginającego o 34%, a w drugim odpowiednio o 28% i 19% w porównaniu z tymi wielkościami dla płyty złożonej z dwóch segmentów pracujących niezależnie.

Wstęp

W pracy [3] przedstawiono w sposób ogólny możliwości efektywnych rozwiązań niektórych praktycznie ważnych zagadnień teorii dźwigarów sprężystych za pomocą rachunku operatorów Mikusińskiego [1]. W [3,2] jak i w niniejszej pracy wielkość q zawiera obok poszczególnych rodzajów obciążeń również dyslokacje.

Dyslokacje pojawiają się w płycie w tych przypadkach, w których płyta podzielona jest na osobne segmenty liniami nieciągłości w postaci przegubów, które mogą istnieć w płycie w pewnych uzasadnionych powodów.

W zależności od tego, w jaki sposób w przegubach powiązane są ze sobą stykające się brzegi sąsiadujących ze sobą poszczególnych segmentów płyty, wystąpią odpowiednie dyslokacje kątowe lub liniowe lub kątowe wraz z liniowymi.

Poniżej wskażemy pewne przypadki, w których celowe jest stosowanie płyt z odpowiednimi przegubami.

W przypadku, w którym chcemy uzyskać zwiększenie nośności płyty składającej się z prefabrykowanych segmentów, możemy połączyć stykające się brzegi sąsiadujących ze sobą segmentów takimi przegubami sprężystymi lub gładkimi, w których możliwe są jedynie wzajemne przemieszczenia kątowe stykających się brzegów. Do rozwiązania takiej płyty stosujemy aparat matematyczny odpowiadający modelowi płyty ze sprężystymi lub gładkimi przegubami cylindrycznymi, w których występują dyslokacje kątowe [2].

Pewnym potwierdzeniem wyników zastosowanego aparatu matematycznego [2] do płyt z dyslokacjami kątowymi są wyniki badań modelowych [5] przeprowadzonych dla płyt ze sprężystymi przegubami cylindrycznymi. Badania te sta-

nowią pewien fragment zakrojonych na szeroką skalę badań w ośrodku gliwickim związanych z opracowywaną obecnie technologią produkcji elementów prefabrykowanych systemem PRAS-BET i dotyczą problemu stwierdzenia możliwości wdrożenia do produkcji elementów stropowych z prasowanych pełnych płyt żelbetowych o grubości 15 cm i rozpiętości 6 m. W badaniach porównano ugięcia płyt ze sprężystymi przegubami cylindrycznymi i płyt złożonych z segmentów pracujących niezależnie i stwierdzono, że stosowanie przegubów zmniejszyło ugięcia segmentów środkowych o ok. 40%.

W związku z tym uzyskano wnioszek, że segmenty łączone przegubami tarczowymi można stosować przy rozpiętości do 6 m, natomiast segmenty pracujące niezależnie tylko do 4,8 m.

W pewnym przypadku możemy również w celu uzyskania zwiększonej nośności płyty złożonej z segmentów wstawić sprężyste wkładki w specjalnie wykonane wgłębienia (rys. 1b) w ściśle przylegających do siebie i wykonanych dokładnie stykających się brzegach sąsiadujących ze sobą poszczególnych segmentów. W połączeniach tego typu mogą wystąpić jedynie wzajemne przemieszczenia liniowe w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyty. Do rozwiązania takiej płyty należy użyć aparatu matematycznego, stanowiącego przedmiot niniejszej pracy, odpowiadającego modelowi płyty ze sprężystymi przegubami, w których występują dyslokacje liniowe.

W przypadku, w którym płyta składa się z segmentów prefabrykowanych ułożonych jeden obok drugiego tylko na styk, możemy również osiągnąć pewne zwiększenie nośności płyty, o ile stykające się brzegi sąsiadujących ze sobą poszczególnych segmentów będą dokładnie wykonane i będą ściśle przylegać do siebie (rys. 1c).

W tym przypadku połączenie tego typu, w którym możliwy jest jedynie wzajemny przesuw poprzeczny stykających się brzegów, odpowiada gładkiemu przegubowi suwnemu. Sam fakt niemożności wystąpienia wzajemnego obrotu stykających się brzegów powoduje znaczne zmniejszenie ugięcia płyty a zatem i momentów zginających w kierunku linii przegubów w porównaniu z płytami złożonymi z segmentów pracujących niezależnie. Mając na uwadze taki charakter pracy płyty, możemy również zaprojektować płytę ekonomiczniej.

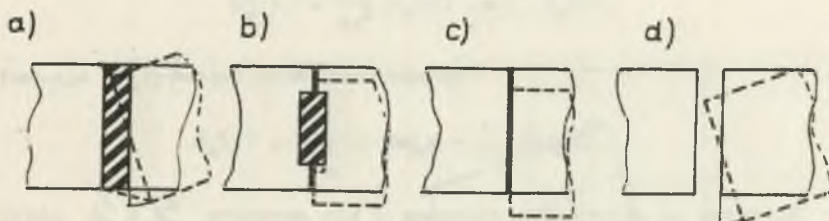
Do rozwiązania takiej płyty stosujemy aparat matematyczny, stanowiący również przedmiot niniejszej pracy, odpowiadający modelowi płyty z gładkimi przegubami suwnymi, w których występują dyslokacje liniowe.

