

Adam JAGIELŁO

Instytut Maszyn i Sterowania

Układów Elektroenergetycznych

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

## METODA ANALIZY KOMUTACJI W MASZYNACH PRĄDU STAŁEGO

**Streszczenie.** Podstawą sposobu rozważań nad zjawiskiem komutacji zaproponowanym w artykule jest metoda analizy stosowana w rozwiązywaniu układów z więzami nieholonomicznymi. Dla zbudowania modelu matematycznego, opisującego zjawiska zachodzące w obwodach komutujących, wprowadzono podział realnie istniejących szozotek na układ, elektrycznie równoległe połączonych obwodów, doprowadzających prąd do komutatora. Kryteria podziału uzależniono od typu uzwojenia i liczb wycinków komutatora objętych przez jedną szczotkę.

W zakończeniu przeprowadzono dyskusję możliwości identyfikacji parametrów zaproponowanego modelu matematycznego.

## 1. WSTĘP

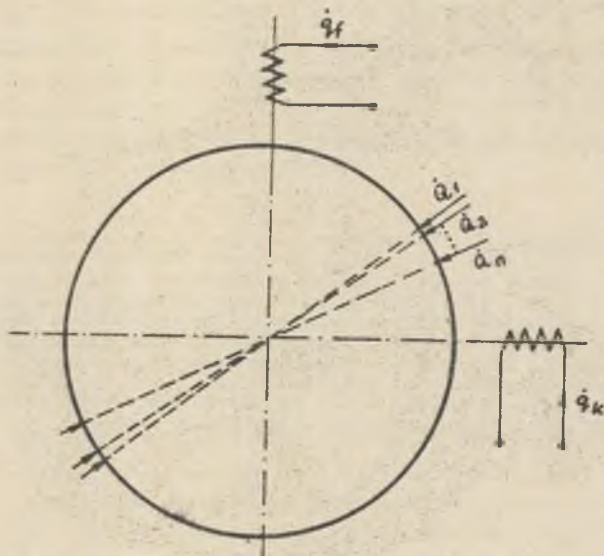
Analiza zjawiska komutacji należy niewątpliwie do najtrudniejszych problemów w teorii maszyn komutatorowych. Jest to związane z faktem, że łączą się tu zjawiska elektromagnetyczne, mechaniczne i fizykochemiczne. Udział każdego z nich w całkowitym procesie komutacji jest równoprawny. Źle dobrane bowiem parametry mechaniczne węzła szczotkowego lub źle uformowany komutator prowadzą do zbyt szybkiego zużycia się szozotek i komutatora lub nawet do powstawania drgań samowzbudnych. Zjawiska fizykochemiczne wiążą się głównie ze sposobem przewodzenia prądu przez styk ruchomy oraz z procesem formowania się polityry. Niewątpliwie atmosfera, w której pracuje komutator, wpływa pośrednio na obydwa zespoły zjawisk.

W naszej analizie obydwa te zespoły zjawisk będą modelowane spadkiem napięcia na szozotkach, gdyż w istocie tylko taki jest ich wpływ na zjawiska przewodzenia prądu przez styki ruchome. Całą naszą uwagę natomiast skupimy na procesach elektromagnetycznych zachodzących w czasie komutacji.

## 2. ZASADY FORMUŁOWANIA MODELU MATEMATYCZNEGO

Za podstawę rozważań nad zjawiskiem komutacji przyjmiemy metodę analizy stosowaną w rozwiązywaniu układów elektromechanicznych z więzami nieholonomicznymi liniowymi. Dla zbudowania modelu matematycznego zjawisk

elektromagnetycznych zachodzących w procesie komutacji wprowadzimy podział realnie istniejących szozotek na układ elektrycznie równoległe połączonych obwodów doprowadzających prąd do komutatora. Schemat elektryczny maszyny prądu stałego z tak rozumianymi szozotkami przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Równania opisujące związki prądowo-napięciowe w układzie elektrycznym, przedstawionym na rys. 1, otrzymamy z relacji:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_1} = U_1 - R_1 \dot{q}_1 \quad i = 1, 2. \quad (2.1a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\dot{\psi}}{\dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{\xi}_j} = U_j - \sum_{k=1}^n R_{jk} \dot{q}_k \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1b)$$

gdzie:

$$\dot{\xi}_j = \varphi - \eta_j,$$

$\varphi$  - kąt obrotu wirnika,

$\eta_j$  - kąt położenia  $j$ -tej pary szozotek punktowych,

$\dot{q}_1$  - prądy obwodów stojana,

$\dot{q}_j$  - prądy szozotek punktowych.

