ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: BUDOWNICTWO z. 47 Nr kol. 603

Eugeniusz BARON, Piotr KUBIEŃ

ZASTOSOWANIE RACHUNKU OPERATORÓW DO ROZWIĄZYWANIA PŁYT O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

Streszczenie. W artykule przedstawiono nowy sposób rozwiązania zagadnienia płyty wieloprzęsłowej o jednokierunkowo zmiennej sztywności. Dzięki zastosowaniu rachunku operatorów w prosty i przejrzysty sposób wyznaczono reakcje oraz powierzchnię ugięcia płyty uwzględniając przy tym sprężystość podpór.

W zakresie sprężystym dosyć dokładnie opracowano teorię płyt jednoprzęsłowych o stałej i zmiennej sztywności. Podobnie wszechstronnie opracowano teorię płyt wieloprzęsłowych o stałej sztywności. Zagadnienie płyty wieloprzęsłowej o zmiennej sztywności traktowane dotychczas w sposób uproszczony, np. w pracy [2] podano rozwiązanie zagadnienia płyty wieloprzęsłowej o sztywności różnej w poszczególnych przęsłach, lecz stałej na długości przęsła. Rozwiązanie to opierało się na metodzie sił, przy czy jako niewiadome wielkości hiperstatyczne przyjęte momenty zginające rozłożone wzdłuż krawędzi łączących poszczególne przęsła. Rozwiązanie to, mimo że uproszczone, posiadało dość skomplikowaną budowę matematyczną.

Podobnie w sposób uproszczony potraktowano zmienność sztywności w pracach [3] i [4].

Wprowadzenie operatorów Mikusińskiego pozwala na proste uwzględnienie zmienności sztywności, przy czym sztywność może się zmieniać w sposób ciągły na całej długości płyty wieloprzęsłowej. Nie jest to jednak jedyna zaleta metody operatorowej. Rachunek operatorów Mikusińskiego stanowi pewien aparat matematyczny służący do rozwiązywania równań różniczkowych, niejednorodnych, zarówno zwyczajnych jak i cząstkowych, przy czym te ostatnie równania opisują właśnie powierzchnię odkształconą płyty. Prawe strony tych równań mogą być funkcjami ciągłymi, nieciągłymi lub operatorami. Dlatego możemy rozważać różne obciążenia płyty: ciągłe, nieciągłe, jak również obciążenia skupione. Rachunek operatorów pozwala również na proste uwzględnienie dyslokacji liniowych i kątowych oraz dowolnych warunków brzegowych, w tym również np. nieciągłych warunków brzegowych. Właśnie warunki brzegowe bardzo komplikowały klasyczne rozwiązania. Należy także zwrócić uwagę na prostotę zapisu oraz posługiwania się operatorami.

Generalnie rzecz biorąc, operatory Mikusińskiego, stosowane wraz z rozwinięciami w szeregi Fouriera, pozwalają na bardzo ogólne, a jednocześnie proste sformułowanie i rozwiązanie zagadnień z zakresu teorii konstrukcji.

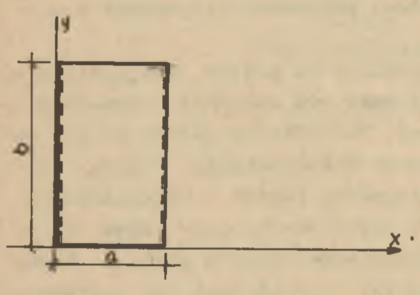
W dalszej części pracy omówiona zostanie metoda rozwiązania płyty wieloprzęsłowej o zmiennej sztywności - podpartej na podporach sprężystych. Rozwiązanie to polega na rozwiązaniu równania płyty prostokątnej, jednoprzęsłowej podanemu w pracy [2].

Przejście od rozwiązania płyty jednoprzęsłowej do rozwiązania płyty wieloprzęsłowej polega na tym, że reakcje podpór pośrednich płyty wieloprzęsłowej traktujemy jako niewiadome obciążenia płyty rozważanej jako jednoprzęsłowa. Niewiadome te obciążenia wyznaczamy z dodatkowych związków,które układamy dla każdej podpory pośredniej.

Rzeczywistą zmienność sztywności płyty można przybliżać różnymi sposobami. W zależności od typu, przyjętej do obliczeń, funkcji zmienności sztywności, rozwiązania ogólne różnią się nieco od siebie postacią.

