

Tadeusz Szkodny

Politechnika Śląska

### WYZNACZANIE PARAMETRÓW STEROWANIA ROBOTÓW W OPARCIU O RÓWNIANIA KINEMATYKI MANIPULATORÓW

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono ogólne równania kinematyki manipulatorów, przy użyciu transformat homogenicznych. Przedstawiono podstawowe własności transformat homogenicznych oraz porównano je z innymi rodzajami transformat. Dla przykładowego manipulatora wyznaczono równania kinematyki i podano sposób wyznaczania wartości zadanych dla sterowań w poszczególnych stopniach swobody.

#### Wstęp

Głównym zadaniem manipulatora robota jest przenoszenie i odpowiednia orientacja przedmiotu manipulowanego. Wiadomo, że pełny opis orientacji przedmiotu manipulowanego wymaga znajomości sześciu współrzędnych. Trzy współrzędne określają położenie dowolnego punktu przedmiotu, a trzy dalsze jego orientację względem tego punktu /którymi mogą być kąty Eulera/. Zatem dla dowolnej manipulacji przedmiotami, robot musi mieć sześć stopni swobody.

Dla potrzeb przemysłowych, wystarcza często możliwość manipulowania z pięcioma lub nawet mniejszą liczbą stopni swobody. Dlatego też stosunkowo dużo firm produkuje roboty z trzema, czterema i pięcioma stopniami swobody [2,3].

Oprócz spotykanych robotów o sześciu stopniach swobody produkuje się roboty o siedmiu stopniach swobody, które umożliwiają omijanie przeszkód podczas manipulowania.

W pierwszym punkcie uzasadniono wybór transformat homogenicznych do opisu transformacji układów współrzędnych w kolejnych ogniach manipulatora oraz omówiono podstawowe własności tych transformat. Przedstawiono transformację homogeniczną wektora, przesunięcia i obrotu.

W drugim punkcie przedstawiono ogólny schemat tworzenia równań kinematyki i wykorzystano go dla przykładowego manipulatora o sześciu stopniach swobody.

W trzecim punkcie z równań kinematyki przykładowego manipulatora wyznaczono sposób obliczania wartości zadanych dla poszczególnych stopni swobody.

W czwartym punkcie sformulowano wnioski.

W uzupełnieniu przebadano własności transformat homogenicznych.

## 1. Transformaty homogeniczne

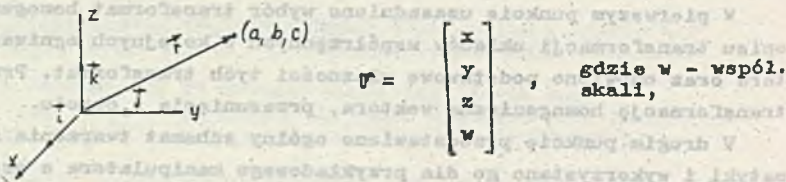
Położenie ramion manipulatora można określić różnymi sposobami. Można opisywać położenie każdego ramienia względem układu bazowego za pomocą sześciu współrzędnych /trzy współrzędne, np. środka ciężkości, oraz trzy współrzędne orientacji/ lub położenie względem sąsiedniego ramienia za pomocą jednej współrzędnej. Drugi sposób opisu jest znacznie prostszy i dlatego dalej będziemy go stosować. W tym sposobie współrzędne ramion odpowiadają poszczególnym stopniom swobody i nazywamy je współrzędnymi naturalnymi [2].

Do opisu położenia ramion we współrzędnych naturalnych możemy stosować zapis tensorowy, wektorowy bądź macierzowy. Można także stosować opis macierzowy zmodyfikowany, tzn. homogeniczny.

