ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 86 Nr kol. 896

Andrzej Świerniak
Politechnika Śląska

STEROWANIE UKŁADEM NAPĘDOWYM ROBOTA PRZY NIEPEŁNEJ INFORMACJI O MODELU I ZAKŁÓCENIACH

Streszczenie. W artykule przedstawiono algorytm sterowania układem napędowym robota zapewniający "praktycznie" stabilną pracę bądź gwarentowany koszt pomimo niepełnej informacji o modelu i zakłóceniach. Synteza algorytmu oparta jest o wykorzystanie funkcji Lapunowa dla modelu nominalnego, a uzyskane prawo sterowania jest funkcją z nasyceniem, w granicznym przypadku stając się sterowaniem przekaźnikowym.

1. Wstęp

Szybkość działania i precyzyjne odtwarzanie pożądanej trajektorii ruchu należą do podstawowych wymagań stawianych robotom. Realizacja tych wymagań związana jest z koniecznością pełnej znajomości obiektu robot-element transportowany . Z drugiej strony złożoność tego obiektu jak również zmienność obciążeń powodują, iż najczęściej mamy do czynienia z niepełną informacją o modelu i zakłóceniach. Proponowana w pracy metoda syntezy umożliwia uzyskanie ruchu dostatecznie bliskiego zadanej trajektorii w przypadku, gdy znane są jedynie pewne nierównościowe ograniczenia na różnice między bezwładnością, dysypacją, sprężystością i obciążeniem w modelu nominalnym a ich rzeczywistymi postaciami w układzie napędowym.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy uproszczony problem sterowania w układzie napędowym. Załóżmy, że interesuje nas jedynie obrót masy transportowanej względem jednej osi przy pozostałych kątach stałych. Wszystkie przeprowadzone tu rozważania można w łatwy sposób rozszerzyć w przypadku złożonych ruchów robota.

Równanie ruchu interesującego nas ramienia obciążonego masą można zapisać w postaci :

$$\ddot{x} = [a(x, \dot{x}, t) + \Delta a(x, \dot{x}, t)]\,\dot{x} + b(x, t) + \Delta b(x, t) + [c(x, \dot{x}, t) + \Delta c(x, \dot{x}, t)]\,u + d(x, \dot{x}, t)\,v \qquad /1/$$

gdzie $a(x, \dot{x}, t)$, $b(x, t)$, $c(x, \dot{x}, t)$ są znanymi funkcjami używanymi w modelu nominalnym, $\Delta a(x, \dot{x}, t)$, $\Delta b(x, t)$, $\Delta c(x, \dot{x}, t)$ są nieznanymi odchyłkami od funkcji nominalnych występującymi w rzeczywistym układzie napędowym, u jest sygnałem sterującym elementu napędowego przewidzianego do ustawienia kąta x, v jest nieznaną wielkością zakłócającą, np. obciążeniem. Model nominalny otrzymuje się przy odchyłkach i zakłóceniach równych zero.

Zakładamy, że nie został przekroczony "próg niepewności" rozumiany w tym sensie, że tor sterowania jest "silniejszy" od toru niepewności, tzn. możliwa jest dekompozycja :

$$\Delta a = c\, a_1, \quad \Delta b = c\, b_1, \quad d = c\, d_1, \quad \Delta c = c\, c_1 \qquad /2/$$

a także znane są ograniczenia górne niepewności :

$$|a_1 \dot{x}| \leq A(x,\dot{x},t), \quad |b_1| \leq B(x,t), \quad |c_1| \leq C(x,\dot{x},t) < 1$$

$$|d_1 v| \leq D(x,\dot{x},t) \qquad /3/$$

Zakładamy ponadto, że rozwiązanie $(x(t), \dot{x}(t)) \equiv (0,0)$ dla swobodnego modelu nominalnego jest asymptotycznie globalnie stabilne w sensie Lapunowa p. np. [1] i można znaleźć funkcję Lapunowa $V(x,\dot{x},t)$ dla tego modelu. W przypadku stacjonarnym często wystarczy przyjąć uproszczoną formę Łurie [2] jako funkcję Lapunowa :