Równania otrzymane ze związków (2.1a i b) są w tym sensie niepraktyczne, że operują prądami szozotek punktowych, natomiast brak w nich zasadniczego dla analizy pracy każdej maszyny prądu stałego prądu twornika  $I_t$ . Jak to wynika z przyjętego strzałkowania,

$$I_t = \sum_{j=1}^n Q_j.$$

Celowe jest tak dobrać pozostałe współrzędne, aby zerowały się one w realnych warunkach pracy. Zmniejsza to bowiem liczbę równań, koniecznych do analizy zjawisk zachodzących w maszynie prądu stałego. Jeżeli za nowe współrzędne, obok prądu twornika, przyjmujemy różnice prądów między szozotkami punktowymi, to relacja między poprzednimi a nowe wprowadzonymi współrzędnymi będzie miała postać

$$\begin{bmatrix} I_t \\ \Delta I_{12} \\ \Delta I_{13} \\ \vdots \\ \Delta I_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \searrow & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \longrightarrow & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (2.2a)$$

lub ogólnie

$$\|I_t\| = \|P\| \cdot \|I\|.$$

Zauważmy, że tzw. liniowa komutacja prowadzi do zerowania się wszystkich zmiennych różnicowych  $\Delta I_{1j}$ .

Dla ostatecznego sformułowania równań modelu matematycznego na podstawie związków (2.1a,b) i (2.2) niezbędne jest określenie wyrażenia funkcją koenergii elektromagnetycznej  $T$ .

### 3. WYZNACZENIE KSZTAŁTU POTENCJAŁU KINETYCZNEGO

Pomiędzy prądami płynącymi w poszczególnych prętach uzwojenia twornika a prądami szozotek punktowych istnieje relacja w postaci

$$\|I_w\| = \|W\| \cdot \|I\|, \quad (3.1)$$

gdzie:

- $\|I_w\|$  - kolumnowa macierz prądów wewnętrznych twornika,
- $\|W\|$  - macierz więzów nieholonomicznych,
- $\|I\|$  - kolumnowa macierz prądów szozotek punktowych.

Macierz więzów  $\|W\|$  zawiera funkcje przełączające w postaci  $f_n(\varphi - \varphi_j) = f[\varphi - \varphi_j, -(n-1)\varphi]$ . Funkcje te przyjmują wartości 0,  $\pm 1$ , a ich kształt uzależniony jest od typu uzwojenia oraz od rozmieszczenia szczołek punktowych na komutatorze. Kąt  $\varphi = \frac{2\pi k}{K}$ , gdzie  $K$  jest liczbą wycinków komutatora, natomiast  $n = 1, 2, \dots, K$ . Dla celów analizy korzystne jest przedstawienie okresowej funkcji przełączającej w postaci szeregu Fouriera.

Potencjałem kinetycznym układu w ujęciu mechaniki analitycznej nazywamy różnicę między koenergią kinetyczną a jego energią potencjalną. W warunkach przyjętej liniowości obwodu magnetycznego i przy prędkościach spotykanych w układach elektromechanicznych, potencjał kinetyczny sprowadza się do różnicy między energiami typu kinetycznego i potencjalnego. W warunkach analizy maszyn elektrycznych dodatkowo pomijana jest pojemność międzywojowa. W tej sytuacji jedyną wielkością, na którą mają wpływ nieholonomiczne więzy komutatora, jest energia zawarta w polu magnetycznym. W sposób ogólny energię tę możemy zapisać w postaci formy kwadratowej w wersji zapisu skróconego jako:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+s} \sum_{j=1}^{m+s} M_{kj} i_k i_j \quad (3.2)$$

lub w postaci macierzowej:

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{m+1} & \dots & i_{m+s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} & \dots & M_{1m+s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & \dots & M_{mm} & \dots & M_{mm+s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m+11} & \dots & M_{m+1m} & \dots & M_{m+1m+s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m+s1} & \dots & M_{m+sm} & \dots & M_{m+sm+s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \\ \vdots \\ i_{m+1} \\ \vdots \\ i_{m+s} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

gdzie:

$m$  - liczba prądów wewnętrznych twornika,

$s$  - liczba obwodów stojana.