Zapis tensorowy łącznie z umową sumacyjną Einsteina [1,4,5] jest stosunkowo prosty, lecz mało komunikatywny. Zapis wektorowy wymaga wprowadzenia wielu nowych wersorów jednostkowych /dla każdego ogniwa trzy wersory/. Zapis macierzowy jest wygodny do programowania obliczeń za pomocą elektronicznej techniki obliczeniowej, lecz z budowy macierzy nie można wprost wywnioskować o wzajemnych położeniach układów współrzędnych. Zapis homogeniczny posiada zaletę zapisu macierzowego a także wprost z budowy macierzy homogenicznej można wywnioskować o wzajemnym położeniu i orientacji układów współrzędnych. Ostatnia zaleta czyni transformaty homogeniczne układów współrzędnych najbardziej przydatnymi do opisu ruchu manipulatorów.

### Zapis wektora

Wektor, jak na rys. 1.  $\vec{r} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ , można zapisać w postaci jednokolumnowej macierzy homogenicznej jak poniżej



Rys. 1. Wektor  $\vec{r}$  w układzie współrzędnych  $x, y, z$ .

Vector  $\vec{r}$  in coordinates system  $x, y, z$ .

Elementy macierzy  $x, y, z$  są przeskalowanymi składowymi wektora  $\vec{r}$  za pomocą współczynnika w  $x = aw, y = bw, z = cw$ . Kierunek można zapisać za pomocą wektora, którego koniec znajduje się w nieskończoności. Macierz homogeniczna kierunku ma zatem postać  $r^T = [x, y, z, 0]$ .

### Zapis układu współrzędnych

Położenie i orientację dowolnego prostokątnego układu współrzędnych względem układu bazowego można zapisać w postaci macierzy homogenicznej:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 2. Ilustracja transformaty homogenicznej  
Illustration of homogeneous transformation

W uzupełnieniu wykazano, że kierunki  $[n_x, n_y, n_z, 0]^T$ ,  $[o_x, o_y, o_z, 0]^T$ ,  $[a_x, a_y, a_z, 0]^T$  oraz wektor  $[p_x, p_y, p_z, 1]^T$  są odpowiednio kierunkami osi  $x, y, z$   $T$ -układu, oraz wektorem przesunięcia początku  $T$ -układu współrzędnych.

Z powyższego wynika, że transformata homogeniczna ukł. bazowego ma postać macierzy jednostkowej o wymiarach  $4 \times 4$ .

### Transformacje przemieszczeń i obrotów układów współrzędnych

Przemieszczenie układu współrzędnych o wektor  $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  można zapisać w postaci macierzy transformacji homogenicznej przemieszczenia;

$$\text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & a \\ 0, & 1, & 0, & b \\ 0, & 0, & 1, & c \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Obrót układów współrzędnych o kąt  $\Theta$  wokół osi  $x, y, z$  można zapisać w postaci macierzy transformacji homogenicznych obrotów;

$$\text{Rot}(x, \Theta) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\Theta, & -\sin\Theta, & 0 \\ 0, & \sin\Theta, & \cos\Theta, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Rot}(y, \Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta, & 0, & \sin\Theta, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ -\sin\Theta, & 0, & \cos\Theta, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(z, \Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta, & -\sin\Theta, & 0, & 0 \\ \sin\Theta, & \cos\Theta, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

/2a, b, c/

### Względność złożonych transformat homogenicznych

Transformaty złożone są ciągiem kolejnych transformat takich jak, np. obrót lub przemieszczenie. Transformaty takie możemy zatem zapisać w postaci iloczynu transformat

$$\bar{T} = \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_3 \dots \bar{T}_n. \quad /3/$$

Iloczyn ten można obliczyć dwoma sposobami:

a/ obliczając  $\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2$ , następnie  $(\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2) \cdot \bar{T}_3$  itd.,

b/ obliczając  $\bar{T}_{n-1} \cdot \bar{T}_n$ , następnie  $\bar{T}_{n-2} \cdot (\bar{T}_{n-1} \cdot \bar{T}_n)$  itd.