W niniejszej pracy zajmiemy się liniową i wykładniczą zmiennością sztywności.

Rozważmy prostokątną płytę jednoprzęsłową swobodnie podpartą na dwóch przeciwległych krawędziach: $x = 0$ i $x = a$, sztywno utwierdzonej na krawędzi $y = 0$ i o dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi $y = b$.Niech sztywność zmienia się wzdłuż kierunku y. Założenia te czynimy z uwagi na konieczność przyjęcia pewnych dróg rozwiązania, np. dla powyższych warunków brzegowych dla krawędzi $x = 0$ i $x = a$ stosować będziemy rozwinięcia w szeregi sinusowe.



Równanie ogólne płyty niejednorodnej w swej płaszczyźnie podane zostało w pracy [2] i ma ono postać:

$$\nabla^2(D\nabla^2 w) - (1 - \nu)\cdot L(D,w) = q, \quad (1)$$

gdzie:

$$L(D,w) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\,\nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Postać wyrażenia $L(D,w)$ będzie zależeć od przyjętej do obliczeń funkcji zmienności sztywności $D(y)$.

Jeśli sztywność płyty jest funkcją wykładniczą:

$$D(y) = D_0 \delta^{y/b},$$

gdzie δ = const.

równanie płyty ma postać:

$$D_o\delta^{y/b}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{2\,\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) +$$

$$+ 2D_o\delta^{y/b}\cdot\frac{1}{b}\ln\delta\left(\frac{\nu\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ D_o\delta^{y/b}\cdot\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = q. \qquad (2)$$

Jeśli sztywność płyty zmienia się liniowo:

$$D(y) = D_o + D_1 y, \qquad D_o,\ D_1 = \text{const.}$$

równanie płyty ma postać:

$$(D_o + D_1 y)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2}\right) + 2D_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) = q. \qquad (3)$$

Równania (2) i (3) zapisujemy w postaci operatorowej, co umożliwia zastosowanie do rozwiązania metod rachunku operatorów. Występujące w tych równaniach pochodne cząstkowe względem x zapisujemy $\frac{\partial}{\partial x}$, natomiast pochodne cząstkowe względem y wyrażamy za pomocą operatora różniczkowego s. Otrzymujemy dzięki temu równanie operatorowe parametryczne, w którym występują pochodne ugięcia względem zmiennej x oraz pewne funkcje operatora różniczkowego s.

Równanie (2) przyjmie teraz postać:

$$\delta^{y/b}\Big[(w^{(4)} + 2s^2w'' + s^4w) + \frac{2}{b}\ln\delta(sw'' + s^3w) + \frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(\nu w'' +$$

$$+ s^2w)\Big] = \frac{q}{D_o} + \delta^{y/b}\Big[(s + \frac{2}{b}\ln\delta)w_{y^2}(x,0) + w_{y^3}(x,0)\Big],$$

gdzie: np. $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = w_{y^3}$.

W równaniu tym zmienna y występuje w jawnej postaci w wykładniku $\delta^{y/b}$. W celu wyrugowania zmiennej y wprowadzamy operację T^{α} zdefiniowaną następująco:

$$T^{\alpha}\{f(t)\} = \{e^{\alpha t}f(t)\}.$$

która ma własność:

$$T^{\alpha}R(x) = R(s-\alpha),$$

gdzie $R(s)$ jest wyrażeniem wymiernym operatora s.

Inne własności operacji T^{α} podane są w [1].

W efekcie otrzymujemy równanie postaci:

$$T^{1/b\,.\,\ln\delta}\Big[W^{(4)} + 2s^2W'' + s^4W) + \frac{2}{b}\ln\delta(sW'' + s^3W) +$$

$$+ \frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(sW' + s^2W)\Big] = \frac{q}{D_o} + T^{1/b\,.\,\ln\delta}\Big[sW_{y^2}(x,0)\Big] +$$

$$+ T^{1/b\,.\,\ln\delta}\Big[\frac{2}{b}\ln\delta\,.\,W_{y^2}(x,0) + W_{y^3}(x,0)\Big].$$

