ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: BUDOWNICTWO z. 45 Nr kol. 523

Feliks ANDERMANN

TARCZA KWADRATOWA OBCIĄŻONA WEWNĄTRZ JEJ OBSZARU

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób umożliwiający obliczenie tarczy obciążonej siłami działającymi wewnątrz jej obszaru, przy zastosowaniu ogólnego rozwiązania tej tarczy dla obciążeń brzegowych.

Omówiony sposób zilustrowano przykładami rozwiązań.

1. Uwagi wstępne

Tarcze obciążone wzdłuż brzegów były przedmiotem badań wielu prac teoretycznych. Ich obliczenie przeprowadza się przy zastosowaniu znanych metod teorii sprężystości. Natomiast nie zostały do tej pory opracowane ogólne sposoby obliczania tarcz obciążonych zarówno wewnątrz ich obszarów jak i wzdłuż brzegów.

Rozwiązania dla kilku przypadków tego typu tarcz zostały przytoczone w pracy [1]. Otrzymano je przez nałożenie rozwiązań uzyskanych dla tarczy nieograniczonej oraz dla tarcz prostokątnych odpowiednio obciążonych wyłącznie na brzegach.

W pracy [2] został podany wariacyjny sposób obliczania tarcz prostokątnych dla szczególnych przypadków obciążenia siłami skupionymi wewnątrz ich obszarów. Praca [3] przedstawia sposób obliczania tarczy obciążonej dowolnie wzdłuż brzegów oraz dodatkowo wewnątrz jej obszaru pojedynczą siłą skupioną. Obliczenie to przeprowadza się przez nałożenie odpowiedniego rozwiązania wariacyjnego uzyskanego w pracy [2] oraz rozwiązania różnicowego tarczy obciążonej wyłącznie na brzegu.

Podane w przytoczonych pracach sposoby obliczania tarcz dla równocześnie występujących obciążeń wewnętrznych i brzegowych mają tę niedogodność, że wymagają nakładania na siebie rozwiązań uzyskanych różnymi metodami, co utrudnia m.in. ocenę wielkości błędów obarczających wypadkowe rozwiązanie.

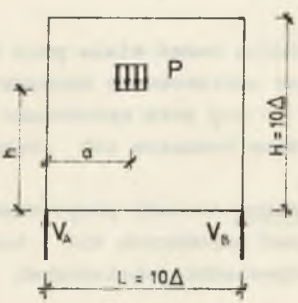
Na innej drodze otrzymano rozwiązanie kwadratowej belki-ściany obciążonej wewnątrz jej obszaru siłą skupioną, podane w pracy [4]. Stan naprężenia w tej belce-ścianie określono przy zastosowaniu metody różnic skończonych, uważając tarczę kwadratową za złożoną z dwóch tarcz prostokątnych, połączonych ze sobą w miejscu występowania wewnętrznego obciążenia.

W niniejszym artykule podaje się sposób obliczania tarczy kwadratowej dla wewnętrznego obciążenia przy zastosowaniu ogólnego rozwiązania różnicowego tarczy kwadratowej, podanego dla dowolnego obciążenia brzegowego w pracy [1].

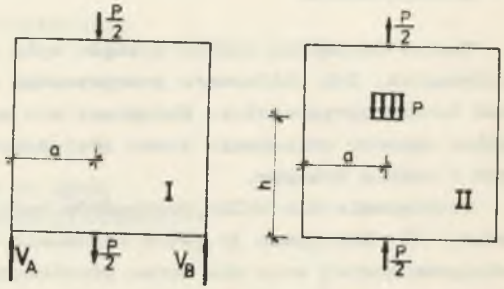
W przypadku dysponowania ogólnym rozwiązaniem dla tarczy prostokątnej sposób ten może znaleźć również zastosowanie przy obliczaniu tarcz prostokątnych dla obciążeń wewnętrznych.

