

Andrzej BŁASZCZYK

Zbigniew GACEK

## MODELE OBLICZENIOWE ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIENSTWA UDAROWEGO PRĄDU ZWARCIOWEGO

**Streszczenie.** W artykule zaprezentowano probabilistyczne modele matematyczne opisujące rozkłady prawdopodobieństwa udarowego prądu zwarciovego. Rozpatrzono różne przyczyny powstawania zwarć: załączenie zwarcia wyłącznikiem, uszkodzenie mechaniczne izolacji, przecięcie atmosferyczne. Funkcje gęstości współczynnika udarowego wyznaczono na podstawie analizy zjawisk występujących w procesie powstawania zwarć w urządzeniach elektroenergetycznych.

### 1. Wprowadzenie

Wzrost wartości prądów zwarciovych w krajowym układzie elektroenergetycznym utrudnia wymiarowanie oraz dobór urządzeń i aparatów elektrycznych ze względu na warunki zwarciovowe. Racjonalne rozwiązanie tego zagadnienia wymaga probabilistycznego ujęcia tzw. obciążeń zwarciovych rozumianych w ogólnym przypadku jako skutek działania prądu zwarciovego (siły elektrodynamiczne, naprężenia elektryczne, efekty cieplne, łuk elektryczny). Przy ocenie skutków zwarć rozpatruje się jednak najczęściej wielkości zwarciovowe w postaci prądu początkowego, wyłączeniowego, zastępczego n-sekundowego i udarowego, służące do określania obciążeń zwarciovych aparatów i urządzeń elektrycznych wg PN-74/E-05002.

W artykule dokonano analizy współczynnika udaru decydującego o udarowym prądzie zwarcia, którego wartość coraz częściej przekracza znamionową wytrzymałość dynamiczną (szczególnie w rozdzielnicach średnich napięć). Rozważania są z założenia uproszczone i dotyczą obwodów jednofazowych zawierających rezystancję  $R$ , reaktancję  $X$  oraz siłę elektromotoryczną  $e = E_m \sin(\omega t + \phi)$ . Wartość współczynnika udarowego dla typowych warunków zwarciovych wynosi  $k_u = 1,8$  (odpowiada to  $R/X = \operatorname{ctg} \varphi = 0,07$  i  $\phi = 0$ ). W rzeczywistości  $k_u$  jest wielkością losową o rozkładzie prawdopodobieństwa zależnym od rozkładów zmiennej  $R/X$  oraz kąta  $\phi$ , a prąd udarowy:

$$i_u = \sqrt{2} k_u I_p = \sqrt{2} \left| \sin(\omega t_u + \phi - \varphi) - \sin(\phi - \varphi) e^{-\omega t_u \operatorname{ctg} \varphi} \right| I_p, \quad (1)$$

gdzie:

$I_p$  - wartość początkowa składowej okresowej prądu zwarcia (prąd początkowy),

$k_u$  - współczynnik udaru prądu zwarcia,

$t_u$  - czas liczony od początku zwarcia do chwili wystąpienia maksymalnego udaru prądowego.

W dalszych rozważaniach dotyczących obwodów wysokonapięciowych, w których  $R/X < 0,3$  rozpatruje się przybliżoną postać współczynnika udaru:

$$k_u = 1 + p \left| \sin(\psi - \varphi) \right| = 1 + e^{-\alpha t \operatorname{ctg} \varphi} \left| \sin(\psi - \varphi) \right| \quad (2)$$

gdzie  $p$  - parametr obliczeniowy.

Celem rozważań jest określenie probabilistycznych modeli obliczeniowych przydatnych do oceny współczynnika udaru przy założeniu, że kąt  $\psi$  i wielkość  $R/X$  są zmiennymi losowymi niezależnymi. Proponowane modele matematyczne opisują rozkład prawdopodobieństwa zmiennej  $\psi$  i pozwalają na określenie rozkładu współczynnika udaru (wzór (2)) dla zwarć powstających wskutek:

- załączenia zwarcia wyłącznikiem,
- uszkodzenia mechanicznego izolacji,
- przepięcia piorunowego.

W ostatnim przypadku uwzględniono również losowy charakter zmiennej  $R/X$ , wynikający z występowania łuku elektrycznego w obwodzie zwarciovym.