Podobny sposób postępowania stosujemy, gdy sztywność zmienia się liniowo. Wprowadzamy wtedy operację P_A zdefiniowaną następująco:

$$P_A(f(y)) = -yf(y),$$

$$P_AR(s) = \frac{dR(s)}{ds}.$$

Po przejściu do postaci operatorowej, równanie (3) przyjmie postać:

$$(D_o - P_AD_1)(W^{(4)} + 2s^2W'' + s^4W) + 2D_1(sW'' + s^3W) =$$

$$= q + D_o\Big[sW_{y^2}(x,0) + W_{y^3}(x,0)\Big] + D_1W_{y^2}(x,0). \qquad (5)$$

Warunki brzegowe dla równań operatorowych (4) i (5):

$$W(0) = 0, \qquad W'(0) = 0,$$
$$W(a) = 0, \qquad W''(a) = 0.$$

Warunki brzegowe dla kierunku y wykorzystane zostaną w dalszej części rozważań.

Występujące w równaniu płyty wielkości: obciążenie, ugięcie oraz pochodne ugięcia względem zmiennej y przedstawiamy w postaci rozwinięć w szeregi trygonometryczne:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x, \\
W(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \alpha_m x, \\
W_{y^2}(x,0) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \alpha_m x, \\
W_{y^3}(x,0) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \alpha_m x,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gdzie: A_m, B_m są stałymi, $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$.

Po wprowadzeniu tych wyrażeń do równania płyty i wyłączeniu czynnika $\sin \alpha_m x$ otrzymujemy ostateczne równania różniczkowe dla W_m:

$$
T^{1/b} \cdot \ln\delta W_m \Big[(\alpha_m^4 - 2\alpha_m^2 s^2 + s^4) + \frac{2}{b}(-\alpha_m^2 s + s^3) + \frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(-\nu\alpha_m^2 + s^2) \Big] = \frac{q_m}{D_o} + A_m\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right) + B_m + 2\,\frac{A_m}{b}\ln\delta \tag{7}
$$

dla wykładniczej zmienności sztywności,
oraz:

$$
W_m \Big[D_o(\alpha_m^2 - s^2)^2 + 2D_1 s(\alpha_m^2 - s^2) \Big] - D_1(\alpha_m^2 - s^2)\frac{dW_m}{ds} = q_m + D_o(A_m s + B_m) + D_1 A_m \tag{8}
$$

dla liniowej zmienności sztywności.

Jeśli płyta obciążona jest obciążeniem nieciągłym ze względu na zmienną y, to obciążenie to zapisujemy w postaci:

$$
q(x) = q(x,y) = \sum_{t=0}^{j} \sum_{m=1}^{\infty} q_{tm} h^{y_t} \sin \alpha_m x, \tag{9}
$$

gdzie: $q_{tm} = q_{tm}(y)$.

Wyznaczając z równań (7) i (8) bezpośrednio W_m, otrzymujemy rozwiązania zamknięte dla W_m:

$$W_m = \frac{T^{-1/b} \cdot \ln\delta \left[\frac{q_m}{D_o} + A_m s + 2\,\frac{A_m}{b} \ln\delta + B_m\right]}{\left[(\alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 s^2 + s^4) + \frac{2}{b} \ln\delta(-s\alpha_m^2 - s^3) + \frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(-\alpha_m^2 + s^2)\right.}, \qquad (10)$$

dla wykładniczej zmienności sztywności

$$W_m = e^{-\int F_1(s)ds}\left[C - \int F_2(s) \cdot e^{\int F_1(s)ds} ds\right. \qquad (11)$$

dla liniowej zmienności sztywności, przy czym $F_1(s)$ i $F_2(s)$ są pewnymi funkcjami operatora s.

Praktyczne wyznaczenie W_m ze wzorów (10) i (11) mogłoby napotkać trudności, zwłaszcza w drugim przypadku, gdzie rozwiązanie formalne mogłoby nie być rozwiązaniem faktycznym, np. mogłaby nie istnieć funkcja liczbowa $f(y)$ odpowiadająca funkcji operatora s będącego rozwiązaniem równania (8). Pewniejsze zatem jest rozwiązanie za pomocą szeregów potęgowych. Współczynniki W_m przedstawimy w postaci rozwinięć:

$$W_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \frac{1}{s^n},$$

lub przy obciążeniu nieciągłym ze względu na zmianę y:

$$W_m = \sum_{t=0}^{j} \sum_{n=1}^{\infty} C_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{s^n} \qquad (12),$$

przy liniowej zmienności sztywności

$$W_m = \sum_{t=0}^{j} \sum_{n=1}^{\infty} C_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{(s + \frac{1}{b} \ln\delta)^n} \qquad (13)$$

przy wykładniczej zmienności sztywności.