2. Tok postępowania

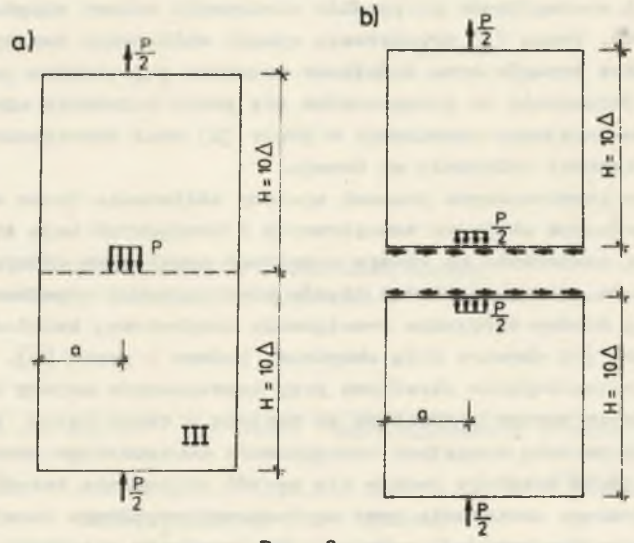
Załóżmy, że poszukiwany jest stan naprężenia dla tarczy kwadratowej pokazanej na rys. 1. Wypadkową wewnętrznego obciążenia oznaczymy przez P. Obciążenie działające na tarczę rozkładamy na dwa składowe obciążenia zgodnie z rys. 2. Tarcza I może być obliczona przy użyciu tablic zawartych w pracy [1], ponieważ jest poddana działaniu wyłącznie sił brzegowych. Rozwiązania dla tarczy II poszukiwać będziemy w następujący sposób.



Rys. 1



Rys. 2

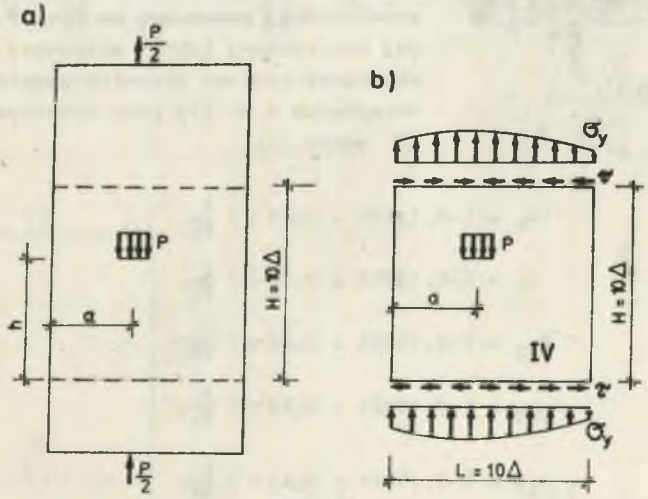


Rys. 3

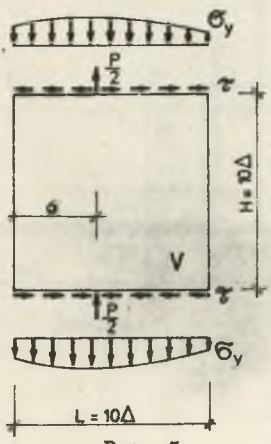
Rozpatrzymy tarczę prostokątną III złożoną z dwóch tarcz kwadratowych (rys. 3a). Styczne siły stykowe gwarantujące ciągłość tarczy prostokątnej w przekroju stykowym (rys. 3b) określa się za pomocą równań sposobu składania tarcz podanego w pracy [1]. Po ich wyznaczeniu stan naprężenia w składowych tarczach kwadratowych może być określony przy zastosowaniu tablic pracy [1] dzięki temu, że tarcze te są obciążone wyłącznie na brzegach.

Stan naprężenia w tarczach składowych określa stan naprężenia w tarczy prostokątnej III.

W następnej fazie obliczeń wydzielamy z tarczy III obszar kwadratowy usytuowany w stosunku do wewnętrznego obciążenia jak w przypadku tarczy II z rys. 2 (rys. 4a). Na brzegi tego wycinka działają znane z rozwiązania tarczy III naprężenia σ_y oraz τ (rys. 4b). Na stan naprężenia tarczy IV z rys. 4b. określony na podstawie rozwiązania tarczy III, nakładamy obecnie stan naprężenia tarczy kwadratowej V pokazanej na rys. 5. Obciążenie brzegów tej tarczy stanowią odwrócone naprężenia brzegowe σ_y i τ tarczy IV oraz brzegowe siły $\frac{P}{2}$ występujące w tarczy II. Stan naprężenia dla tarczy V można również określić przy użyciu tablic pracy [1]. Superpozycja stanów naprężenia tarcz IV i V prowadzi do stanu naprężenia w tarczy II.