## 2. Analiza współczynnika udaru prądu zwarcia

### 2.1. Załączenie zwarcia wyłącznikiem<sup>1)</sup>

Zamknięcie obwodu zwarciovego występuje w chwili, gdy warstwa izolacyjna między zbliżającymi się stykami wyłącznika zostanie przebita. Zmniejszenie się wytrzymałości przerwy międzystykowej w czasie zależy od konstrukcji wyłącznika oraz od własności dielektrycznych materiału izolacyjnego między stykami. Dla uproszczenia analizy przyjęto liniową zależność wytrzymałości elektrycznej od czasu (rys. 1), zmieniającej się ze stałą prędkością względną:

$$a = - \frac{d\left(\frac{U_w}{\sqrt{2} U_n}\right)}{d(\omega t)} = \operatorname{const}, \quad (3)$$

gdzie:

$U_w$  [kVm] - wytrzymałość elektryczna przerwy międzystykowej (wartość szczytowa),

$U_n$  [kV] - napięcie znamionowe sieci.

<sup>1)</sup>Przypadek występujący często w wyniku nieudanego SPZ.

Zakładając również, że początek procesu zamykania się styków jest jednako prawdopodobny w każdym momencie, warunkowa funkcja gęstości kąta  $\psi$  wynosi:

$$f(\psi/a) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( \frac{\cos \psi}{a} + 1 \right), & \psi_1 \leq \psi \leq \psi_p \\ 0 & , \quad 0 \leq \psi < \psi_1 \quad \text{ i } \quad \psi_p < \psi < \pi \end{cases} \quad (4)$$

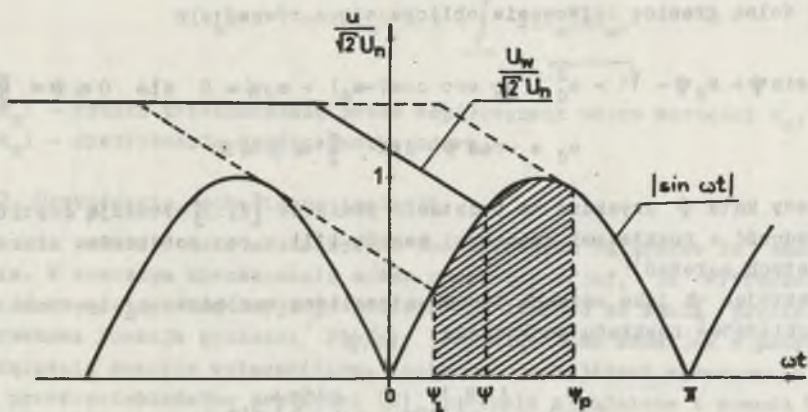
Wynika stąd, że dla  $a < 1$ ,  $\psi_1$  i  $\psi_p$  spełniają równania:

$$\sin \psi_1 + a \psi_1 = \sqrt{1 - a^2} + a \cdot \arccos(-a) - a\pi \quad (5)$$

$$\psi_p = \arccos(-a), \quad (6)$$

natomiast dla  $a \geq 1$ :

$$\psi_1 = 0 \quad \text{ i } \quad \psi_p = \pi \quad (7)$$



Rys. 1. Przebiegi czasowe napięcia w procesie załączania obwodu zwarcio-  
wego wyłącznikiem

Zgodnie z dotychczasowymi wynikami badań [1] założono w uproszczeniu, że prędkość (3) ma rozkład normalny o parametrach zadanych przez producenta wyłącznika, scharakteryzowany za pomocą gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a \sigma} \exp \left[ -\frac{(a - \bar{a})^2}{2(\bar{a}\sigma)^2} \right], \quad (8)$$

gdzie:

$\bar{a}$  - wartość średnia,

$\alpha = \frac{k_0}{a}$  - współczynnik zmienności.

Łączna funkcja gęstości zmiennych  $\psi$  i  $a$ :

$$f(\psi, a) = f(\psi/a) f(a) \quad (9)$$

oraz brzegowa funkcja gęstości zmiennej  $\psi$ :

$$f(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi, a) da. \quad (10)$$

Uwzględniając związki (8) i (9) otrzymuje się, że:

$$f(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \cdot \frac{1}{\bar{a}\alpha} \int_{a_d}^{\infty} \left( \frac{\cos\psi}{a} + 1 \right) \exp \left[ -\frac{(a-\bar{a})^2}{2(\bar{a}\alpha)^2} \right] da, \quad (11)$$

gdzie dolną granicę całkowania oblicza się z równań:

$$\sin\psi + a_d\psi - \sqrt{1 - a_d^2} - a_d \arccos(-a_d) + a_d\pi = 0 \quad \text{dla } 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

$$a_d = -\cos\psi \quad \text{dla } \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi \quad (13)$$

Rozkłady kąta  $\psi$  uzyskane na podstawie pomiarów [2, 3] wykazują dostateczną zgodność z rozkładami opisanymi wzorem (11), co potwierdza słuszność przyjętych założeń<sup>1)</sup>.