Stosując zapis hipermacierzowy możemy napisać:

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|i_w\| & t \\ \|i_s\| & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|M_{ww}\| & \|M_{ws}\| \\ \|M_{sw}\| & \|M_{ss}\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|i_w\| \\ \|i_s\| \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Jeżeli podstawimy związek (3.1) do powyższej zależności, to otrzymamy

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|I\| & \|i_s\| \\ \|I\|^t & \|i_s\|^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \|W\| & \|M_{vw}\| \\ \|M_{vs}\|^t & \|v\| \|M_{ss}\| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \|I\| \\ \|i_s\| \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Przechodząc na nową funkcję energii pola magnetycznego, napiszemy ostatecznie

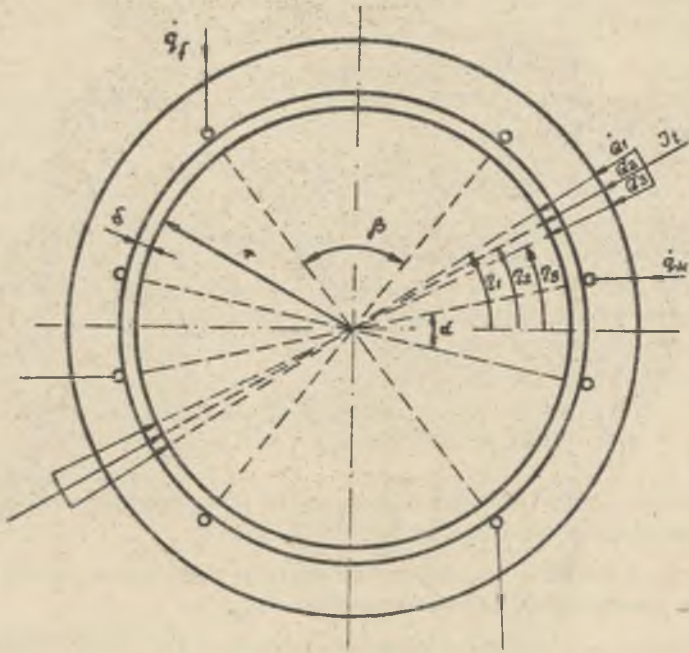
$$\hat{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|I\| & \|i_s\| \\ \|I\|^t & \|i_s\|^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \|M_{tt}\| & \|M_{ts}\| \\ \|M_{ts}\|^t & \|M_{ss}\| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \|I\| \\ \|i_s\| \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Tak zapisana funkcja energii zawartej w polu magnetycznym układu elektromechanicznego z komutatorem pozwala na:

- 1) określenie postaci wyrażenia na energię elektromagnetyczną za pomocą prądów zewnętrznych (szczotek punktowych);
- 2) opracowanie postaci funkcji zmian współczynników indukcyjności występujących w nowym ujęciu energii elektromagnetycznej układu;
- 3) konstrukcję modelu matematycznego zjawiska komutacji w maszynach komutatorowych.

#### 4. PRZYKŁAD MODELU MATEMATYCZNEGO

Celem zilustrowania skuteczności przedstawionej metody sformułujemy przykładowy model matematyczny obwodu komutacyjnego. Dla większej przejrzystości pominiemy tu złobkowania wirnika, jawnobiegunowość stojana oraz spadek napięcia magnetycznego w żelazie, natomiast szczotkę rzeczywistą zastąpimy równoległym układem jedynie trzech szczotek punktowych. Obwód magnetyczny analizowanego tu przetwornika przedstawia rys. 2. Uzwojenie wirnika niech będzie pętlicowe proste, o liczbie działek komutatora i zło-bków równej dziesięć, o poskoku przednim równym 5 i tylnym 4. Macierz wię-zów  $\|W\|$  w takim przypadku będzie miała postać:



Rys. 2

$$\begin{bmatrix}
 r(\varphi - \eta_1) & r(\varphi - \eta_2) & r(\varphi - \eta_3) \\
 r(\varphi - \eta_1) & r(\varphi - \eta_2) & r(\varphi - \eta_3) \\
 r(\varphi - \eta_1 - \alpha) & r(\varphi - \eta_2 - \alpha) & r(\varphi - \eta_3 - \alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - \alpha) & r(\varphi - \eta_2 - \alpha) & r(\varphi - \eta_3 - \alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 2\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 2\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 2\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_2 - 2\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 2\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 2\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 3\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 3\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 3\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 3\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 3\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 3\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 4\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 4\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 4\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 4\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 4\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 4\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 5\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 5\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 5\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 5\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 5\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 5\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 6\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 6\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 6\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 6\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 6\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 6\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 7\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 7\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 7\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 7\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 7\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 7\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 8\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 8\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 8\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 8\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 8\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 8\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 9\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 9\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 9\alpha) \\
 r(\varphi - \eta_1 - 9\alpha) & r(\varphi - \eta_2 - 9\alpha) & r(\varphi - \eta_3 - 9\alpha)
 \end{bmatrix}
 \quad (4.1)$$

gdzie:  $\alpha = \frac{\pi}{18}$

Funkcję przełączającą możemy przedstawić w postaci

$$f\left[\varphi - \eta_j - (n-1)\frac{\pi}{5}\right] = \frac{4}{\pi} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \varrho \frac{\pi}{2}}{\varrho} \sin \varrho \left[ \varphi - \eta_j - (n-1)\frac{\pi}{5} \right]. \quad n = 1, 2, \dots, 10$$

Przyjmując za znane wymiary geometryczne analizowanego przetwornika, możemy obliczyć współczynniki indukcyjności poszczególnych części składowych uzwojenia. Po wykonaniu działań zaznaczonych w relacji (3,5) otrzymamy:

$$M_{ff} = L_{6f} + \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{4z_r^2 r_1 \mu_0}{\pi \delta} \cdot \frac{\sin^2 \varrho \frac{\pi}{2}}{\varrho^2};$$

$$M_{KK} = L_{6K} + \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{4z_K^2 r_1 \mu_0}{\pi \delta} \cdot \frac{\sin^2 \varrho \frac{\pi}{2}}{\varrho^2};$$

$$M_{1j} = \frac{4}{\pi} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \varrho \frac{\pi}{2} \sin^2 \vartheta \frac{\pi}{2}}{\varrho \vartheta} \left[ \frac{5L_6}{\pi} + \frac{\mu_0 r_1}{\delta} \cos \varrho \frac{\pi}{5} (1 + 2 \sin^2 \varrho \frac{\pi}{5}) \right] \cdot$$

$$\left\{ \cos \left[ (\varrho - \vartheta) (\varphi - \eta_1) + \varrho (\eta_1 - \eta_j) \right] - \cos \left[ (\varrho + \vartheta) (\varphi - \eta_1) + \varrho (\eta_1 - \eta_j) \right] \right\}$$

dla  $\varrho - \vartheta = 10m$  dla  $\varrho + \vartheta = 10n$   
 $m = 0, \pm 1, \pm 2$  itd.  $n = 1, 2, 3$  itd.

$$M_{f1} = \frac{80}{\pi^2} : \frac{\mu_0 r_1 z_f}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\varphi=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin \varphi \frac{\pi}{2} \sin^2 \varphi \frac{\pi}{2}}{k^2 \varphi}$$

$$\left\{ \sin \left[ (\varphi - k) \varphi - \varphi \eta_1 \right] - \sin \left[ (\varphi + k) \varphi - \varphi \eta_1 \right] \right\}$$

dla  $\varphi - k = 10m$  dla  $\varphi + k = 10n$   
 $m = 0, \pm 1, \pm 2$  itd.  $n = 1, 2, 3$  itd.