W przypadku, w którym chcemy wraz ze zwiększeniem nośności płyty uzyskać wibroizolację czynną lub bierną lub czynno-bierną z uwagi na urządzenia lub aparaturę znajdujące się na poszczególnych segmentach płyty, możemy powiązać wkładkami sprężystymi (rys. 1a) brzegi sąsiadujących ze sobą segmentów. Wkładki takie, mające za zadanie wibroizolację, noszą nazwę wibroizolatorów, o których pewne informacje można znaleźć między innymi w pracach [6] i [7]. W połączeniu tego typu możliwe jest wystąpienie zarówno wzajemnego przesuwu poprzecznego jak i wzajemnego obrotu stykających się brzegów sąsiadujących ze sobą poszczególnych segmentów. Do roz-

wiązania płyty w takim przypadku należy użyć łącznie: aparatu matematycznego odpowiadającego modelowi płyty ze sprężystymi przegubami cylindrycznymi i aparatu matematycznego odpowiadającego modelowi płyty ze sprężystymi przegubami suwnymi; stanowiących w sumie aparat matematyczny odpowiadający modelowi płyty ze sprężystymi przegubami cylindryczno-suwnymi, w których występują razem dyslokacje kątowe i liniowe.

Wreszcie w przypadku, w którym interesuje nas głównie uzyskanie wibroizolacji, a nie zależy nam specjalnie na zwiększonej nośności płyty, możemy stykające się brzegi sąsiadujących ze sobą segmentów oddzielić szczelinami o takim prześwicie (rys. 1d), aby nie zaistniała możliwość zetknięcia się tych brzegów. W tym przypadku płyta, która podzielona jest liniami nieciągłości tego typu, w których występują razem wzajemny obrót i wzajemny przesuw poprzeczny brzegów sąsiednich segmentów, odpowiada modelowi płyty z gładkimi przegubami cylindryczno-suwnymi, w których występują razem dyslokacje kątowe i liniowe. Jednak szukanie rozwiązania dla całej płyty nie ma sensu, ponieważ każdy segment pracuje niezależnie jeden od drugiego i łatwiej jest znaleźć rozwiązanie dla każdego z segmentów osobno.

Na rys. 1 podano schematy konstrukcji przegubów, w których możliwe są wzajemne przesuw poprzeczne stykających się brzegów sąsiednich segmentów płyty.



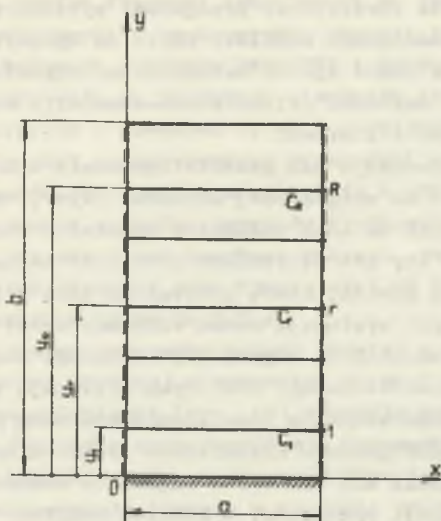
Rys. 1

Charakter pracy płyt z takimi przegubami, w których powierzchnia ugięcia płyty ma nieciągłości skożone w postaci dyslokacji liniowych będących wzajemnymi przesuwami poprzecznymi stykających się brzegów sąsiednich segmentów, zwykle się niekiedy określać popularnie nazwą: "klawiszowanie".

Mając na uwadze powyższe przypadki, podamy poniżej sposób rozwiązania płyt z przegubami suwnymi, w których występują dyslokacje liniowe.

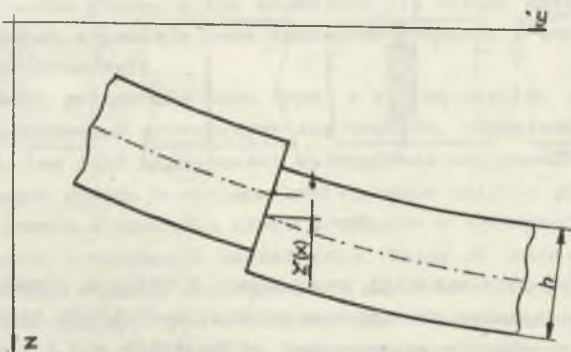
W pracy [2] przedstawiono rozwiązanie za pomocą rachunku operatorów Mikusińskiego [1] zagadnienia płyty o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych w kierunku osi y podzielonej sprężystymi lub gładkimi przegubami cylindrycznymi.

W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie za pomocą tego samego rachunku [1] podobnej płyty, różniącej się tylko tym, że w liniach nieciąg-



Rys. 2

W szczególności Δ oznacza operator różniczkowy, h^y_t operator przesunięcia.



Rys. 3

1. Dyslokacje liniowe

Ogólne rozwiązanie zagadnienia płyty prostokątnej o krawędziach $x = 0$ i $x = a$ swobodnie podpartych można przedstawić w postaci [2]

$$w = \sum_{m \geq 1} \left[A_m^k \phi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \frac{1}{D} q_m x \beta_m(y) \right] \sin \alpha_m x,$$

gdzie: $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, D - jest sztywnością płyty, wielkości q_m są współczynnikami rozwinięcia obciążenia w szereg sinusowy.

Funkcje $\varphi_m^k(y)$ i $\psi_m^k(y)$ zależą od warunków podparcia brzegu $y = 0$.

Dla krawędzi $y = 0$ sztywno utwierdzonej $K = 1$,

$$\varphi_m^1(y) = \frac{d}{dy} \beta_m(y),$$

$$\psi_m^1(y) = \beta_m(y).$$

Dla krawędzi $y = 0$ swobodnie podpartej $K = 2$,

$$\varphi_m^2(y) = \frac{d^2}{dy^2} \beta_m(y) - 2\alpha_m^2 \beta_m(y),$$

$$\psi_m^2(y) = \beta_m(y).$$

Dla krawędzi $y = 0$ swobodnej $K = 3$,

$$\varphi_m^3(y) = \frac{d^3}{dy^3} \beta_m(y) - \alpha_m^2(2-\nu) \frac{d}{dy} \beta_m(y),$$

$$\psi_m^3(y) = \frac{d^2}{dy^2} \beta_m(y) - \nu \alpha_m^2 \beta_m(y).$$

Funkcja $\beta_m(y)$ jest określona wzorem

$$\beta_m(y) = \frac{1}{2\alpha_m^2} (\gamma \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m y).$$

Stałe A_m^k i B_m^k wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi $y = b$. Symbol * oznacza spłot.