$$V(x,\dot{x}) = \dot{x}^2 - 2\int_0^x b(y)\,dy \qquad /4/$$

Warunki dostateczne asymptotycznej stabilności globalnej uzyskuje się wówczas poprzez założenie, że

$$b(x)\,x \leq 0 \qquad b(0) = 0 \qquad /5/$$

oraz $\quad a(x,\dot{x}) < 0 \qquad /6/$

gdyż dla modelu nominalnego pochodna funkcji Lapunowa liczona wzdłuż trajektorii ma postać :

$$V_N = 2a(x,\dot{x})\,\dot{x}^2 \qquad /7/$$

Model z niepewnością /1/ wymaga innego określenia stabilności trajektorii

niż definicja Lapunowa. Wprowadzimy w tym celu pojęcie stabilności "praktycznej" [3] w nieco odmiennym sensie niż definicja zaproponowana przez La Salle'a [1]. Żądać będziemy mianowicie, aby dla wszystkich możliwych wartości zmiennych niepewnych rozwiązania równania /1/ były jednostajnie ograniczone [4] oraz by istniało otoczenie zera, w którym wszystkie rozwiązania są ostatecznie jednostajnie ograniczone [5], przy czym otoczenie to można uczynić dowolnie małym.

Precyzyjne zdefiniowanie wymagania stawianego prawu sterowania oraz jego syntezę przedstawia rozdział 3. W rozdziale 4 natomiast formułuje się nieco odmienne sformułowanie celu sterowania polegające na wymaganiu zapewnienia zadanej wartości wskaźnika kosztu, niemniej jednak synteza prawa sterowania przebiega podobnie.

3. Synteza układu praktycznie stabilnego

Poszukiwać będziemy prawa sterowania:

$$u = k(x, \dot{x}, t) \qquad /8/$$

zapewniającego praktyczną stabilność w stopniu q, tzn. dla dowolnego $r > 0$:

1. zamknięty układ /1/ ze sterowaniem /8/ posiada rozwiązanie z warunkiem $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = 0$, $|x_0| \leq r$ dla każdego $t \in [t_0, t_1]$ jednostajnie ograniczone, tzn. istnieje stała $p(r)$ taka, że
$$\sqrt{x^2(t) + \dot{x}^2(t)} \leq p(r) \text{ dla każdego } t \in (t_0, t_1)$$
2. rozwiązanie to jest przedłużalne na dodatniej półosi i ostatecznie ograniczone dla dowolnego $f \geq g$, tzn. dowolne rozwiązanie $x(t)$ dla każdego $t \in [t_0, \infty)$ z warunkiem $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = 0$, $|x_0| \leq r$ posiada tę własność, że istnieje czas $T(f, r) < \infty$ taki, że $\sqrt{x^2(t) + \dot{x}^2(t)} \leq f$ dla każdego $t \geq t_0 + T(f, r)$, a ponadto otoczenie to jest stabilne, tzn. istnieje $m(f)$ takie, że dla każdego $|x_0| \leq m(f)$, $\sqrt{x^2(t) + \dot{x}^2(t)} \leq f$.

Zakładać będziemy, że funkcja /8/ jest ciągła, aby istniała możliwość klasycznej analizy rozwiązania równania. W tym celu wprowadzimy parametr Z, którego graniczna wartość $Z = 0$ prowadzi do nieciągłości sterowania.

Dla założonego Z przyjmiemy prawo sterowania o postaci:

$$k(x,\dot{x},t) = \begin{cases} -R\,\mathrm{sgn}\left(c(x,\dot{x},t)\dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) & \text{dla } \left|c(x,\dot{x},t)\dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}} R\right| > Z \\ -\dfrac{c(x,\dot{x},t)\dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}}}{Z} R & \text{dla } \left|c(x,\dot{x},t)\dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}} R\right| \leq Z \end{cases} \qquad /9/$$

gdzie $R(x,\dot{x},t)$ jest ograniczeniem niepewności, którego postać zostanie wyprowadzona poniżej .