$$M_{ki} = \frac{80}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_0 r_1 z_f}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin \varrho \frac{\pi}{2} \sin^2 \varrho \frac{\pi}{2}}{k^2 \varrho}$$

$$\left\{ \cos \left[ (\varrho - k) \varphi - \varphi \eta_1 \right] - \cos \left[ (\varrho + k) \varphi - \varphi \eta_1 \right] \right\}$$

dla  $\varphi - k = 10m$  dla  $\varphi + k = 10n$   
 $m = 0, \pm 1, \pm 1$ , itd.  $n = 1, 2, 3$  itd.

$$M_{Kf} = M_{fK} = 0,$$

gdzie:

- $M_{ij}$  - jest elementem macierzy  $\|M_{tt}\|$ ,
- $M_{fi}, M_{ki}$  - są elementami macierzy  $\|M_{ts}\|$ ,
- $M_{ff}, M_{kk}$  - są elementami macierzy  $\|M_{ss}\|$ .

Ze względu na fakt, że zazwyczaj analizę zjawisk zachodzących w obwodach komutacyjnych prowadzi się niezależnie od przebiegu prądu twornika i wzbudzenia, przyjmiemy, że prądy te są wymuszane ze źródeł prądu stałego.

Wykorzystując relacje (2.1a,b), (2.2) oraz powyższe uwagi otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \begin{bmatrix} N_{11} + 4N_{22} + N_{33} - 2(N_{12} + N_{13} + 2N_{23}) & N_{11} - 2N_{22} - 2N_{33} - (N_{12} + N_{13} - 5N_{23}) \\ N_{11} - 2N_{22} - 2N_{33} - (N_{12} + N_{13} - 5N_{23}) & N_{11} + N_{22} + 4N_{33} + 2(N_{12} - 2N_{13} - 2N_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{12} \\ \Delta I_{13} \end{bmatrix} \\
 & - \frac{1}{s} \cdot \frac{0}{s^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} N_{11} + 2N_{22} + \frac{1}{2} N_{33} - 2(N_{12} + N_{13} + 2N_{23}) & \frac{1}{2} N_{11} - N_{22} - N_{33} - (N_{12} + N_{13} - 5N_{23}) \\ \frac{1}{2} N_{11} - N_{22} - N_{33} - (N_{12} + N_{13} - 5N_{23}) & \frac{1}{2} N_{11} + \frac{1}{2} N_{22} + 2N_{33} + 2(N_{12} - 2N_{13} - 2N_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{12} \\ \Delta I_{13} \end{bmatrix} \\
 & \cdot \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} - 2N_{12} + N_{13}) + 2 \frac{0}{s^2} (N_{22} - N_{21} - N_{23}) + \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{33} + N_{31} - 2N_{32}) \\ \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} - 2N_{12} + N_{13}) - \frac{0}{s^2} (N_{22} - N_{21} - N_{23}) - \frac{0}{s^2} (N_{33} + 2N_{31} - 4N_{32}) \\ \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} + N_{12} - 2N_{13}) - \frac{0}{s^2} (N_{22} - 2N_{21} - 4N_{23}) - \frac{0}{s^2} (N_{33} - N_{31} - N_{32}) \\ \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} + N_{12} - 2N_{13}) + \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{22} - N_{21} - 2N_{23}) + 2 \frac{0}{s^2} (N_{33} + N_{31} - N_{32}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{12} \\ \Delta I_{13} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} R_{11} + 4R_{22} + R_{33} - 2(2R_{12} - R_{13} + 2R_{23}) & R_{11} + 2R_{22} - 2R_{33} - (R_{12} + R_{13} - 5R_{23}) \\ R_{11} - 2R_{22} - 2R_{33} - (R_{12} + R_{13} - 5R_{23}) & R_{11} + R_{22} + 4R_{33} + 2(R_{12} - 2R_{13} - 2R_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{12} \\ \Delta I_{13} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{s} \left[ \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} - N_{22} + \frac{1}{2} N_{33}) + \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} + N_{12} + N_{13} - 2N_{14}) - \frac{0}{s^2} (N_{22} + 2N_{21} + 2N_{23} - 6N_{24}) + \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{33} + N_{31} + N_{32} - 2N_{34}) \right] \\
 & + \frac{1}{s} \left[ \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} + \frac{1}{2} N_{22} - N_{33}) + \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{11} + N_{12} + N_{13} - 2N_{14}) + \frac{0}{s^2} (\frac{1}{2} N_{22} + N_{21} + N_{23} - 2N_{24}) - \frac{0}{s^2} (N_{33} + 2N_{31} + 2N_{32} - 6N_{34}) \right] \\
 & + R_{11} - 2R_{22} + R_{33} - (R_{12} - 2R_{13} + R_{23}) \quad 2 \frac{0}{s^2} (\frac{N_{11}}{s^2} - 2 \frac{N_{12}}{s^2} + \frac{N_{13}}{s^2}) \quad \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \Delta U_1 - 2 \Delta U_2 + \Delta U_3 \\ \Delta U_1 + \Delta U_2 - 2 \Delta U_3 \end{bmatrix} \quad (4.4) \\
 & + R_{11} + R_{22} - 2R_{33} + (2R_{12} - R_{13} - R_{23}) \quad 2 \frac{0}{s^2} (\frac{N_{11}}{s^2} + \frac{N_{12}}{s^2} - 2 \frac{N_{13}}{s^2})
 \end{aligned}$$