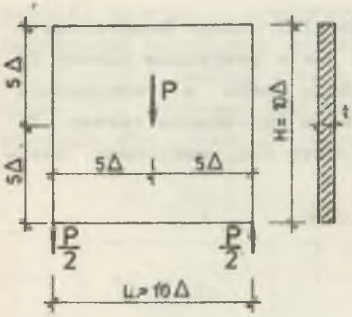
Rys. 4



Rys. 5

Opisana droga obliczania tarczy kwadratowej obciążonej wewnątrz jej obszaru sprowadza się zatem do stosowania ogólnego rozwiązania tarczy kwadratowej dla obciążeń brzegowych.

3. Przykład kwadratowej belki-ściany obciążonej wewnętrzną siłą skupioną

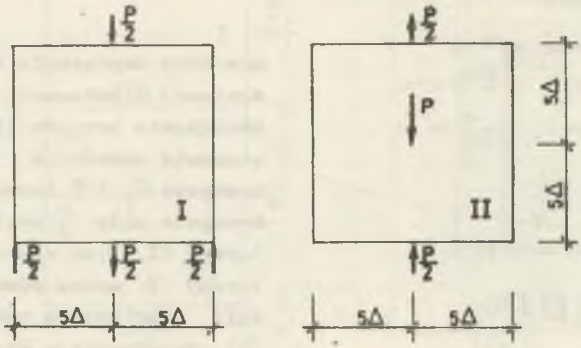


Rys. 6

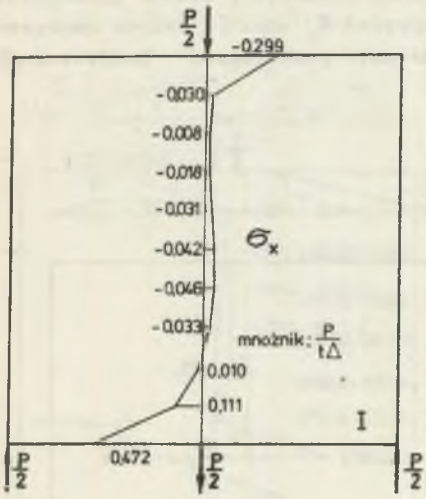
Poszukujemy rozwiązania dla kwadratowej belki-ściany pokazanej na rys. 6. Składowe obciążenia I i II uwidoczniono na rys. 7. Dla tarczy I podano na rys. 8 wykres naprężeń σ_x w przekroju połowiącym długość tarczy. Wartość tych naprężeń obliczono przy użyciu tablic pracy [1].

Obecnie szukamy rozwiązania dla tarczy prostokątnej pokazanej na rys. 9. Dla dolnej kwadratowej tarczy składowej (rys. 10) obliczamy poziome przemieszczenia punktów brzegowych 0 do IV, przy wykorzystaniu tabl. 33 pracy [1].

$$
\begin{aligned}
u_0 &= (-0{,}13462 + 0{,}25\nu)\,\frac{P}{Et},\\
u_I &= (-0{,}13818 + 0{,}25\nu)\,\frac{P}{Et},\\
u_{II} &= (-0{,}14896 + 0{,}25\nu)\,\frac{P}{Et},\\
u_{III} &= (-0{,}16081 + 0{,}25\nu)\,\frac{P}{Et},\\
u_{IV} &= (-0{,}14512 + 0{,}25\nu)\,\frac{P}{Et}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$



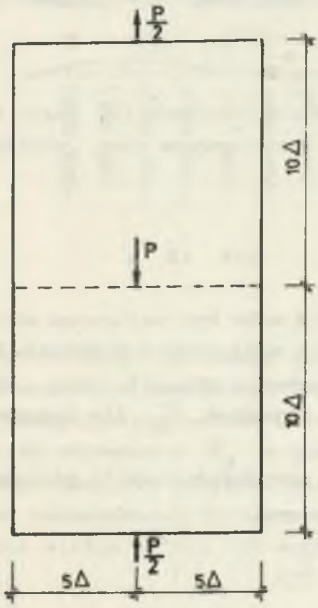
Rys. 7



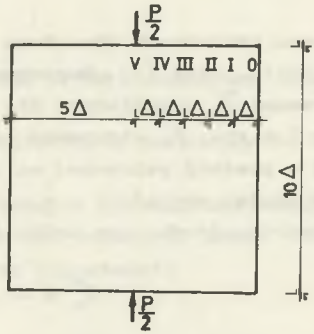
Rys. 8

Uwzględniając wielkości (1) w równaniach sposobu składania tarcz (3-5) przytoczonych w pracy [1] oraz przyjmując normalne siły stykowe równe zeru, otrzymuje się następujące wartości stycznych sił stykowych (rys. 11)

$$
\begin{aligned}
X_0 &= 0{,}08768\ P - 0{,}26697\,\nu\, P,\\
X_1 &= -0{,}17449\ P + 0{,}51579\,\nu\, P,\\
X_2 &= 0{,}18829\ P - 0{,}55376\,\nu\, P,\\
X_3 &= -0{,}14820\ P + 0{,}50008\,\nu\, P,\\
X_4 &= -0{,}24392\ P - 0{,}56892\,\nu\, P.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