Funkcję operatorową przedstawiającą dyslokację liniową w postaci skończonej nieciągłości rozwiązania wzdłuż linii $y = y_1$ można byłoby przedstawić w postaci

$$\tilde{q}(x) = D s^3 \zeta^1(x) h^{y_1} \quad (1.1)$$

gdzie $\zeta^1(x)$ jest wartością dyslokacji liniowej.

Jednak dyslokacja ta nie może przedstawiać wzajemnego przemieszczenia krawędzi połączonych sprężystym przegubem suwnym. Zachodzi tu pełne podobieństwo do przypadku omówionego w pracy [2], a dotyczącego dyslokacji kątownej w postaci wzajemnego kąta obrotu krawędzi połączonych sprężystym przegubem cylindrycznym.

W zapisie operatorowym funkcja opisująca wzajemne przemieszczenie krawędzi sąsiednich segmentów przyjmuje postać

$$\hat{q}(x) = D \left[s^3 + (2-\nu)s \frac{d^2}{dx^2} \right] \zeta^1(x) h^{y_1}, \quad (1.2)$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona.

Dla R dyslokacji rozłożonych wzdłuż linii $y=y_r$ ($r = 1, 2, \dots, R$) wzór (1.2) przyjmuje postać

$$\hat{q}(x) = D \left[s^3 + (2-\nu)s \frac{d^2}{dx^2} \right] \sum_{r=1}^R \zeta^r(x) h^{y_r}, \quad (1.3)$$

zaś wielkości \hat{q}_m przyjmują postać następującą

$$\hat{q}_m = D \left[s^3 - s(2-\nu)\alpha_m^2 \right] \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r},$$

gdzie wielkości ζ_m^r są operatorami liczbowymi - są to współczynniki rozwinięcia funkcji $\zeta^r(x)$ w szereg sinusowy

$$\zeta^r(x) = \sum_{m \geq 1} \zeta_m^r \sin \alpha_m x. \quad (1.4)$$

A zatem rozwiązanie zagadnienia płyty z omawianymi dyslokacjami ma postać

$$w = \sum_{m \geq 1} \left[A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{D} \hat{q}_m \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \left[\zeta_m^r h^{y_r} \right] \sin \alpha_m x, \quad (1.5)$$

gdzie:

$$\xi_m(y) = \frac{d^3}{dy^3} \beta_m(y) - (2-\nu)\alpha_m^2 \frac{d}{dy} \beta_m(y) = \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1-\nu}{2} \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y.$$

2. Płyty z przegubami suwnymi

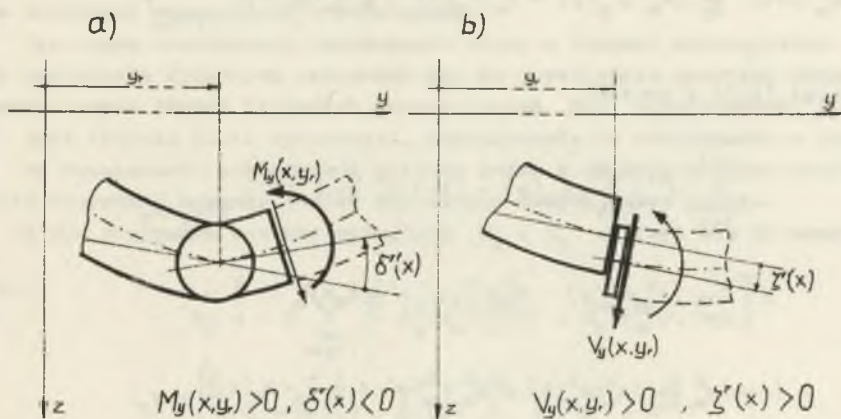
W pracy [2] w przypadku płyt ze sprężystymi przegubami cylindrycznymi wielkość skoku kąta obrotu $\delta^r(x)$ wzdłuż linii $y=y_r$ wyznaczono z warunku proporcjonalności $\delta^r(x)$ do wielkości momentu zginającego $M_y(x, y_r)$ (por. rys. 4a), ponieważ $\delta^r(x)$ przy dodatniej wartości $M_y(x, y_r)$ ma zwrot kierunku niezgodnym z dodatnim zwrotem kątów obrotu w przyjętym układzie osi y .

W przypadku płyt z gładkimi przegubami suwnymi wielkość $\delta^r(x)$ wyznaczono z warunku znikania $M_y(x, y_r)$.

Podobnie w niniejszej pracy w przypadku płyt ze sprężystymi przegubami suwnymi wielkość skoku ugięcia $\zeta^r(x)$ wzdłuż linii $y = y_r$ wyznaczymy z warunku proporcjonalności $\zeta^r(x)$ do wielkości uogólnionej siły poprzecznej $V_y(x, y_r)$ uwzględniającej siłę poprzeczną $Q_y(x, y_r)$ i moment skręcający $M_{xy}(x, y_r)$, przy czym znak $\zeta^r(x)$ jest zgodny ze znakiem $V_y(x, y_r)$ (por. rys. 4b), ponieważ $\zeta^r(x)$ przy dodatniej wartości $V_y(x, y_r)$ ma zwrot zgodny z dodatnim zwrotem ugięć dla przyjętego zwrotu osi z w dół.