Traktując  $\psi$  jako zmienną losową niezależną względem  $k_u$ , gęstość prawdopodobieństwa rozkładu pochodnego:

$$f(k_u) = \left| \frac{d\psi_1}{dk_u} \right| f(\psi_1) + \left| \frac{d\psi_2}{dk_u} \right| f(\psi_2), \quad (14)$$

gdzie:  $\psi_1$  i  $\psi_2$  są funkcjami odwrotnymi współczynnika (2) równymi:

$$\psi_1 = \begin{cases} -\arcsin\left(\frac{k_u-1}{p}\right) + \varphi, & 1 \leq k_u \leq 1+p \sin\varphi \\ -\arcsin\left(\frac{k_u-1}{p}\right) + \varphi + \pi, & 1+p \sin\varphi \leq k_u \leq 1+p \end{cases} \quad (15)$$

<sup>1)</sup> Wykresy rozkładów prawdopodobieństwa kąta  $\psi$  zamieszczono w publikacji [7].

oraz

$$\psi_2 = \arcsin \left( \frac{k_u - 1}{p} \right) + \varphi, \quad 1 \leq k_u \leq 1+p \quad (16)$$

Pochodne funkcji (15) i (16) w całym zakresie zmienności  $k_u$  wynoszą:

$$\left| \frac{d\psi_1}{dk_u} \right| = \left| \frac{d\psi_2}{dk_u} \right| = \frac{1}{\sqrt{p^2 - (k_u - 1)^2}} \quad (17)$$

Po uwzględnieniu wzorów (11) i (17) funkcję gęstości oblicza się metodami numerycznymi. Wyniki przykładowych obliczeń przedstawiono na rys. 2.

Znajomość gęstości prawdopodobieństwa jest wystarczająca dla scharakteryzowania probabilistycznych własności zmiennej losowej, jednak do celów praktycznych bardziej użyteczna jest funkcja wyrażająca prawdopodobieństwo (ryzyko) przekroczenia przez zmienną losową  $u$  zadanej wartości (rys. 3):

$$R(k_u) = 1 - F(k_u) = 1 - \int_{-\infty}^{k_u} f(k_u) dk_u, \quad (18)$$

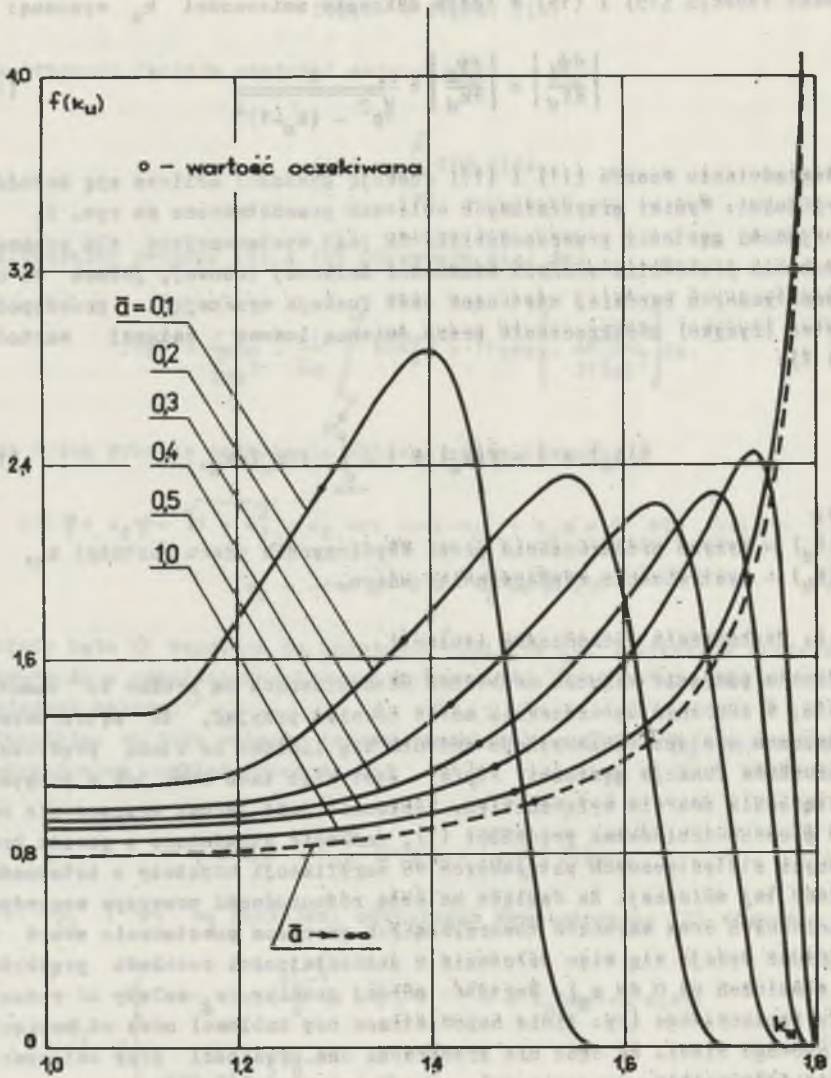
gdzie:

$R(k_u)$  - ryzyko przekroczenia przez współczynnik udaru wartości  $k_u$ ,  
 $F(k_u)$  - dystrybuanta współczynnika udaru.

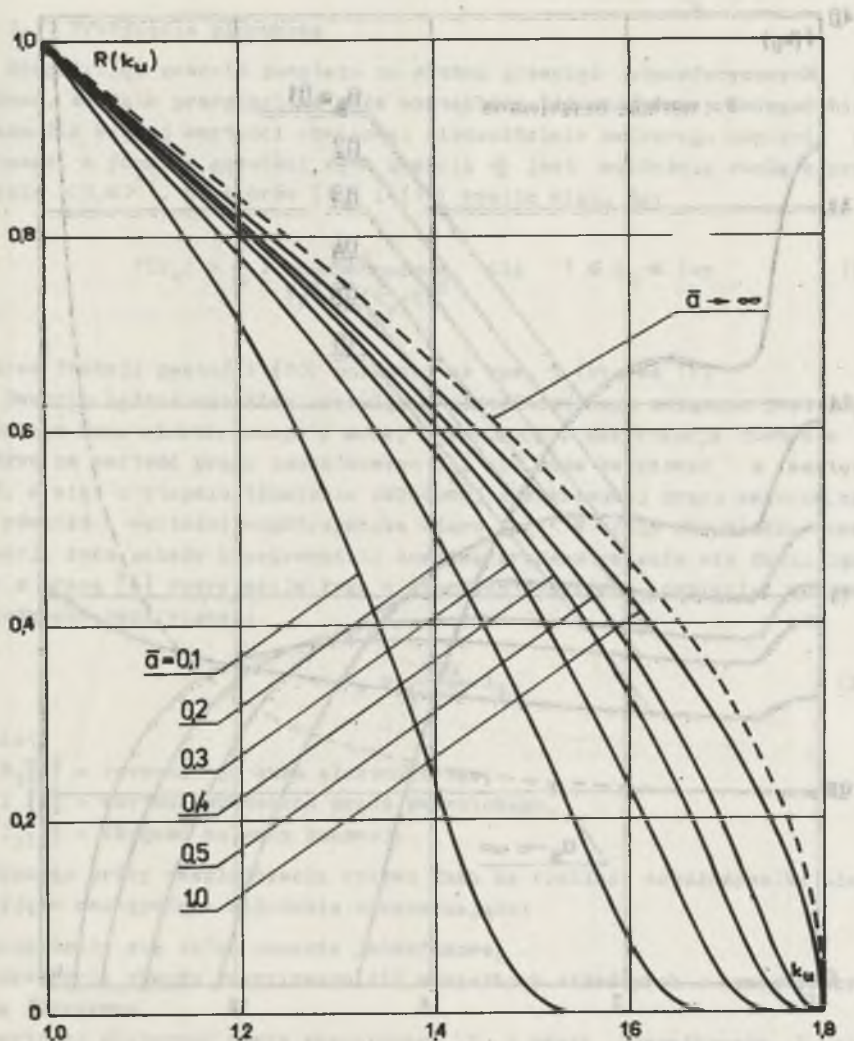
## 2.2. Uszkodzenie mechaniczne izolacji