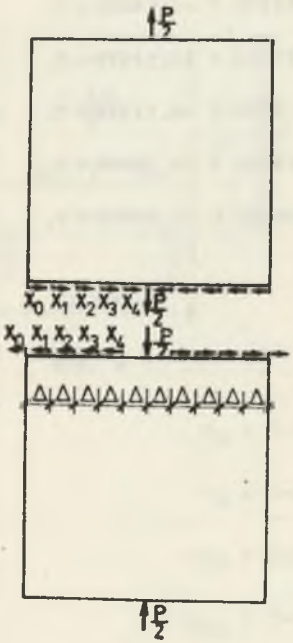


Rys. 9

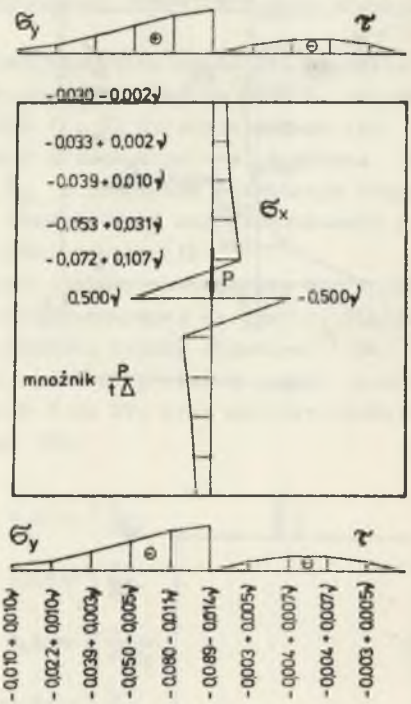


Rys. 10

Z tarczy prostokątnej (rys. 9) wydzielamy kwadratowy obszar pokazany na rys. 12, poddany działaniu brzegowych naprężeń σ_y oraz τ. Wykres naprężeń σ_x dla tego obszaru uzyskuje się na podstawie rozwiązania kwadratowych tarcz składowych z rys. 11.



Rys. 11



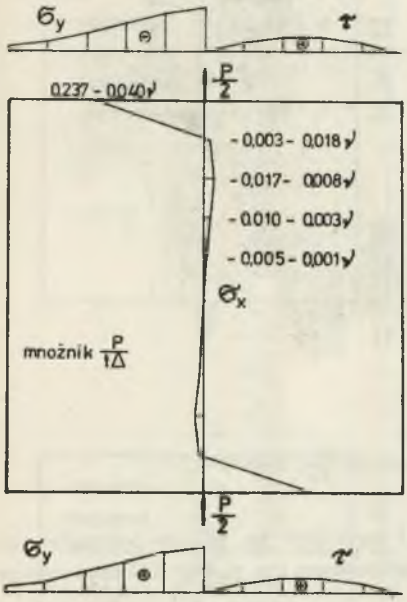
Rys. 12

Tarcza kwadratowa obciążona zgodnie z rys. 13 może być obliczona za pomocą tablic pracy [1]. Superponując uzyskany dla niej wykres naprężeń σ_x z wykresami σ_x określonymi dla wycinka kwadratowego z rys. 12 oraz dla tarczy I z rys. 8, otrzymamy ostateczny wykres naprężeń σ_x dla tarczy z rys. 6 w postaci pokazanej na rys. 14.

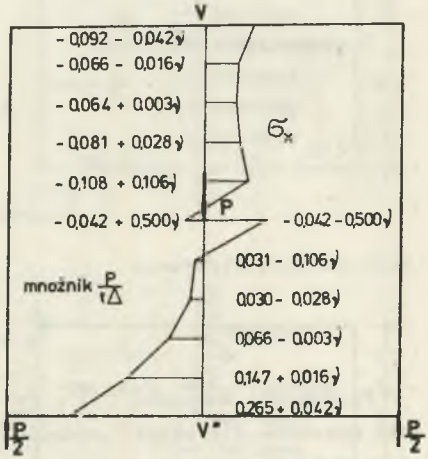
Przyjmując wartość $\nu = \frac{1}{6}$, otrzymuje się dla skrajnych punktów pionowego przekroju środkowego belki-ściany

$$\sigma_x^V = -0{,}099\,\frac{P}{t\Delta} = -0{,}99\,\frac{P}{tL},$$

$$\sigma_x^{V''} = 0{,}272\,\frac{P}{t\Delta} = 2{,}72\,\frac{P}{tL}. \qquad (3)$$