Oba sposoby są równoważne z matematycznego punktu widzenia. Jednak interpretacja fizyczna dla tych sposobów różni się. W sposobie a/ kolejne transformacje wykonywane są względem aktualnego układu współrzędnych /wynikłego z dotychczasowych transformacji/. W sposobie b/ wszystkich transformacji dokonuje się względem układu bazowego. Powyższą własność łatwo sprawdzić.

## 2. Równania kinematyki manipulatorów

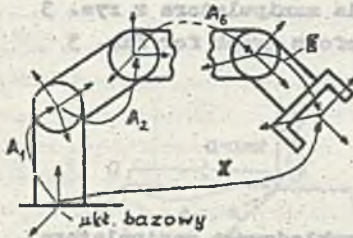
Manipulator można rozpatrywać, jako szereg ogniw połączonych przegubami. Każdemu ogniwu można przypisać układ współrzędnych. Korzystając z transformat homogenicznych można opisać wzajemne położenia i orientację pomiędzy układami współrzędnych. Transformatę wiążącą układy współ-

rzędnych sąsiednich ogniw oznaczymy przez  $A$ . Macierz ta jest homogeniczną transformacją przesunięcia bądź rotacji sąsiednich układów współrzędnych. Niech  $A_1$  opisuje położenie i orientację pierwszego ogniwa względem układu bazowego,  $A_2$  - drugiego względem pierwszego itp. Położenie i orientację drugiego ogniwa we współrzędnych bazowych przedstawia iloczyn macierzy:

$$T_2 = A_1 \cdot A_2 \quad /4/$$

Ogólnie dla  $i$ -tego ogniwa,

$$T_i = \prod_{k=1}^i A_k \quad /5/$$



Rys. 3. Opis orientacji i położenia manipulatora

Describe of orientation a manipulator.

Opis końca manipulatora o sześciu stopniach swobody /patrz rys. 3/, czyli szóstego ogniwa w odniesieniu do  $i$ -tego układu dany jest przez  ${}^i T_6$ , gdzie

$${}^i T_6 = \prod_{k=i+1}^6 A_k \quad /6/$$

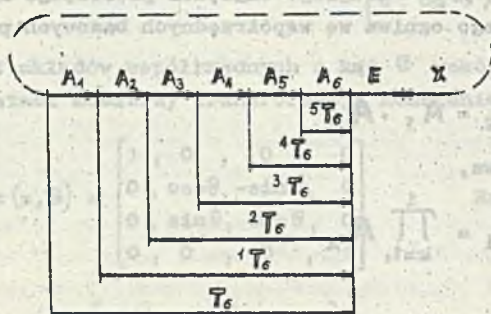
Położenie ogniwa 6 względem układu bazowego opisuje:

$$T_6 = \prod_{k=1}^6 A_k \quad /7/$$

Jeśli położenie chwytaka względem ogniwa 6 opisuje transformata  $E$  /patrz rys. 3/, wtedy położenie i orientację chwytaka  $X$  opisuje równanie kinematyki

$$X = T_6 \cdot E \quad /8/$$

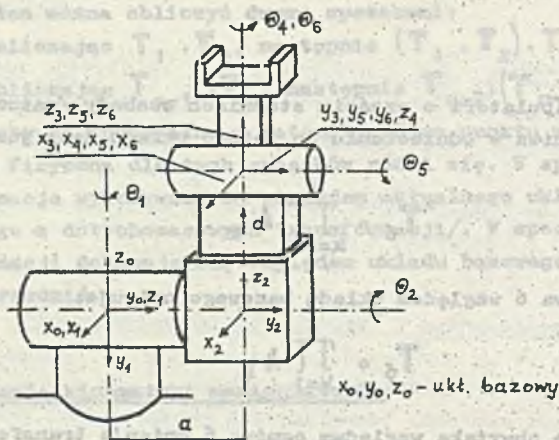
Zależność tę można opisać za pomocą grafu jak na rys. 4.