Zwarcia powstałe wskutek uszkodzeń mechanicznych są trudne do zamodelowania. W znacznym uproszczeniu można również przyjąć, że wytrzymałość elektryczna odstępów izolacyjnego zmienia się liniowo ze stałą prędkością  $a$ . Warunkowa funkcja gęstości  $F(\phi/a)$  jest więc taka sama jak w przypadku załączenia zwarcia wyłącznikiem. Konieczne jest jednak wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa prędkości (3), znacznie utrudnione z powodu braku danych statystycznych potrzebnych do weryfikacji hipotezy o istotności rozkładu tej zmiennej. Ze względu na dużą różnorodność przyczyn uszkodzeń mechanicznych oraz warunków towarzyszących procesom powstawania zwarc uzasadnione wydaje się więc założenie o jednostajności rozkładu prędkości  $a$  (w granicach od 0 do  $a_g$ ). Wartość górnej granicy  $a_g$  zależy od rodzaju układu izolacyjnego (np. linia napowietrzna czy kablowa) oraz od napięcia znamionowego sieci. Na ogół nie przekracza ona prędkości przy załączaniu zwarcia wyłącznikiem.

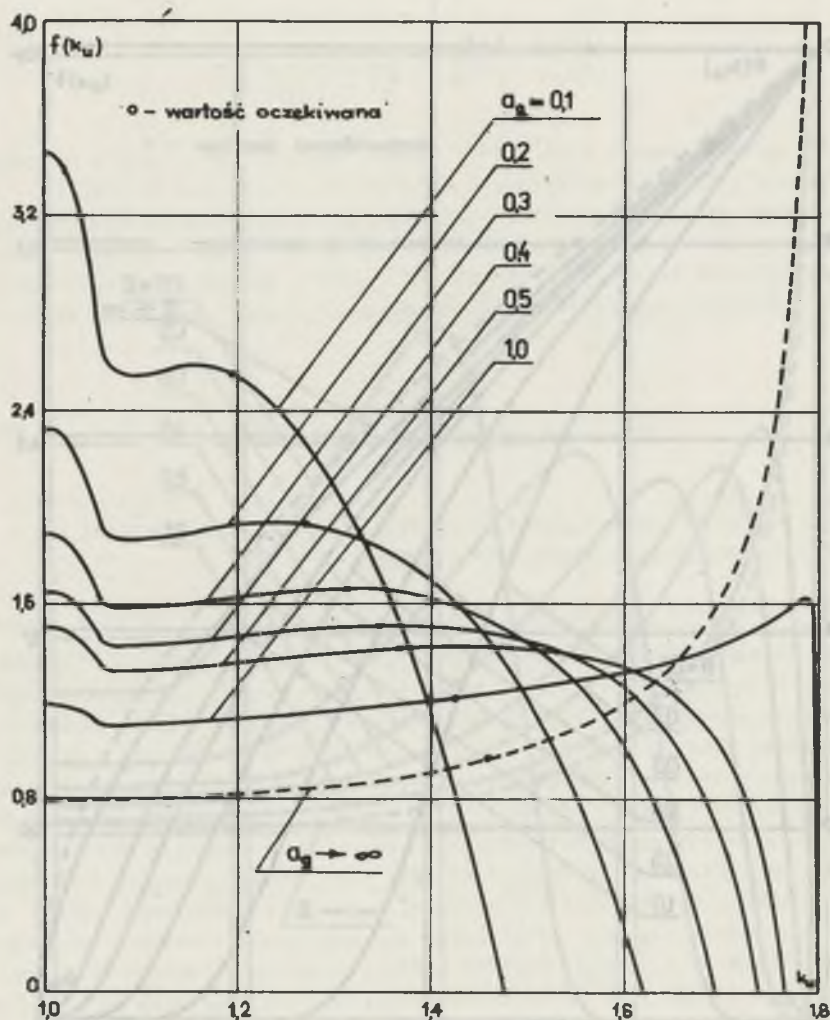
Po uwzględnieniu powyższych założeń oraz zależności (4), (9), (10) brzegowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa kąta zwarcia:



Rys. 2. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa współczynnika uderu  $k_u$  w przypadku załączenia obwodu zwarciovego wyłącznikiem dla wybranych względnych prędkości średnich  $\bar{a}$  obniżania się wytrzymałości międzysystemowej ( $R/X = 0,07$ ,  $\alpha = 0,2$ )