Rys. 13



Rys. 14

W pracy [4] uzyskano dla tych samych punktów identycznie obciążonej belki-ściany, przy zastosowaniu siatki różnicowej o 36 oczkach

$$\sigma_x^V = -1{,}01\ \frac{P}{tL},$$

$$\sigma_x^{V''} = 2{,}56\ \frac{P}{tL}. \tag{4}$$

Wartości (3) otrzymane dla siatki różnicowej o 100 oczkach są oczywiście obarczone mniejszymi błędami.

Posługując się metodą ekstrapolacji ([5] str. 151), obliczymy dokładną wartość naprężenia σ_x w punktach V" i V.

Zakładamy, że wielkość błędu jest proporcjonalna do kwadratu długości kroku różnicowego. Współczynnik proporcjonalności oznaczymy przez k.

Dla siatek o 36 i 100 oczkach błędy wyniosą odpowiednio

$$e_1 = k\left(\frac{L}{6}\right)^2,$$

$$e_2 = k\left(\frac{L}{10}\right)^2. \tag{5}$$

Dokładną wartość naprężenia $\sigma_x^{V''}$ można zatem wyrazić następująco

$$\sigma_{x,dokł}^{V''} = 2,56\,\frac{P}{tL} + k\left(\frac{L}{6}\right)^2,$$
$$\sigma_{x,dokł}^{V''} = 2,72\,\frac{P}{tL} + k\left(\frac{L}{10}\right)^2. \tag{6}$$

Z równań (6) obliczymy

$$k = 9\,\frac{P}{tL^3},$$
$$\sigma_{x,dokł}^{V''} = 2,81\,\frac{P}{tL}. \tag{7}$$

Analogicznie otrzymamy

$$\sigma_{x,dokł}^{V} = -0,98\,\frac{P}{tL}. \tag{8}$$

Porównanie wartości (3) z (7) i (8) wskazuje na to, że wartości naprężeń uzyskane dla siatki różnicowej zastosowanej w pracy [1] odznaczają się dużą dokładnością.

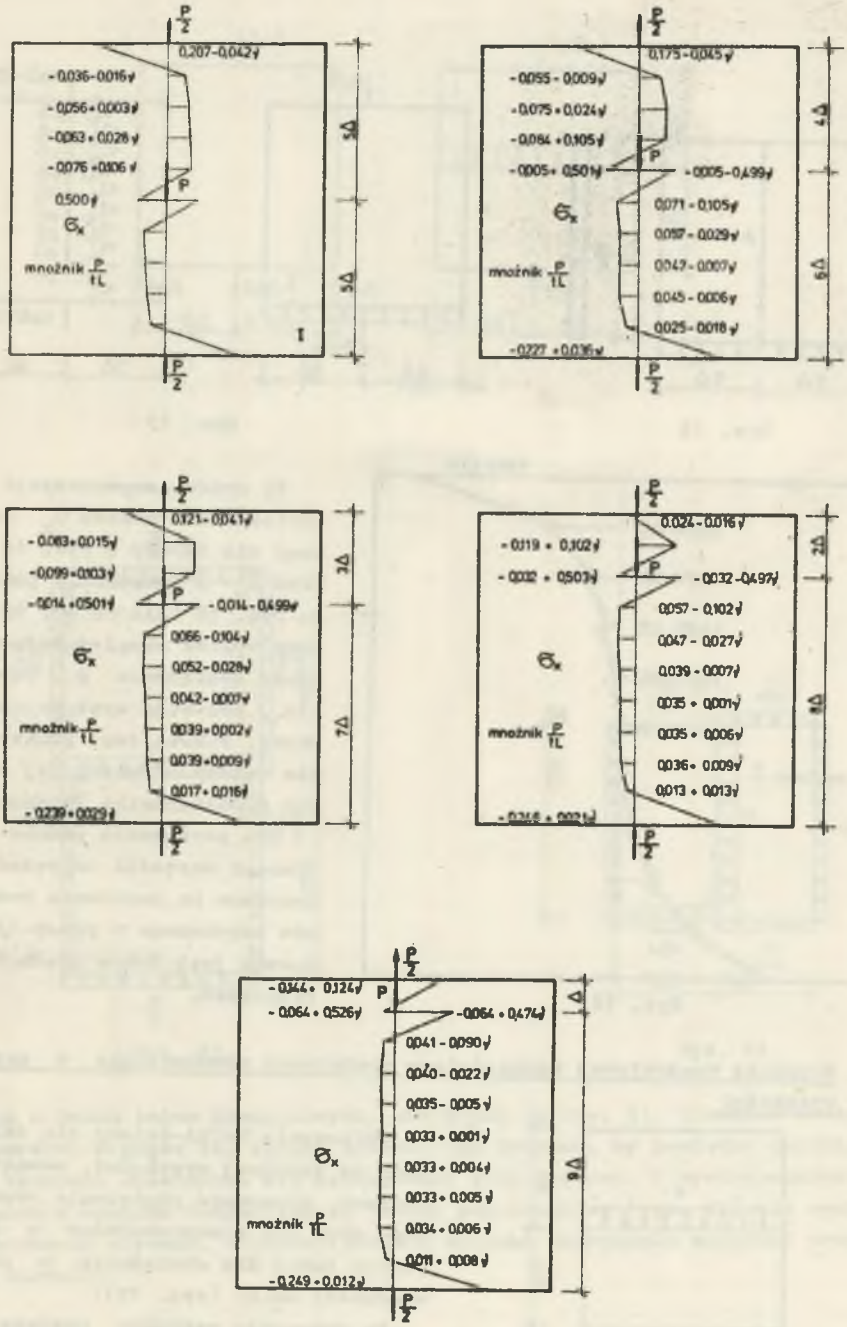
W sposób podany na przykładzie tarczy z rys. 6 określono rozwiązania dla wszystkich tarcz pokazanych na rys. 15. Rozwiązanie tarczy I otrzymano jako sumę rozwiązań uzyskanych dla tarcz z rys. 12 i 13.