Rys. 4. Graf transformacji dla manipulatora z rys. 3.  
The manipulator transform graph for fig. 3

#### Równania kinematyki dla przykładowego manipulatora

Dla przykładowego manipulatora pokazanego na rys. 6 wyznaczmy równania ruchu kolejnych ogniw względem sąsiednich, wyznaczając kolejne  $A$ .

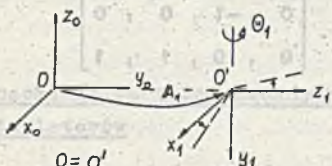


Rys. 5. Przykładowy manipulator

Example manipulator

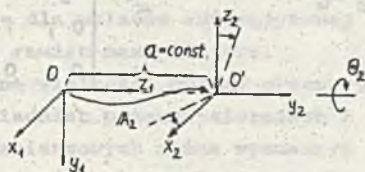
Oznaczmy  $\sin \theta_1 = S_1$ ,  $\cos \theta_1 = C_1$

I ogniwo



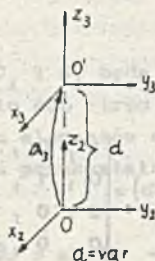
$$A_1 = \text{Rot}(x, -90^\circ) \cdot \text{Rot}(y, -\theta_1) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II ogniwo



$$A_2 = \text{Rot}(x, 90^\circ) \cdot \text{Trans}(0, a, 0) \cdot \text{Rot}(y, \theta_2) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

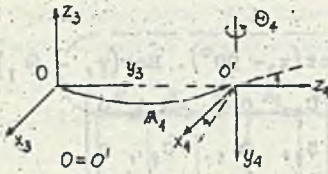
III ogniwo



$$A_3 = \text{Trans}(0, 0, d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV ogniwo

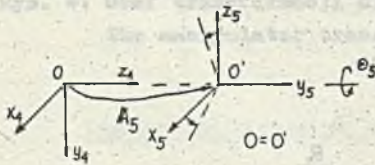
$$A_4 = \text{Rot}(x, -90^\circ) \cdot \text{Rot}(y, -\theta_4) =$$



$$= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

V ogniwo

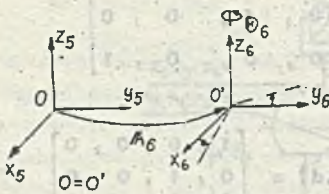
$$A_5 = \text{Rot}(x, 90^\circ) \text{Rot}(y, \theta_5) =$$



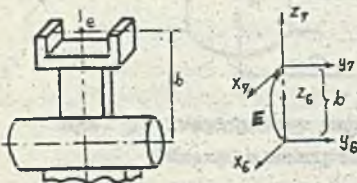
$$= \begin{bmatrix} C_5 & 0 & -S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VI ogniwo

$$A_6 = \text{Rot}(z, \theta_6) = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Chwytnik



$$E = \text{Trans}(0,0,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Równanie kinematyki dla chwytaka w układzie bazowym będzie:

$$X = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_6 \cdot E \quad /9/$$

Znając zależności czasowe  $\theta_1, \theta_2, d, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  i  $\theta_6$  można wyznaczyć położenia względne ogniw.

### 3. Wyznaczanie wartości zadanych dla poszczególnych stopni swobody manipulatorów

Jeśli znamy przebiegi czasowe współrzędnych naturalnych i transformaty  $A_1$ , wtedy łatwo możemy wyznaczyć trajektorię ruchu chwytaka  $X(t)$ . Można problem postawić odwrotnie, tzn. znana jest pożądana trajektoria  $X(t)$ , a nie znamy odpowiadających jej przebiegów czasowych współrzędnych naturalnych. Problem taki pojawia się, np. przy palnikowym wycinaniu z blach figur o różnym kształcie. Do realizacji wyznaczonej trajektorii  $X(t)$ , niezbędnymi są odpowiadające jej współrzędne naturalne, które stanowią wartości zadane dla układów automatycznej regulacji, sterujących poszczególnymi napędami ramion manipulatora.