Rys. 3. Funkcje ryzyka przekroczenia zadanej wartości współczynnika uderu w przypadku załączania obwodu zwarcłowego wyłącznikiem (dane wg rys. 2)



Rys. 4. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa współczynnika uderu dla swarc spowodowanych uszkodzeniami mechanicznymi izolacji dla wybranych maksymalnych prędkości  $a_g$  zmniejszania się odstepu izolacyjnego ( $R/X = 0,07$ )



$$f(\psi) = \frac{1}{a_g \pi} \left( \cos \psi \ln \frac{a_g}{a_d} + a_g - a_d \right), \quad (19)$$

przy czym  $a_d$  wynika z równań (12) i (13). Rozkłady pochodne współczynnika udaru, wyznaczone w oparciu o wzory (14), (17) i (19), przedstawiono na rys. 4.

### 2.3. Przepięcia piorunowe

Rozpatrując zwarcia powstałe na skutek przepięć atmosferycznych, założono, że fala przepięciowa może wystąpić z jednakowym prawdopodobieństwem dla każdej wartości chwilowej sinusoidalnie zmiennego napięcia roboczego, a funkcja gęstości kąta zwarcia  $\psi$  jest wartością stałą w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle^1$ . Ze wzorów (14) i (17) wynika więc, że:

$$f(k_u) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - (k_u - 1)^2}} \quad \text{dla} \quad 1 \leq k_u \leq 1+p \quad (20)$$

Wykres funkcji gęstości (20) pokazano na rys. 5 (krzywa 1).

Zwarcie będące wynikiem przepięcia atmosferycznego związane jest z powstaniem łuku elektrycznego o małej rezystancji. Rezystancja łuku nie ma wpływu na wartość prądu początkowego  $I_p$ , ale może decydować o wartości  $R/X$ , a więc o stopniu tłumienia składowej nieokresowej prądu zwarcia, czyli również o wartości współczynnika udaru  $k_u$ . W celu określenia rezystancji łuku należy przeprowadzić analizę procesu palenia się łuku. Zgodnie z pracą [4] rezystancja łuku w sieciach wysokiego napięcia wynika z zależności empirycznej:

$$R_\lambda = \frac{370}{I_{0,87}} l_\lambda, \quad (21)$$

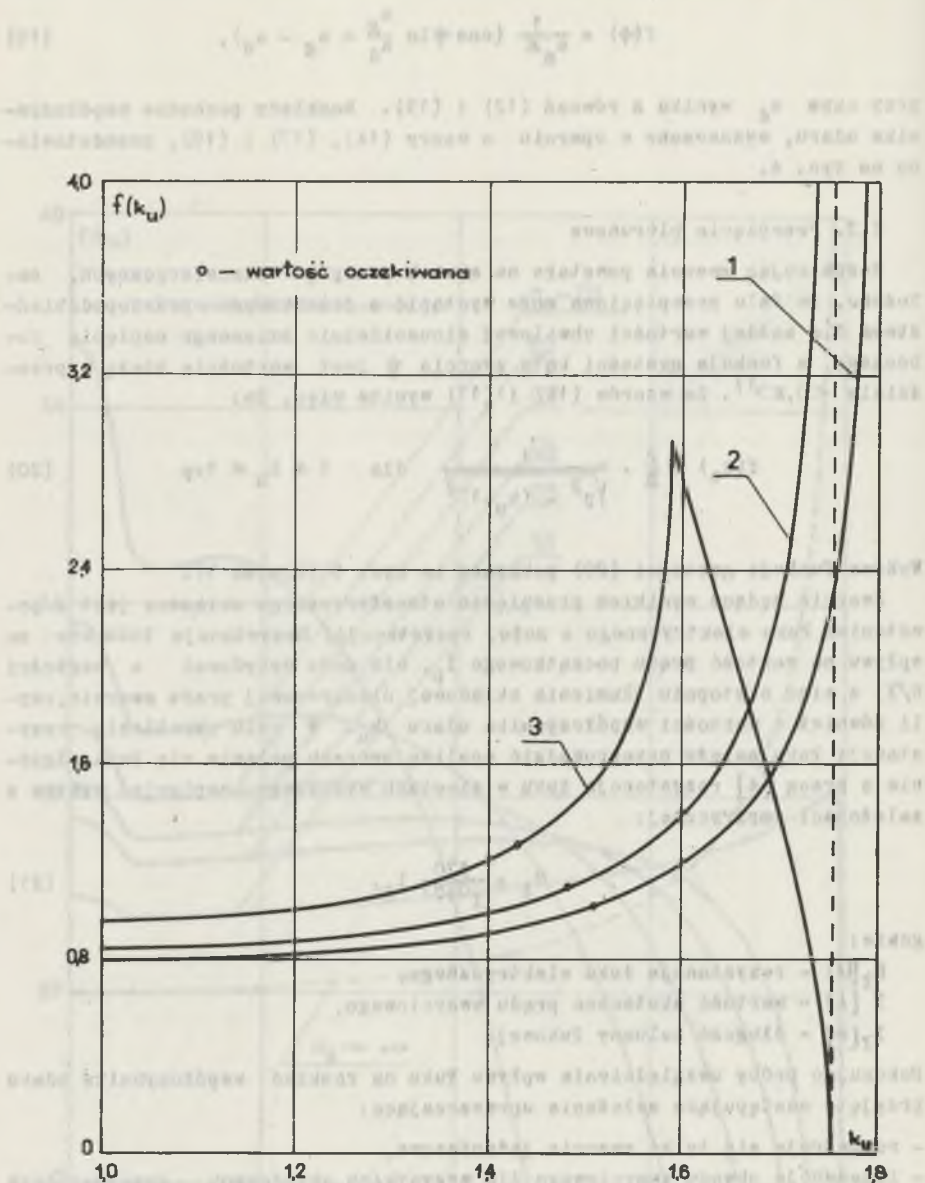
gdzie:

- $R_\lambda [\Omega]$  - rezystancja łuku elektrycznego,
- $I$  [A] - wartość skuteczna prądu zwarciego,
- $l_\lambda$  [m] - długość kolumny łukowej.

Dokonując próby uwzględnienia wpływu łuku na rozkład współczynnika udaru przyjęto następujące założenia upraszczające:

- rozpatruje się tylko zwarcia jednofazowe,
- impedancje obwodu zwarciego dla wszystkich składowych symetrycznych są jednakowe,
- wartości skuteczne prądu zwarciego  $I$  i prądu początkowego  $I_p$  są w przybliżeniu równe,

<sup>1)</sup>Odpowiada to prędkości zamykania obwodu zwarciego  $a = \infty$ .



Rys. 5. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa współczynnika uderu dla zwarć spowodowanych przepięciami piorunowymi w sieci o danych:

$$U = 110 \text{ kV}, I_p = 26 \text{ kA}, l_1 = 1 \text{ m}, R/X = 0,07$$

Oznaczenia funkcji: 1 - dla rezystancji łuku  $R_\lambda = 0$ ; 2 - dla rezystancji łuku wg wzoru (21) i  $l_\lambda = 1$ ; 3 - dla rezystancji łuku wg wzoru (21) i  $l_\lambda = (1 \dots 5) l_1$  (rozkład jednostajny)

- napięcie znamionowe sieci  $U_n$ , prąd początkowy  $I_p$  i długość odstępu izolacyjnego  $l_1$  są wielkościami danymi,
- względna długość łuku  $l = l_2/l_1 = 1...5$ , przy czym każda z wartości w podanym przedziale występuje z jednakowym prawdopodobieństwem.

Uwzględniając podane założenia i wzór (21) przyrost wartości  $R/X$  spowodowany istnieniem łuku:

$$\Delta\left(\frac{R}{X}\right) = \frac{370 \cdot \sqrt{3} I_p l_1}{1,4(1000 I_p)^{0,87} U_n} l = c1, \quad (22)$$

gdzie:

- $I_p$  [kA] - prąd początkowy w miejscu zwarcia,
- $U_n$  [kV] - napięcie znamionowe sieci,
- $l_1$  [m] - długość odstępu izolacyjnego,
- $l$  - względna długość łuku.

Ze wzorów (20) i (22) wynika, że warunkowa gęstość prawdopodobieństwa współczynnika udaru

$$f(k_u/l) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(pq^1)^2 - (k_u-1)^2}} \quad \text{dla} \quad 1 \leq k_u \leq 1+pq^1, \quad (23)$$

gdzie  $q = e^{-\pi c}$  - parametr obliczeniowy.