gdzie:  $\Delta U_i$  - oznacza spadek napięcia na i-tej szeregowej punktowej

$$R_1 = \frac{200}{s^2} \sum_{p=1}^{20} \sum_{q=1}^{20} \frac{20 \cdot \sin^2 \varphi \frac{1}{2} \sin^2 \frac{q}{2}}{\varphi^2} \left\{ \cos[(q-1)(p-q_1) + \varphi(q_1 - q_2)] - \cos[(q+1)(p-q_1) + \varphi(q_1 - q_2)] \right\}$$

$\text{dla } \varphi = 0 - 10 \pi$   $\text{dla } \varphi = 0 - 10 \pi$   
 $\varphi = \Delta \omega \cdot \Delta t, \Delta t \text{ 1ms.}$   $\omega = 1, 2, 3 \text{ krad.}$

$R_2$  - wyrażenie prosta uwzględnia prądowego pędlicowego



W przypadku uznania, że spadek napięcia  $\Delta U_1$  ma charakter czysto rezystancyjny, powyższe równania sprowadzają się do układu równań różniczkowych liniowych o okresowo zmiennych współczynnikach. Rozwiązanie analityczne takiego układu równań jest możliwe w zakresie każdej harmonicznej. Nieliniowość spadku napięcia natomiast musi prowadzić do konieczności korzystania z ETO.

Niezależnie od poszukiwania rozwiązania można stwierdzić, że jedynie w przypadku zerowania się prawej strony równania (4.2) będziemy mieli do czynienia z tzw. komutacją liniową. Jak łatwo wykazać, wyzerowanie prawej strony tego równania jest niemożliwe za pomocą wartości współczynników  $M_{ki}$  (biegunów komutacyjnych). Zważywszy bowiem na charakter szeregów harmonicznych tworzących występujące tam współczynniki, możliwe jest jedynie uzyskanie wyzerowania się wartości średniej strony prawej. Godny uwagi jest fakt, że nawet w warunkach liniowego obwodu magnetycznego na komutację ma wpływ wartość prądu wzbudzenia. W tej sytuacji, jak to wynika z przedstawionego przykładu, istotne znaczenie dla minimalizacji prawej strony równania (4.2), a więc uzyskania właściwej komutacji, będzie miała charakterystyka spadku napięcia na szotkach.