Aby wyznaczyć szukane wielkości musimy skorzystać z równań macierzowych /5 ÷ 8/. Po odpowiednich przekształceniach i porównaniu odpowiednich elementów równań macierzowych można wyznaczyć szukane współrzędne, a tym samym przebiegi wartości zadanych w kolejnych stopniach swobody manipulatora.

Znajdziemy przebiegi wartości zadanych  $\theta_1, \theta_2, d, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$  przykładowego manipulatora omówionego w p. 2. Założmy, że znana macierz  $X$  po pomnożeniu przez  $E^{-1}$  daje macierz  $T_6$  o elementach:

$$X \cdot E^{-1} = T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad /10/$$

Oznaczenia  $C_1$  i  $S_1$  będą oznaczać te same wielkości co w p. 2.

Po obliczeniu obu stron równania  $A_1^{-1} T_6 = A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$  i porównaniu elementów czwartych kolumn /z lewej i prawej strony równania/, oraz pewnych przekształceń otrzymano:

$$\theta_1 = \arctg \frac{p_y}{p_x} - \arctg \frac{a}{(p_x^2 + p_y^2 - a^2)^{1/2}}, \quad /11/$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{c_1 p_x + s_1 p_y}{p_z} \quad /12/$$

Po wyznaczeniu równania  $A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \bar{T}_6 = A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$  i porównaniu elementów (3,4)/trzeci wiersz, czwarta kolumna/ otrzymano:

$$d_3 = S_2 (c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2 p_z \quad /13/$$

natomiast z porównania elementów (1,3) oraz (2,3) po pewnych przekształceniach otrzymano:

$$\theta_4 = \operatorname{arctg} \frac{-S_1 a_x + c_1 a_y}{c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - S_2 a_z}, \text{ dla } \theta_5 > 0. \quad /14/$$

Z równania  $A_4^{-1} A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \bar{T}_6 = A_5 \cdot A_6$  przez porównanie elementów (1,3) oraz (2,3) i odpowiednie przekształcenia otrzymujemy:

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \frac{c_4 [c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - S_2 a_z] + S_4 (-S_1 a_x + c_1 a_y)}{S_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) + c_2 a_z} \quad /15/$$

Z równania  $A_5^{-1} \cdot A_4^{-1} \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \bar{T}_6 = A_6$  przez porównanie elementów (1,2) oraz (2,2) i odpowiednie przekształcenia otrzymujemy:

$$\theta_6 = \operatorname{arctg} \frac{S_6}{C_6}, \quad /16/$$

gdzie:

$$S_6 = -C_5 \{ c_4 [c_2 (c_1 o_x + s_1 o_y) - S_2 o_z] + S_4 (-S_1 o_x + c_1 o_y) \} + S_5 \{ S_2 (c_1 o_x + s_1 o_y) + c_2 o_z \},$$

$$C_6 = -S_4 [c_2 (c_1 o_x + s_1 o_y) - S_2 o_z] + c_4 (-S_1 o_x + c_1 o_y).$$

Z rys. 6 wynika, że jeśli  $\theta_5 = 0$ , wtedy można dokładnie określić tylko sumę  $\theta_4 + \theta_6$ , a nie  $\theta_4$ .  $\theta_4$  bądź  $\theta_6$  może wtedy przybrać dowolną wartość. Potwierdzają to rachunki, otóż ułamek w /14/ powstał z uproszczenia licznika i mianownika przez  $S_5$  /dlatego powinno być  $S_5 \neq 0$  lub  $\theta_5 \neq 0$ .

W procesie sterowania wygodnie jest ustalać np.  $\theta_4$  na czas zerowania się  $\theta_5$ . W ten sposób jednoznacznie określone jest  $\theta_6$ , a także zapewniana się płynność wartości zadanych  $\theta_4(t)$  i  $\theta_6(t)$ .