Natomiast zgodnie ze wzorami (9) i (10) brzegowa funkcja gęstości:

$$f(k_u) = \frac{1}{2\pi^2 c(k_u-1)} \left[ \text{arc tg} \sqrt{\left(\frac{pq}{k_u-1}\right)^2 - 1} - D \right], \quad (24)$$

gdzie:

$$D = \text{arc tg} \sqrt{\left(\frac{pq^5}{k_u-1}\right)^2 - 1} \quad \text{dla} \quad 1 \leq k_u < 1 + pq^5 \quad (25)$$

oraz

$$D = 0 \quad \text{dla} \quad 1 + pq^5 \leq k_u \leq 1 + pq. \quad (26)$$

Wykresy funkcji (23) i (24) podano na rys. 5 (krzywe 2 i 3).

### 3. Podsumowanie

Przedstawione modele probabilistyczne wskazują na duże prawdopodobieństwo największych prądów udarowych w czasie zwarć załączonych wyłącznikiem o dużej szybkości działania oraz w czasie zwarć spowodowanych przepięciami piorunowymi. Nie analizowano przepięć łączeniowych i narażenia

zabrudzeniowego izolacji jako przyczyn powstawania zwarć. Z badań nad mechanizmem przeskoku zabrudzeniowego przy napięciu roboczym [5] oraz nad powstawaniem przepięć łączeniowych [6] wynika jednak, że zwarcie jest najbardziej prawdopodobne, gdy wartość kąta  $\psi$  zbliżona jest do  $\pi/2$  (maksymalna wartość napięcia zasilającego). Uwzględniając również zjawisko zmniejszania się udarowego prądu zwarcia po zapłonie łuku elektrycznego można oczekiwać, że zwarcia spowodowane przepięciami łączeniowymi oraz narażeniami zabrudzeniowymi nie powodują silnych efektów dynamicznych.

Rozważania dotyczą obwodów jednofazowych (zwarcie jedno- i dwufazowe), podczas gdy największe obciążenia elektrodynamiczne występują przy niejednoczesnym załączeniu zwarć dwufazowych doziemnych i trójfazowych. Prace nad tym zagadnieniem powinny być więc kontynuowane.

#### LITERATURA

- [1] Kmieć A.: Rozkłady prawdopodobieństwa kątów fazowych załączenia. Energetyka 1968, nr 7.
- [2] Artbauer O., Liptak N.: Załączanie prądu przemiennego. Przegl. Elektrotechn. 1967, nr 2.
- [3] Wnuk J.: Analiza modelowa rozkładu prawdopodobieństwa kąta fazowego napięcia w chwili zwarcia wybranych urządzeń rozdzielczych. Praca dyplomowa IEiSU Pol. Śl., Gliwice 1980.
- [4] Schier A.: Resistance of electrical fault arc in very high voltage networks. Elec. India 1970, 10 nr 8.
- [5] Pohl Z.: Izolacja wysokonapięciowa w warunkach zwiększonej upływności powierzchniowej. Pr. nauk. IPEiE Pol. Wrocławskiej nr 10, monogr. nr 4, Wrocław 1975.
- [6] Ciok Z.: Przepięcia łączeniowe w układach elektroenergetycznych. Kom. Elektrot. PAN, PWN Warszawa 1972.
- [7] Błaszczuk A., Gacek Z.: Probabilistyczne ujęcie udarowego prądu zwarciowego. Przegląd Elektrotechn. 1982, nr 11-12

Recenzent: doc. dr hab. inż. Zbigniew Kowalski

Wpłynęło do redakcji dnia 24.VII.1982 r.

#### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УДАРНОГО ТОКА КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

#### Резюме

В статье показаны вероятностные математические модели описывающие распределения вероятностей ударного тока короткого замыкания. Рассмотрены различные причины коротких замыканий: включение короткого замыкания выключателем, механическое повреждение изоляции, атмосферное перенапряжение. Функции плотности ударного коэффициента получены на основе анализа явлений появляющихся в процессе возникновения короткого замыкания.

COMPUTATIONAL MODELS OF A SHORT-CIRCUIT SURGE CURRENT  
PROBABILITY DISTRIBUTION

S u m m a r y

The article presents probabilistic mathematical models concerning the probability distribution of a short-circuit surge current.

Various causes of short-circuit have been considered e.g. switching on a short-circuit, a mechanical damage of an insulation, or a lightning surge. The density function of a surge coefficient has been obtained on the basis of the analysis of phenomena which occur in the short-circuit formation process in electrical devices.