Analogicznie do [2], w przypadku płyt z gładkimi przegubami suwnymi wielkość $\zeta^r(x)$ wyznaczymy z warunku znikania $V_y(x, y_r)$.

Warto tutaj jeszcze zauważyć, że jeżeli w pracy [2] jak i niniejszej pracy w wyrażeniach na q uwzględniających dyslokacje zastosujemy zapis analogiczny z dokładnością co do znaku do zapisu wyrażen na uogólnione siły, które występują w warunkach na wyznaczenie skoków uogólnionych przemieszczeń, to w warunkach proporcjonalności skoków uogólnionych przemieszczeń do uogólnionych sił należy również zmienić znaki na przeciwne, aby uzyskać rozwiązanie poprawne.



Rys. 4

A zatem wielkości ζ_m^r występujące w rozwiązaniu (1.5) należy traktować jako niewiadome. Nieznane na razie wartości współczynników ζ_m^r dla płyt ze sprężystymi przegubami suwnymi można wyznaczyć z warunków

$$\zeta^r(x) = c_r V_y(x, y_r) \quad (2.1)$$

Dla płyt z gładkimi przegubami suwnymi warunki (2.1) należy zastąpić warunkami

$$v_y(x, y_r) = 0. \quad (2.2)$$

Uwzględniając, że

$$v_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \right],$$

warunki (2.1) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} DC_r \sum_{t=1}^{r-1} \left[\zeta_m^t \left[\frac{d^3}{dy^3} \xi_m(y) - (2-\nu) \alpha_m^2 \frac{d}{dy} \xi_m(y) \right]_{y=y_r-y_t} + \zeta_m^r = \right. \\ \left. = -DC_r \left[\frac{d^3}{dy^3} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \frac{1}{D} \bar{q}_m * \beta_m(y)) - \right. \right. \quad (2.3) \\ \left. \left. - \alpha_m^2 (2-\nu) \frac{d}{dy} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \frac{1}{D} \bar{q}_m * \beta_m(y)) \right]_{y=y_r}, \right. \end{aligned}$$

zaś warunki (2.2) w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{r-1} \left[\zeta_m^t \left[\frac{d^3}{dy^3} \xi_m(y) - (2-\nu) \alpha_m^2 \frac{d}{dy} \xi_m(y) \right]_{y=y_r-y_t} = \right. \\ \left. = \left[\frac{d^3}{dy^3} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \frac{1}{D} \bar{q}_m * \beta_m(y)) - \right. \right. \quad (2.4) \\ \left. \left. - (2-\nu) \alpha_m^2 \frac{d}{dy} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \frac{1}{D} \bar{q}_m * \beta_m(y)) \right]_{y=y_r}. \right. \end{aligned}$$

Równania (2.3) i (2.4) przyjmują szczególnie prostą postać dla płyt o krawędzi $y = 0$ sztywno utwierdzonej.

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{d^m}{dy^n} \xi_m(y) = \xi_m^{(n)}(y),$$

oraz

$$F_m(y) = \frac{1}{D} \bar{q}_m * \xi_m(y),$$

otrzymamy dla płyt ze sprężystymi przegubami suwnymi

$$\begin{aligned}
 DC_r \sum_{t=1}^{r-1} \zeta_m^t \left[\xi_m^t(y_r - y_t) - (2-\nu) \alpha_m^2 \xi_m(y_r - y_t) \right] + \zeta_m^r = \\
 = - DC_r \left[A_m^1 \xi_m'(y_r) + B_m^1 \xi_m(y_r) + F_m(y_r) \right],
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

a dla płyt z gładkimi przegubami suwnymi równania

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^{r-1} \zeta_m^t \left[\xi_m^t(y_r - y_t) - (2-\nu) \alpha_m^2 \xi_m'(y_r - y_t) \right] = \\
 = - \left[A_m^1 \xi_m'(y_r) + B_m^1 \xi_m(y_r) + F_m(y_r) \right].
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Równania (2.3) lub (2.4) wraz z równaniami uzyskanymi na podstawie warunków brzegowych na krawędzi $y=b$ pozwalają wyznaczyć wszystkie nieznanne wielkości występujące w rozwiązaniu.

Tym samym rozwiązanie zagadnienia płyty z liniami nieciągłości w postaci dyslokacji liniowych sprowadza się do rozwiązania prostych układów algebraicznych równań liniowych zawierających $R+2$ niewiadomych, przy czym R jest ilością linii dyslokacji, analogicznie do rozwiązania w pracy [2].

Po wyznaczeniu powierzchni ugięcia można w oparciu o znane wszyory określić wszystkie momenty i siły poprzeczne działające w płycie.

W tym przypadku momenty zginające M_x i M_y oblicza się ze wzorów:

$$\begin{aligned}
 M_x = - D \sum_{m \geq 1} \left[-\alpha_m^2 (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m = \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r} \right] + \\
 + \nu \frac{d^2}{dy^2} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \\
 \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m = \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r} \right] \sin \alpha_m x,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 M_y = & -D \sum_{m \geq 1} \left[\frac{d^2}{dy^2} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) - \\
 & - \alpha_m^2 \nu (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \right] \sin \alpha_m x.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Momenty skręcające $M_{xy} = M_{yx}$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} = & -D(1-\nu) \sum_{m \geq 1} \frac{d}{dy} \left[\alpha_m (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \right] \cos \alpha_m x.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Siły poprzeczne Q_x i Q_y określają funkcje