Superponując rozwiązanie tarczy z rys. 8 z rozwiązaniami tarcz z rys. 15, można wyznaczyć stany naprężenia w belkach-ścianach dla wewnętrznego obciążenia skupionego w punktach przekroju środkowego, odległych od siebie o $\frac{H}{10}$.

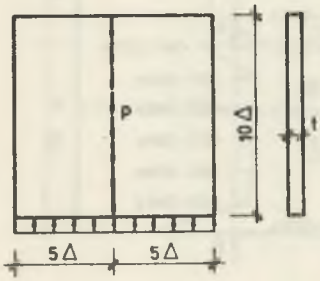
4. Przykład kwadratowej ściany obciążonej równomiernie wzdłuż pionowego przekroju środkowego

W pracy [1] podane zostało rozwiązanie ściany obciążonej w pionowym przekroju środkowym równomiernie rozłożoną siłą pionową o intensywności p (rys. 16). Uzyskano je przez nałożenie rozwiązania ścisłego tarczy nieograniczonej na rozwiązanie różnicowe tarczy obciążonej na brzegach ([1] str. 110).

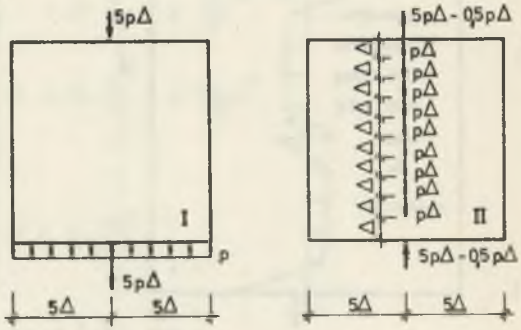
Chcąc otrzymać rozwiązanie przy zastosowaniu sposobu podanego w niniejszym artykule, dokonujemy rozkładu obciążenia ściany z rys. 16 na obciążenia składowe wg rys. 17, zastępując przy tym obciążenie ciągłe p siłami skupionymi w węzłach siatki różnicowej ($p\Delta$ oraz $0,5\,p\Delta$). Tarczę I z rys. 17 można obliczyć za pomocą tablic pracy [1], zaś tarczę II przy użyciu rozwiązań składowych podanych na rys. 15.