Zapiszmy /1/ w postaci :

$$\ddot{x} = a(x,\dot{x},t)\dot{x} + b(x,t) + c(x,\dot{x},t)u + c(x,\dot{x},t)f \qquad /10/$$

gdzie $f = a_1(x,\dot{x},t)\dot{x} + b_1(x,t) + c_1(x,\dot{x},t)u + d_1(x,\dot{x},t)v$

Ponieważ z /9/ wynika, że $|u| \leq R$ więc można oszacować f przez :

$$|f| \leq A(x,\dot{x},t) + B(x,t) + C(x,\dot{x},t)R(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)$$

Przyjmując, że R jest ograniczeniem górnym $|f|$ otrzymujemy :

$$R = A + B + C\,R + D$$

skąd

$$R = (1 - C)^{-1}(A + B + D) \qquad /11/$$

Oszacowanie stałych $p(r)$, $m(f)$ oraz czasu $T(f,r)$ jest możliwe po wprowadzeniu funkcji ograniczających funkcję Lapunowa i jej pochodną wzdłuż nominalnej trajektorii . Jeśli przyjmiemy mianowicie

$$L_1(x^2+\dot{x}^2) \leq V(x,\dot{x},t) \leq L_2(x^2+\dot{x}^2) \qquad /12/$$

$$\dot{V}_N \leq -L_3(x^2+\dot{x}^2) < 0 \qquad /13/$$

otrzymamy [3] :

$$p(r) = \begin{cases} L_1^{-1}\left(L_2\left(L_3^{-1}\left(\frac{Z}{4}\right)\right)\right) & r \leq L_3^{-1}\left(\frac{Z}{4}\right) \\ L_1^{-1}\left(L_2(r)\right) & r > L_3^{-1}\left(\frac{Z}{4}\right) \end{cases} \qquad /14/$$

$$T(f,r) = \begin{cases} 0 & r \leq L_3^{-1}\left(\frac{Z}{4}\right) \\ \dfrac{L_2(r) - L_1\left(L_2^{-1}\left(L_1(f)\right)\right)}{\min\limits_{x,\dot{x}}\left(L_3(x^2+\dot{x}^2) - \frac{Z}{4}\right)} & r > L_3^{-1}\left(\frac{Z}{4}\right) \end{cases} \qquad /15/$$

$$m(f) = L_3^{-1}\ \frac{Z}{4} \qquad /16/$$

Przypadek graniczny $Z = 0$ prowadzi wprawdzie do asymptotycznej stabilności globalnej układu, ale nie można go rozważać w klasycznym ujęciu jakościowej teorii równań różniczkowych Lapunowa, w którym zakładana jest ciągłość prawej strony równania. Rozważenie tego przypadku wymagałoby zastosowania aparatu równań kontingensowych [6].

W przypadku stacjonarnym, gdy zastosowana została funkcja Lapunowa /4/, prawo sterowania upraszcza się do postaci :

$$k(x,\dot{x}) = \begin{cases} -2\,R\,\mathrm{sgn}\left(c(x,\dot{x})\,\dot{x}\right) & \text{dla } \left|c(x,\dot{x})\,R\,x\right| > Z \\ -\dfrac{2\,R\ c(x,\dot{x})\,\dot{x}}{Z} & \text{dla } \left|c(x,\dot{x})\,R\,\dot{x}\right| \leq Z \end{cases}$$

W charakterze przykładu rozważmy układ napędowy, dla którego równanie ruchu względem jednej osi można zapisać w postaci :

$$\ddot{x} = -\,b\sin x + u - w(t)\cos x \qquad /17/$$

gdzie sterowanie jest momentem napędowym podzielonym przez moment bezwładności, a w oznacza nieznane dokładnie przyśpieszenie kątowe wywołane obciążeniem ograniczone przez nierówność : $|w| \leq R = \text{const}$. Syntezy sterowania dokonamy w dwóch etapach : w pierwszym dokonamy stabilizacji modelu nominalnego tzn. w którym w jest równe zero poprzez wprowadzenie liniowego sprzężenia od położenia i prędkości /algorytm PD/ ; w drugim wprowadzimy proponowane prawo sterowania /9/ .