#### 4. Wnioski

Z pracy wynika, że stosowanie transformat homogenicznych umożliwia prostą analizę kinematyki manipulatorów dowolnego typu. Znająco w danej chwili transformaty  $A_i$ , jesteśmy w stanie prosto określić wzajemną orientację ramion, a także położenie i orientację manipulowanego przedmiotu w przestrzeni roboczej robota [2,3].

Równania kinematyki /5-8/ umożliwiają, dla dowolnego manipulatora, określenie przebiegów współrzędnych naturalnych /stanowiących wartości zadane dla automatycznych układów regulacji napędów ramion/ zapewniających realizację żądanej trajektorii i orientacji przedmiotu manipulowanego. Jednocześnie umożliwiają określenie możliwości pojawienia się niejednoznaczności wartości zadanych, a także ustalenie optymalnej strategii sterowania w takich przypadkach.

Dla manipulatorów z siedmioma stopniami swobody siedem współrzędnych naturalnych wyznacza trajektorię i orientację przedmiotu manipulowanego oraz dodatkowo trajektorię wyznaczoną przez przeszkodę pojawiającą się przy manipulowaniu. W tym przypadku równania kinematyki i wraz z równaniem przeszkód pozwalają wyznaczyć wartości zadane dla żądanej trajektorii i orientacji przedmiotu manipulowanego, aczkolwiek należy się spodziewać większej liczby niejednoznaczności. Dlatego konieczna jest analiza tych niejednoznaczności pod kątem wyboru optymalnej strategii sterowania.

#### Uzupełnienie

Zbadamy tu własności transformat homogenicznych  $T$  opisujących transformowany układ we współrzędnych układu bazowego. Aby wyznaczyć współrzędne bazowe wektora  $V$  opisanego w układzie transformowanym  $T$  przez  $T^{-1}V$ , należy wyznaczyć iloczyn:

$$r = T^{-1} \cdot T r \quad /I/$$

Wyznamy opis wektorów jednostkowych  $x, y, z$ , oraz początku układów współrzędnych transformowanego układu  $T$ , we współrzędnych układu bazowego

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,/II/$$

$$i = T \cdot T^T i, \quad j = T \cdot T^T j, \quad k = T \cdot T^T k \quad /III/$$

Jeśli

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{to} \quad /IV/$$

$$i = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad /V/$$

Z /IV/ i /V/ widać, że kolejne kolumny transformaty  $T$  wprost opisują orientację osi  $x, y, z$ , oraz położenie początku układu współrzędnych  $T$  we współrzędnych bazowych.

#### LITERATURA

- [1] Paul R.P.: Robot Manipulators: Matematic, Programming, and Control., MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England 1983.
- [2] Niederliński A.: Roboty przemysłowe, Wydawnictwa Szkolne i Pedagog., Warszawa 1981.
- [3] Kowalowski H. i inni.: Automatyzoacja dyskretnych procesów przemysłowych, WNT, Warszawa 1984.
- [4] Whitney D.E.: The Matematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators. Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Dec. 1972.
- [5] Paul R.P.: The Matematic of Computer Controlled Manipulation. The 1977 Joint Automatic Control Conference, July 1977.

Recenzent: Prof.dr h.inż. Antoni Woźniak

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОВ НА ОСНОВАНИИ УРАВНЕНИЙ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

### Р е з ю м е

В работе представлены общие уравнения кинематики манипуляторов с использованием однородных преобразований. Приведены основные свойства однородных преобразований и дано сравнение с другими преобразованиями. Для примерного манипулятора определены кинематические уравнения и дан способ определения заданных значений для управлений для отдельных степеней свободы.

### THE COMPUTATION OF CONTROL PARAMETERS FROM KINEMATIC EQUATIONS FOR ROBOTS

### S u m m a r y

In this paper general kinematic equations are presented for manipulators. The homogenous transform is used. Manipulators setting values are computed in each joint as an example.