$$\begin{aligned}
 Q_x = & -D \sum_{m \geq 1} \left[-\alpha_m^3 (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) + \\
 & + \alpha_m \frac{d^2}{dy^2} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \right] \cos \alpha_m x,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
 Q_y = & -D \sum_{m \geq 1} \left[-\alpha_m^2 \frac{d}{dy} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) + \right. \\
 & \left. + \alpha_m \frac{d}{dy} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \right] \sin \alpha_m x,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{d^3}{dy^3} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \\
 & + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \sin \alpha_m x.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Analogicznie otrzymujemy funkcje określające zastępcze siły poprzeczne v_x i v_y

$$\begin{aligned}
 v_x = -D \sum_{m=1}^R & \left[-\alpha_m^3 (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) + \\
 & + (2-\nu) \alpha_m \frac{d^2}{dy^2} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \right] \cos \alpha_m x,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
 v_y = -D \sum_{m=1}^R & \left[\frac{d^3}{dy^3} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \right. \\
 & + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) - \\
 & - (2-\nu) \alpha_m \frac{d}{dy} (A_m^k \varphi_m^k(y) + B_m^k \psi_m^k(y) + \\
 & \left. + \frac{1}{D} \bar{q}_m^* \beta_m(y) + \xi_m(y) \sum_{r=1}^R \zeta_m^r h^{y_r}) \right] \sin \alpha_m x.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje (2.8), (2.9), (2.11), (2.13) są ciągłe w miejscach, w których występują przeguby suwne.

Funkcje (2.7), (2.10), (2.12) mają R linii $y=y_r$ nieciągłości w miejscach przegubów suwnych w postaci skończonych skoków o wartościach

$$\Delta_{r,M_x}(x) = D(1-\nu^2) \sum_{m \geq 1} \alpha_m^2 \zeta_m^r \sin \alpha_m x, \quad (2.14)$$

$$\Delta_{r,Q_x}(x) = D(1-\nu) \sum_{m \geq 1} \alpha_m^3 \zeta_m^r \cos \alpha_m x, \quad (2.15)$$

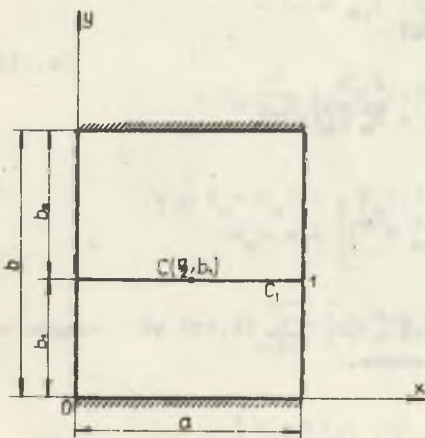
$$\Delta_{r,V_x}(x) = D(1-\nu)^2 \sum_{m \geq 1} \alpha_m^3 \zeta_m^r \cos \alpha_m x. \quad (2.16)$$

Podobnie jak w pracy [2] można wykazać, że pomiędzy (2.14), (2.15), (2.16) i (1.4) zachodzą ciekawe formalne zależności

$$\Delta_{r,Q_x}(x) = \frac{1}{1-\nu} \Delta_{r,V_x}(x) = \frac{1}{1+\nu} \frac{d}{dx} \Delta_{r,M_x}(x) = -D(1-\nu) \frac{d^3}{dx^3} \zeta^r(x) \quad (2.17)$$

3. Przykład

W przykładzie niniejszej pracy przyjęto płytę taką samą jak w przykładzie pracy [2]. Różnica polega jedynie na tym, że zamiast sprężystego przegubu cylindrycznego występuje tutaj sprężysty przegub suwny.



Rys. 5

Analogicznie jak w pracy [2] wyznaczymy ugięcie w punkcie $C(\frac{a}{2}, b_1)$ płyty przedstawionej na rys. 5, wywołane obciążeniem ciągłym, równomiernie rozłożonym na całej powierzchni płyty, o intensywności q . Płyta jest podzielona sprężystym przegubem suwnym wzdłuż linii $y = b_1$.

Ponieważ krawędź $y=0$ jest sztywno utwierdzona, a płyta jest podzielona tylko jednym sprężystym przegubem suwnym, więc na podstawie (1.5) rozwiązanie przyjmie postać:

$$w = \sum_{m \geq 1} \left[A_m^1 \varphi_m^1(y) + B_m^1 \psi_m^1(y) + \frac{1}{D} \bar{q}_m \beta_m(y) + \zeta_m^1 \xi_m^1(y) h^{b_1} \right] \sin \alpha_m x. \quad (3.1)$$

W rozpatrywanym przypadku obciążenie q jest równomiernie rozłożone na całej powierzchni płyty, stąd

$$\bar{q}_m = \frac{q_m}{s}$$

$$q_m = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } m = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{4q}{m\pi} & \text{jeśli } m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

Zatem

$$\frac{1}{D} \bar{q}_m x \beta_m(y) = \frac{q_m}{D} \int_0^y \beta_m(u) du. \quad (3.3)$$

Nieznane wielkości A_m^1, B_m^1, ζ_m^1 występujące w rozwiązaniu (3.1) wyznaczymy z warunków brzegowych na krawędzi

$$w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} w(x, b) = 0, \quad (3.4)$$

oraz z równania uzyskanego na podstawie (2.5)

$$A_m^1 \xi_m^1(b_1) + B_m^1 \xi_m^1(b_1) + \frac{1}{DC_1} \zeta_m^1 + \frac{q_m}{D} \int_0^{b_1} \xi_m^1(y) dy = 0. \quad (3.5)$$