P/2
0,207-0,042ν
-0,036-0,016ν
-0,056+0,003ν
-0,063+0,028ν
-0,076+0,106ν
P
0,500ν
σx
mnożnik P/tL
5Δ
I
0,175-0,045ν
-0,055-0,009ν
-0,075+0,024ν
-0,084+0,105ν
-0,005+0,501ν
-0,005-0,499ν
0,071-0,105ν
0,057-0,029ν
0,047-0,007ν
0,045-0,006ν
0,025-0,018ν
-0,227+0,036ν
4Δ
6Δ
0,121-0,041ν
-0,083+0,015ν
-0,099+0,103ν
-0,014+0,501ν
-0,014-0,499ν
0,066-0,104ν
0,052-0,028ν
0,042-0,007ν
0,039+0,002ν
0,039+0,009ν
0,017+0,016ν
-0,239+0,029ν
3Δ
7Δ
0,024-0,016ν
-0,119+0,102ν
-0,032+0,503ν
-0,032-0,497ν
0,057-0,102ν
0,047-0,027ν
0,039-0,007ν
0,035+0,001ν
0,035+0,006ν
0,036+0,009ν
0,013+0,013ν
2Δ
8Δ
-0,144+0,124ν
-0,064+0,526ν
-0,064+0,474ν
0,041-0,090ν
0,040-0,022ν
0,035-0,005ν
0,033+0,001ν
0,033+0,004ν
0,033+0,005ν
0,034+0,006ν
0,011+0,008ν
-0,249+0,012ν
Δ
9Δ

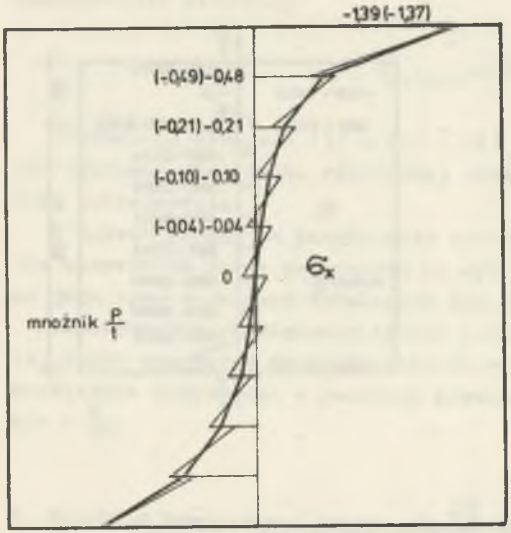
Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17

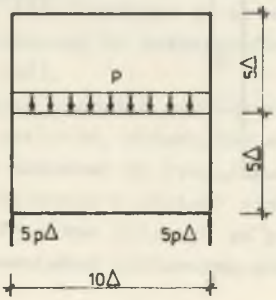


Rys. 18

Na drodze superpozycji odpowiednich wykresów σ_x otrzymamy dla tarczy z rys. 16 wykres σ_x z uskokami, pokazany na rys. 18 (dla $\nu = \frac{1}{6}$). Ostateczny wykres uwzględniający ciągłość obciążenia p uzyskuje się, połowiąc występujące uskoki. Wykres ten praktycznie nie zależy od przyjętej wartości współczynnika Poissona ν.

Dla porównania podano w nawiasach wartości naprężeń otrzymane na podstawie rozwiązania uzyskanego w pracy [1]. Widoczna jest dobra zgodność obu rozwiązań.

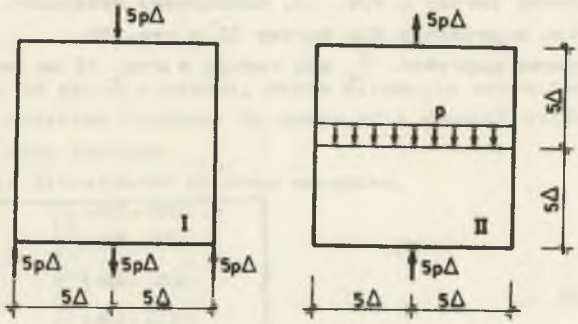
5. Przykład kwadratowej belki-ściany obciążonej równomiernie w połowie wysokości



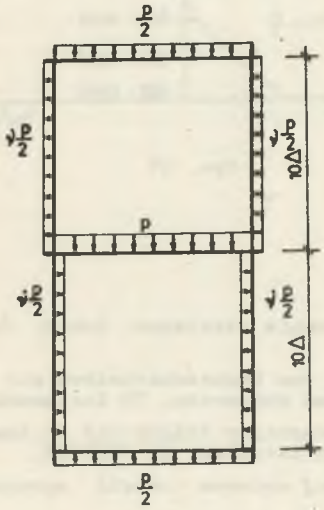
Rys. 19

Obliczenie belki-ściany dla działającego na dowolnej wysokości, wewnątrz jej obszaru, pionowego obciążenia równomiernego może być przeprowadzone w sposób podany tutaj dla obciążenia w połowie wysokości belki (rys. 19).