## 5. KRYTERIA PODZIAŁU SZCZOTEK

Zasadniczym pytaniem nasuwającym się przy tworzeniu przedstawionego tu modelu matematycznego jest liczba szotek punktowych połączonych równolegle dla zastąpienia szotki rzeczywistej. Problem ten jest trudny do jednoznacznego rozstrzygnięcia. Niewątpliwie ograniczenie od góry jest dość płynne, gdyż wynika jedynie z możliwości obliczeniowych oraz identyfikacyjnych spadków napięć wzdłuż szotki. Natomiast minimalna liczba szotek punktowych zależna jest od liczby wyłoków komutatora objętych przez szotkę. W przypadku szerokości szotki równej działce komutatora liczba podziału musi wynosić co najmniej dwa. Ogólnie minimalna liczba podziału musi być o jeden większa od liczby działek objętych przez szotkę. Zważywszy jednak, że analiza pracy szotek wykazuje istnienie pięciu stref przewodzenia (jedna strefa przewodzenia powierzchniowego, dwie strefy przewodzenia pyłowego i dwie strefy przewodzenia iskrowo-łukowego), proponowany podział, zwłaszcza przy przewidywanych znacznych gęstościach prądu w szotce nie powinien być mniejszy od pięciu. W warunkach uzwojeń wielokrotnych liczba szotek punktowych winna być iloczynem krotności uzwojenia i liczby podziału dla uswojenia prostego.

## 6. ZAGADNIENIE OKREŚLONOŚCI PARAMETRÓW

Problem przydatności modelu matematycznego jest w sposób istotny związany z zagadnieniem identyfikowalności jego parametrów oraz sprawdzalno-

ści otrzymanych rozwiązań. W przypadku proponowanego modelu matematycznego możliwość pomiarowego wyznaczenia większości parametrów praktycznie nie istnieje. Jedyną drogą postępowania jest tu obliczanie wartości tych parametrów na podstawie danych konstrukcyjnych. Zresztą idea tworzenia tego modelu wymaga znajomości wartości elementów składowych, takich jak: rezystancja pojedynczego pręta (w uzwojeniu prętowym), indukcyjność pojedynczego zwoju oraz indukcyjność rozproszeń pojedynczych prętów i czoł. Jedynym parametrem, niemal niemożliwym do wyliczeń z danych konstrukcyjnych, jest spadek napięcia wzdłuż szcotek. Ten problem musi być rozwiązany na drodze identyfikacji eksperymentalnej. Również wyliczone prądy szcotek punktowych, które są miarą gęstości prądu w poszczególnych częściach szcotek rzeczywistych, mogą podlegać weryfikacji na drodze doświadczalnej.

Zasadniczą zaletą proponowanej metody analizy zjawiska komutacji jest możliwość określenia najkorzystniejszej charakterystyki spadku napięcia wzdłuż szcotek. Dobór takiej charakterystyki uzależniony będzie od danych konstrukcyjnych maszyny prądu stałego.

#### LITERATURA

- [1] Jagiełło A., Sobczyk T.: Analityczna teoria uzwojeń maszyn komutatorowych. Opracowanie dla PAN, PRV - grudzień 1981.
- [2] Nejmark J.I., Fufajew N.A.: Dynamika układów nieholonomicznych. PWN, Warszawa 1971.
- [3] Jagiełło A., Skwarozynski J.: Problemy obliczania współczynników indukcyjności maszyn jawnobiegunowych. ZN AGH 1973 r. Nr 514, Kraków 1976

Recenzent: doc. dr hab. inż. Tadeusz Glinka

Wpłynęło do redakcji 5.IV.1982 r.

#### МЕТОД АНАЛИЗА КОММУТАЦИИ В МАШИНАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### Р е з ю м е

Основной способ рассуждений по вопросу коммутации, представленной в статье, является метод анализа, употребляемый в решении систем с неголономными связями. Чтобы построить математическую модель описывающую явления происходящие в коммутирующих цепях, был введен раздел действительно существующих щеток на систему электрических параллельно связанных цепей, ведущих ток к коммутатору. Критерии раздела зависят от вида обмоток и числа коллекторных пластин, охватываемых одной щеткой. В заключении были обсуждены возможности идентификации параметров представленной математической модели.

## A METHOD OF ANALYSIS OF COMMUTATION IN D.C. MACHINES

## Summary

A method of analysis, used for solving systems with non-holonomic constraints, is suggested in the paper as the basis for consideration of the commutation phenomenon. To construct a mathematical model, describing the phenomena occurring in commutating circuits, a division is introduced of the really existing brushes into a system of electrically in parallel connected circuits, conducting the current to the commutator. The criteria of division depend on the type of winding and number of commutator sections being in contact with a single brush. Possibilities of identification of the parameters of the suggested mathematical model are finally discussed.