Warunki brzegowe (3.4) w rozpatrywanym przypadku przyjmują postać

$$A_m^1 \varphi_m^1(b) + B_m^1 \psi_m^1(b) + \zeta_m^1 \xi_m^1(b-b_1) + \frac{q_m}{D} \int_0^b \beta_m(y) dy = 0, \quad (3.6)$$

$$A_m^1 \frac{d}{dy} \varphi_m^1(b) + B_m^1 \frac{d}{dy} \psi_m^1(b) + \zeta_m^1 \frac{d}{dy} \xi_m^1(b-b_1) + \frac{q_m}{D} \beta_m(b) = 0.$$

Dla beztarciowego przegubu suwnego równanie (3.5) należy zastąpić równaniem uzyskanym na podstawie (2.6)

$$A_m^1 \frac{d}{dy} \xi_m^1(b_1) + B_m^1 \xi_m^1(b_1) + \frac{q_m}{D} \int_0^{b_1} \xi_m^1(y) dy = 0. \quad (3.7)$$

Warunki (3.6) oraz równanie (3.5) w ostatecznej postaci tworzą układ równań

$$A_m^1 \frac{d}{dy} \beta_m(b) + B_m^1 \beta_m(b) + \zeta_m^1 \xi_m(b_2) + \frac{q_m}{D} \int_0^b \beta_m(y) dy = 0,$$

$$A_m^1 \frac{d^2}{dy^2} \beta_m(b) + B_m^1 \frac{d}{dy} \beta_m(b) + \zeta_m^1 \frac{d}{dy} \xi_m(b_2) + \frac{q_m}{D} \beta_m(b) = 0, \quad (3.8)$$

$$A_m^1 \frac{d}{dy} \xi_m(b_1) + B_m^1 \xi_m(b_1) + \zeta_m^1 \frac{1}{D \alpha_m} + \frac{q_m}{D} \int_0^{b_1} \xi_m(y) dy = 0.$$

W rozwiązaniu (3.1) uwzględnimy trzy pierwsze wyrazy szeregu dla $m = 1, 3, 5$. Ze względu na (3.2) dla m parzystych wyrazy te są równe zero.

Obliczenia przeprowadzimy dla następujących danych liczbowych

$$a = 4,50 \text{ m} \quad b_1 = 2,40 \text{ m}, \quad b_2 = 3,00 \text{ m}, \quad b = 5,40 \text{ m},$$

$$t = 0,10 \text{ m}, \quad E = 20 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \nu = 0,16, \quad q = 4,00 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}.$$

Stąd

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1}{5,8464 \cdot 10^{-4}} = 1710,454 \text{ kNm}$$

Występujące w równaniach (3.8) i funkcjach wielkości statycznych funkcje: $\beta_m(y)$ i $\xi_m(y)$ oraz ich pochodne i całki mają postać:

$$\int_0^y \beta_m(u) du = \frac{1}{2 \alpha_m^3} \left[y \text{sh} \alpha_m y - \frac{2}{\alpha_m} (\text{ch} \alpha_m y - 1) \right],$$

$$\beta_m(y) = \frac{1}{2 \alpha_m^2} (y \text{ch} \alpha_m y - \frac{1}{\alpha_m} \text{sh} \alpha_m y),$$

$$\frac{d}{dy} \beta_m(y) = \frac{1}{2 \alpha_m} y \text{sh} \alpha_m y,$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \beta_m(y) = \frac{1}{2 \alpha_m} (\text{sh} \alpha_m y + \alpha_m y \text{ch} \alpha_m y),$$

$$\frac{d^3}{dy^3} \beta_m(y) = \operatorname{ch} \alpha_m y + \frac{\alpha_m}{2} y \operatorname{sh} \alpha_m y,$$

$$\frac{d^4}{dy^4} \rho_m(y) = \frac{\alpha_m}{2} (3 \operatorname{sh} \alpha_m y + \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y);$$

$$\int_0^y \xi_m(u) du = \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m y - \frac{1-\nu}{2} y \operatorname{ch} \alpha_m y,$$

$$\xi_m(y) = \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1-\nu}{2} \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y,$$

$$\frac{d}{dy} \xi_m(y) = \frac{1+\nu}{2} \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m y - \frac{1-\nu}{2} \alpha_m^2 y \operatorname{ch} \alpha_m y,$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \xi_m(y) = \nu \alpha_m^2 \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1-\nu}{2} \alpha_m^3 y \operatorname{sh} \alpha_m y,$$

$$\frac{d^3}{dy^3} \xi_m(y) = -\frac{1-\nu}{2} \alpha_m^4 y \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1-3\nu}{2} \alpha_m^3 \operatorname{sh} \alpha_m y.$$

Rozwiązanie płyty ze sprężystym przegubem suwnym może być dla $0 < C_1 < \infty$. Znajdziemy rozwiązanie dla 3 przypadków szczególnych:

1) płyta ze sprężystym przegubem suwnym - przyjmiemy tu szczególny przypadek dla $DC_1 = 1$, stąd:

$$C_1 = \frac{1}{D} = 5,8464 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{kN}};$$

2) płyta z przegubem suwnym bez tarcia, $C_1 = \infty$;

3) płyta bez przegubu suwnego, $C_1 = 0$.

Podstawiając wartości liczbowe do warunków: (3.8) dla płyty ze sprężystym przegubem suwnym; (3.6) i (3.7) dla płyty z gładkim przegubem suwnym; (3.6) przy $\zeta_m^1 = 0$ dla płyty bez przegubu, wyznaczono dla każdego z trzech przypadków wartości nieznanymi współczynników A_m^1 , B_m^1 , ζ_m^1 dla $m = 1, 3, 5$. Następnie odpowiednio dla każdego przypadku obliczono w punkcie $C(\frac{a}{2}, b_1)$ wartości funkcji wielkości statycznych: (3.1), $\frac{\partial w}{\partial y}$, (2.7), (2.8), (2.11) i (2.13). W celu porównania wyników również obliczono w punkcie $C(\frac{a}{2}, b_1)$ wartości funkcji wielkości statycznych dla przypadku płyty złożonej z dwóch segmentów pracujących niezależnie jeden od drugiego, przy wy-

korzystaniu rozwiązania metodą Lévy'ego [4] dla każdego z segmentów osobno. Dla przypadku płyty bez przegubu przeprowadzono kontrolę obliczeń metodą Lévy'ego i uzyskano te same wyniki.