A zatem :

$$u = u_1 + u_2 \qquad /18/$$

Przy czym

$$u_1 = -\,k_1 x - k_2 \dot{x} \qquad /19/$$

gdzie $k_2 > 0$ oraz $k_1 + b \min\limits_{x} \dfrac{\sin x}{x} > 0$

u_2 wyznaczymy w oparciu o zależność /9/ przy wykorzystaniu funkcji Lapunowa [2] :

$$V = \left(k_1 + \frac{k_2^2}{2}\right) x^2 + k_2 x \dot{x} + \dot{x}^2 + 2b\,(1 - \cos x) \qquad /20/$$

Otrzymamy zatem

$$u_2 = \begin{cases} -R\,|\cos x|\,\mathrm{sgn}\,(k_2 x + 2\dot{x}) & |\cos x|\,|k_2 x + 2\dot{x}| > Z \\ -R\,|\cos x|\,\dfrac{k_2 x + 2\dot{x}}{Z} & |\cos x|\,|k_2 x + 2\dot{x}| \leq Z \end{cases} \qquad /21/$$

4. Sterowanie gwarantujące zadany koszt

Zadania stawiane przed układem napędowym można czasem sformułować w postaci problemu minimalizacji wskaźnika jakości . Niepełna informacja o modelu i zakłóceniach uniemożliwia uzyskanie sterowania optymalnego. Można jednak wykorzystać model i znajomość ograniczeń na zmienne niepewne do syntezy sterowania gwarantującego zadany koszt [7] .

Przyjmować będziemy, że wskaźnik podlegający minimalizacji dla układu /1/ ma postać :

$$I = \int_{t_0}^{T} L(x, \dot{x}, u_1)\, dt \qquad /22/$$

Sterowanie u składa się z dwóch składowych : u_1 zapewniającej minimalizację wskaźnika dla modelu nominalnego, której koszt wliczany jest do wskaźnika oraz u_2 mającej charakter "taniej" poprawki zapewniającej gwarantowany koszt mimo istnienia niepewności . Koszt sterowania u_2 nie jest wliczany do wskaźnika, ale amplituda u_2 jest ograniczona nierównością

$$|u_2| \leq R(x, \dot{x}, t) \qquad /23/$$

gdzie R dane jest przez /11/ .

Zakładając, że koszt minimalny uzyskany przy zastosowaniu optymalnego u_1

dla modelu nominalnego wyraża się funkcją :

$$V(x,\dot{x},t) = \mathrm{Min} \int_t^T L(x,\dot{x},u_1)\, dt$$

należy dobrać u_2 tak, aby wartość wskaźnika I dla układu /1/ nie przekraczała wartości : $V(x(t_o), \dot{x}(t_o), t_o)$.

Syntezy prawa sterowania można dokonać stosując aparat Hamiltona-Jacobiego-Bellmana [8], stąd można dopuścić nieciągłość sterowania.

Prawo sterowania ma postać podobną do analizowanej w rozdziale /3/ z tym, że wykorzystywany jest przypadek graniczny $Z = 0$.

A zatem :

$$u_2 = k(x,\dot{x},t)$$

gdzie

$$k(x,\dot{x},t) = -R\ \mathrm{sgn}\left(c(x,\dot{x},t)\ \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) \qquad /24/$$

Wówczas bowiem zachodzi dla modelu nominalnego i optymalnego u_1 :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = L(x,\dot{x},u_1) + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\left(a(x,\dot{x},t)\dot{x} + b(x,t) + c(x,\dot{x},t)\,u_1\right) \qquad /25/$$

A zatem dla układu /10/, który jest równoważny /1/ mamy :

$$L(x,\dot{x},u_1) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\left(a(x,\dot{x},t)\dot{x} + b(x,t) + c(x,\dot{x},t)u_1\right) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\, c(x,\dot{x},t)(u_2 + f) = \left|\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\, c(x,\dot{x},t)\right|\left(-R + f\ \mathrm{sgn}\left(c(x,\dot{x},t)\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)\right)$$

$$\leq 0 \qquad /26/$$

Z relacji /26/ wynika, że :

$$\int_{t_o}^{T} L(x,\dot{x},u_1)\, dt \leq V(x(t_o), \dot{x}(t_o), t_o) \qquad /27/$$

dla dowolnej trajektorii będącej rozwiązaniem /1/ i prawa sterowania : $u = u_1 + u_2$.