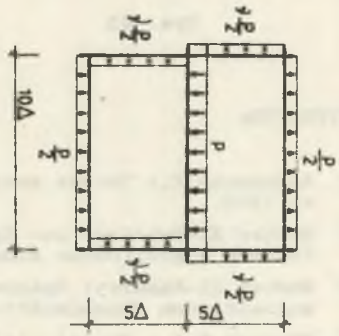
Po dokonaniu rozkładu obciążenia na składowe obciążenia zgodnie z rys. 20, rozpatruje się tarczę prostokątną zło-



Rys. 20



Rys. 21



Rys. 22

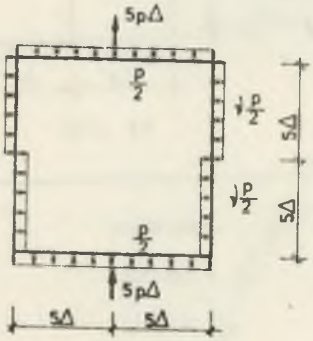
żoną z dwóch tarcz kwadratowych, obciążoną wg rys. 21. Normalne obciążenie pionowych brzegów tej tarczy zostało tak dobrane, by pomiędzy kwadratowymi tarczami składowymi nie występowały siły stykowe. W wyodrębnionym kwadratowym wycinku rozpatrywanej tarczy prostokątnej (rys. 22) nie wystąpią naprężenia styczne. W górnej połowie wycinka naprężenia normalne przyjmują wartości

$$\sigma_x = 0{,}5\nu \frac{p}{t}, \quad \sigma_y = 0{,}5 \frac{p}{t}, \tag{9}$$

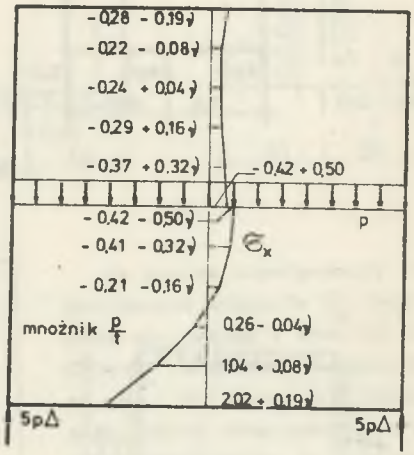
zaś na dolnej naprężenia te zmieniają jedynie znak.

Nakładając na stan naprężenia kwadratowego wycinka z rys. 22 stan naprężenia kwadratowej tarczy z rys. 23, obciążonej wyłącznie na brzegach, otrzymuje się stan naprężenia dla tarczy II z rys. 20.

Ostateczny wykres naprężeń σ_x dla tarczy z rys. 19 ma postać pokazaną na rys. 24.



Rys. 23



Rys. 24

LITERATURA

[1] Andermann F.: Tarcze prostokątne. Obliczenia statyczne. Arkady Warszawa 1966.

[2] Shaker El-Behairy: Der Spannungszustand von Rechteckscheiben mit im Inneren angreifenden Einzelkräften. Praca doktorska. TH Karlsruhe 1966.

[3] Shaker El-Behairy: Spannungszustand wandartiger Träger mit im Inneren angreifenden Einzelkräften. Beton u.Stahlbetonbau, nr 10/1968.

[4] Długacz M.I.: Mietod sietok w smieszannoj zadacze tieorii uprugosti. Naukowa dumka. Kijew 1964.

[5] Chi-Teh-Wang: Prikładnaja tieorija uprugosti (tłumaczenie z angielskiego), Gos. Izdat. fiz.-mat.liter. Moskwa 1959.

КВАДРАТНАЯ БАЛКА-СТЕНА НАГРУЖЕННАЯ В СВОЕЙ ОБЛАСТИ

Р е з ю м е

В работе представлен способ расчёта балки-стены нагруженной в своей области при использовании общего решения этой балки-стены для берегового нагружения.

Описаный способ проиллюстрировано примерами решения.

SQUARE WALL-BEAMS WITH INTERIOR LOADINGS

S u m m a r y

In the paper is given a method, which allows, to solve the problem of a wall-beam with interior loadings by means of a general solution of the wall-beam with edge loadings.

The method is illustrated by some examples.