W tabeli zestawiono wyniki obliczeń dla następujących wielkości statycznych w punkcie

w^1	- ugięcie z lewej strony,
w^P	- ugięcie z prawej strony,
$\zeta^1 = w^P - w^1$	- skok ugięcia,
$\varphi_y^1 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^1$	- kąt obrotu z lewej strony,
$\varphi_y^P = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^P$	- kąt obrotu z prawej strony,
$\delta^1 = \varphi_y^P - \varphi_y^1$	- skok kąta obrotu,
M_x^1	- moment zginający z lewej strony,
M_x^P	- moment zginający z prawej strony,
$\Delta M_x = M_x^P - M_x^1$	- skok momentu zginającego,
M_y	- moment zginający,
Q_y	- siła poprzeczna,
V_y	- uogólniona siła poprzeczna.

Pozostałe wielkości statyczne w punkcie $C\left(\frac{a}{2}, b_1\right)$ są równe zero.

Z porównania ugięcia w^P i momentu zginającego M_x^P z prawej strony przegubu w punkcie $C\left(\frac{a}{2}, b_1\right)$ wynika, że w płycie z gładkim przegubem suwnym w^P zmniejszyło się o 26%, a M_x^P o 19% w porównaniu z tymi wielkościami dla płyty złożonej z segmentów pracujących niezależnie jeden od drugiego.

Dla płyty ze sprężystym przegubem suwnym odpowiednie wielkości zmniejszyły się: w^P o 42%, i M_x^P o 34%.

Analogiczna sytuacja wynikła w pracy [2].

W płycie z gładkim przegubem cylindrycznym ugięcie w zmniejszyło się o 20%, natomiast w płycie ze sprężystym przegubem cylindrycznym o 40%, co zupełnie potwierdza wyniki badań modelowych [5].

Dla zorientowania się w wielkości błędów wynikających z pominięcia dalszych wyrazów szeregu, obliczono czwarty i piąty wyraz (tj. dla $m = 7$ i 9) szeregu dla poszczególnych wielkości statycznych i okazało się, że największe błędy powstają przy obliczaniu M_x , ponieważ czwarty wyraz szeregu dawał wartości nawet na trzecim miejscu znaczącym (ok. - $0,03 \frac{kNm}{m}$), co daje maksymalny błąd 1,5% w porównaniu z M_x^1 dla płyty z gładkim przegubem

Tabela wyników obliczeń

Stale i wielkości statyczne		P ł y t a			
		bez przegubu	ze sprężystym przegubem suwnym	z gładkim przegubem suwnym	złożona z segmentów pracujących niezależnie
Symb.	Jedn.				
A_1^1	$\frac{1}{m}$	$+4,299033 \cdot 10^{-3}$	$+4,167307 \cdot 10^{-3}$	$+3,763884 \cdot 10^{-3}$	Obliczono metodą Lévy'ego
A_3^1	$\frac{1}{m}$	$+2,261411 \cdot 10^{-4}$	$+2,258597 \cdot 10^{-4}$	$+2,258136 \cdot 10^{-4}$	
A_5^1	$\frac{1}{m}$	$+4,887353 \cdot 10^{-5}$	$+4,887329 \cdot 10^{-5}$	$+4,887 \cdot 10^{-5}$	
B_1^1	$\frac{1}{m^2}$	$-6,938827 \cdot 10^{-3}$	$-6,817137 \cdot 10^{-3}$	$-6,444451 \cdot 10^{-3}$	
B_3^1	$\frac{1}{m^2}$	$-9,474968 \cdot 10^{-4}$	$-9,468155 \cdot 10^{-4}$	$-9,467039 \cdot 10^{-4}$	
B_5^1	$\frac{1}{m^2}$	$-3,412017 \cdot 10^{-4}$	$-3,412008 \cdot 10^{-4}$	$-3,412007 \cdot 10^{-4}$	
ζ_1^1	m	0	$+0,481247 \cdot 10^{-3}$	$+1,955107 \cdot 10^{-3}$	
ζ_3^1	m	0	$+1,816352 \cdot 10^{-6}$	$+2,113921 \cdot 10^{-6}$	
ζ_5^1	m	0	$+1,030687 \cdot 10^{-8}$	$+1,067204 \cdot 10^{-8}$	
w^1	m	$+2,997 \cdot 10^{-3}$	$+2,782 \cdot 10^{-3}$	$+2,120 \cdot 10^{-3}$	
w^p	m	$+2,997 \cdot 10^{-3}$	$+3,261 \cdot 10^{-3}$	$+4,073 \cdot 10^{-3}$	$+5,653 \cdot 10^{-3}$
ζ^1	m	0	$+0,479 \cdot 10^{-3}$	$+1,953 \cdot 10^{-3}$	$+2,033 \cdot 10^{-3}$
φ_y^1	1	$+0,446 \cdot 10^{-3}$	$+0,306 \cdot 10^{-3}$	$-0,126 \cdot 10^{-3}$	$+1,697 \cdot 10^{-3}$
φ_y^p	1	$+0,446 \cdot 10^{-3}$	$+0,306 \cdot 10^{-3}$	$-0,126 \cdot 10^{-3}$	$-1,961 \cdot 10^{-3}$
δ^1	1	0	0	0	$-3,658 \cdot 10^{-3}$
M_x^1	$\frac{kNm}{m}$	+2,65	+2,48	+1,95	+2,69
M_x^p	$\frac{kNm}{m}$	+2,65	+2,86	+3,52	+4,32
ΔM_x	$\frac{kNm}{m}$	0	+0,38	+1,57	+1,64
M_y	$\frac{kNm}{m}$	+2,86	+2,87	+2,88	0
Q_y	$\frac{kN}{m}$	+0,771	+0,612	0	0
v_y	$\frac{kN}{m}$	+1,070	+0,820	0	0