Szczególnie interesujący jest przypadek, w którym model nominalny jest równaniem ruchu zlinearyzowanym wokół zadanej trajektorii, a wskaźnik jest funkcjonałem kwadratowym. Zarówno nominalne prawo sterowania, jak i poprawka, mają prostą postać [9] i mogą być łatwo implementowane w układzie rzeczywistym .

LITERATURA

[1] La Salle J., Lefschetz S. : Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej, PWN, Warszawa, 1966 .

[2] Barbaszyn, I. : Funkcji Lapunowa, Nauka, Moskwa, 1970

[3] Świerniak , A. : Zastosowanie pojęcia stabilności praktycznej do syntezy układów z nierównościowym modelem niepewności, Mat.IV Konf Cybernetyki w Gospodarce Morskiej , 1985 , str. 206-214 .

[4] Hartman, I. : Obyknowiennyje diferencjalnyje urawnienia, Mir, Moskwa, 1970

[5] Leitmann, G. : On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems, ASME J. of Dynamic Systems, Meas. and Contr., v.102, 1981, pp. 96-102.

[6] Roxin, E. : On generalized dynamical systems defined by contingent equations, J. Differential Equations, v.1, 1965, pp. 188-205

[7] Chang, S.S.L., Peng, T.K.C. :Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters , IEEE Trans., AC-17, n.7, 1972, pp. 474-482 .

[8] Athans, M., Falb P.L. : Sterowanie optymalne, WNT, Warszawa, 1969

[9] Świerniak, A. : O pewnym sterowaniu dla układu z nierównościowym modelem niepewności./ w druku /

Recenzent: Prof.dr Tadeusz Puchałka

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ПРИВОДА РОБОТА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О МОДЕЛИ И ВОЗМУЩЕНИЯХ

Р е з ю м е

В статье предоставлен алгоритм управления системой привода робота, позволяющий на практически стабильную работу или-же гарантированную стоимость при неполной информации о модели и возмущениях . Синтез алгоритма основан на использовании функции Ляпунова для номинальной модели а полученное управление является функцией с насыщением , которая в предельном случае становится управлением релейного типа.

CONTROL OF ROBOT DRIVING SYSTEMS IN THE PRESENCE OF UNCERTAINTY

S u m m a r y

In the paper we present an idea and a solution of the quaranteed cost and practical stability control problems for robot driving systems.
A single arm movement controlled by a control signal of the driving system is described by a second order dynamic model with uncertainly .A design procedure consists of two stages.In the first one we find the nominal control law which is an optimal stable strateggy for a nominal model (model without uncertaity) with a given cost functional.The nominal model ,model may be given for example by the linearized equa tions of the second order system. Then we try to find a chep control (whose norm is bounded by the bounds for uncertainty) that ensures a quaranted cost practical stability in spite of uncertainty. The uncertainty is modeled deterministically namely the uncertain elements are unknown exept of the bounds their norma.Moreover we make some informational assumptions.Namely we assume that the uncertainty may be dominated by the control variable and that the sign of the feedback is certain. A discontinuous control law is proposed to quarantee the desired performance .It depends seriously on the information about the uncertaity expressed by constants or functions constraining the norma of unknown parameters or inputs. To prove the properties of this control the Bellman - Hamilton -Jaccobi - Lyapu ov theory is applied.Although the perfect measurment of the position and the velocity is assumed the same approach may be used to design control systems in the presence of unknown by bounded measurment errors.In this case the control law must take this uncertainty into account and it leads to the increase of the control amplitudes.