suwnym. Przy obliczaniu ugięcia czwarty wyraz dawał wartość jedynek na czwartym miejscu znaczącym, co stanowi maksymalny błąd 0,05%. Przy obliczaniu wartości M_y czwarty wyraz również dawał wartości na czwartym miejscu, co mieści się w błędzie zaokrąglenia dla momentów do trzeciego miejsca znaczącego. Czwarty wyraz szeregu dla pozostałych wielkości dawał wartości na dalszych miejscach, co mieści się w błędzie zaokrąglenia tych wielkości.

Uwzględnienie piątego wyrazu byłoby już zbyt duże z wyjątkiem M_x . W wyrażeniu na M_x występują drugie pochodne ugięcia, które nie maleją tak szybko, jak samo ugięcie i piąty wyraz daje tu wartości na czwartym miejscu znaczącym.

Obliczenia wykonano wg własnego programu w języku ALGOL 1204 na EMC Odra 1204. Napotkano tu na typowe błędy numeryczne wynikające ze specyficznych własności maszyn cyfrowych. EMC liczy na 11 miejscach znaczących, w związku z tym dla dużych m otrzymujemy bardzo duże wartości występujących w tej pracy funkcji hiperbolicznych. Występuje tutaj błąd zaokrąglenia. Przy odejmowaniu bardzo dużych liczb otrzymujemy liczbę zero lub liczby małe z bardzo dużym błędem zaokrąglenia, które po dalszych operacjach mnożenia przez duże liczby i sumowania dają wyniki błędne. Z tego też względu piąty wyraz szeregu niektórych wielkości statycznych osiągał większą wartość niż czwarty wyraz.

Przedstawiona metoda, aczkolwiek teoretycznie zupełnie poprawna, nastrocza duże trudności w obliczeniach numerycznych przy uwzględnianiu większej ilości wyrazów niż trzy. Dla uniknięcia tych kłopotów należałoby, zgodnie z uwagami [8], odpowiednio przekształcić wzory, co wymaga osobnego opracowania, zastosować odpowiednie procedury korygujące i wtedy dopiero można byłoby się spodziewać dokładniejszych wyników. Tych kłopotów uniknęlibyśmy również przy uwzględnieniu osterech lub pięciu wyrazów szeregu, gdybyśmy w obliczeniach zastosowali program w języku FORTRAN na EMC Odra 1325, która operuje na liczbach z podwójną precyzją (DOUBLE PRECISION), które używane są przy obliczeniach szczególnie dokładnych.

LITERATURA

- [1] Mikusiński J.: Rachunek operatorów, PWN, Warszawa 1957.
- [2] Bojda K.H., Wąsik S.: Niektóre zagadnienia statyki płyt przegubowych, Arch.Inż.Ląd., t. XIX, z. 3/1973.
- [3] Boblewski J., Bojda K.H.: Zastosowanie operatorów Mikusińskiego do zagadnień teorii konstrukcji nośnych, Mech.Teor. i Stos. 2.11(1973), str. 165-175.
- [4] Kąozkowski Z.: Płyty. Obliczenia statyczne., PWN, Warszawa 1968.
- [5] Zybura A.: Badania modelowe współpracy pasm płytowych powiązanych przegubowo, Zesz.Nauk.Pol.Śl., Budownictwo, z. 31, Gliwice 1972.
- [6] Goliński J.A.: Wibroizolacja maszyn wirnikowych, Arkady, Warszawa 1964.
- [7] Lipiński J.: Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny, Arkady, Warszawa 1969.

[8] Wolpe M., Pańkowski Z.: Obliczenia płyt prostokątnych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych, Arch.Inż.Łąd., t. XVI, z. 4/1970.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИКИ СЕГМЕНТНЫХ ПЛАСТИНОК

Р е з ю м е

В работе разрешено прямоугольную пластинку разделенную упругими соевыми шарнирами. Решение получено при помощи операторов Микусиньского. Этот подход не требует распределения сегментной пластинки на отдельные сегменты. В заключении работы приведено иллюстрирующий числовой пример для трех особых случаев: пластинка с упругим соевым шарниром, пластинка с гладким соевым шарниром и пластинка без шарнира.

В первом случае получено уменьшение прогиба на 42%, изгибающего момента на 34%.

Во втором случае соответствующие уменьшения 28% и 19%. Выше указанные величины сравнено с такими же величинами для пластинки сложенной из двух независимо работающих сегментов.

CERTAIN ASPECTS OF THE STATICS OF SEGMENT PANELS

S u m m a r y

The paper presents a rectangular panel divided by elastic sliding joints. The solution has been obtained by using Mikusiński's operators, therefore dividing the panel into separate segments was unnecessary. The paper gives a numerical example for the three particular cases: the panel with elastic sliding joint, the panel with a smooth sliding joint and the jointless panel.

In the first case the sag has decreased by 40% and the bending moment by 34%, while in the second case by 28% and 19% respectively, in comparison with a panel consisting of two segments working independently.