Po podstawieniu tych rozwinięć do równania operatorowego płyty: (8) lub (9), stosujemy metodę współczynników nieoznaczonych, tj. porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach operatora s i operatora h. Otrzymujemy w ten sposób wyrażenia na współczynniku C_{tmn}, zwykle w postaci wzorów rekurencyjnych. Wyrażenia na C_{tmn} zawierają w sobie niewiadome stałe A_m i B_m. Stałe te wyrażamy z warunków brzegowych na krawędzi y = = b. Ostateczne rozwiązanie przyjmie postać:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{j} C_{tmn} \frac{y^n}{n!} h^{y_t} \sin\alpha_m x$$

lub

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{tmn} \delta^{-y/b} h^{y_t} \frac{y^n}{n!} \sin\alpha_m x.$$

Przejście do rozwiązania płyty wieloprzęsłowej, jak zaznaczono wyżej, odbywa się w ten sposób, że reakcje podpór pośrednich traktujemy jako niewiadome obciążenie płyty jednoprzęsłowej. Niewiadome te obciążenie, oznaczone q_t^*, wyznaczamy z warunków:

$$q_t^* = K_t \cdot W(y_t), \qquad t = 0,1,\ldots j,$$

gdzie:

$$q^* = \sum_{t=0}^{j} q_t^* = \sum_{t=0}^{j} \sum_{m=1}^{\infty} q_{tm}^* \sin\alpha_m x,$$

przy czym q_{tm}^* są operatorami liczbowymi, K_t oznacza stałą sprężystości podpory t. Dodatkowych warunków na q_t^* jest tyle ile jest podpór pośrednich (tzn. j).

Jeśli przyjmiemy, że podpory są niepodatne, to dodatkowym równaniem dla każdej podpory jest:

$$W(y_t) = 0.$$

Należy zauważyć, że równanie płyty wieloprzęsłowej powstaje bezpośrednio z równania płyty jednoprzęsłowej przez dodanie do prawej strony tego równania obciążenia q^*.

Opisaną wyżej metodę rozwiązania zastosowano dla rozwiązania przykładowych płyt dwuprzęsłowych. Okazało się, że współczynniki C_{tmn} wyrażają się za pomocą sumy współczynników $C_{(t-1)mn}$, tj. dla wyznaczenia współczynników C_{1mn} należy znać $\sum_{n=1}^{\infty} C_{omn}$. Ponieważ w przypadkach praktycznych musimy się ograniczyć do obliczenia pewnej liczby współczynników, zachodzi pytanie jaka to powinna być liczba. Jak się okazuje, zbieżność szeregów jest zależna od takich czynników, jak: wymiary płyty, prędkość zmiany sztywności itd. Ilość współczynników potrzebna dla wystarczająco dokładnego rozwiązania jest w każdym przypadku inna. Należy zawsze ją ustalać indywidualnie. Jeśli korzystamy z maszyny cyfrowej, można ułożyć program taki, który ustali potrzebną ilość współczynników w danym przypadku.

Wzory przedstawiające ugięcie płyty mają prostą formę matematyczną.Nie przedstawiałoby więc trudności takie zaprogramowanie maszyny, by licząc ugięcie w wystarczająco dokładnej siatce punktów, rysowała powierzchnię ugięcia.

LITERATURA

[1] Mikusiński J.: Rachunek operatorów. PWN, Warszawa 1957.

[2] Kączkowski Z.: Płyty. Obliczenie Statyczne. Arkady, Warszawa 1968.

[3] Nowacki W.: Pasmo płytowe ortotropowe. Arch. Mech. Stos. 1951, 3, nr 3/4.

[4] Timoschenko S.: Teoria płyt i powłok (tłum. z wyd. 2), Arkady, Warszawa 1962.

[5] Boblewski J., Bojda K.H.: Zastosowanie operatorów Mikusińskiego do zagadnień teorii konstrukcji nośnych, Mech. Teor. i Stos. 2, 11, 1973.

[6] Bojda K.H.: Płyty prostokątne o jednokierunkowo zmiennej sztywności, Mech. Teor. i Stos. 3, 1972.

[7] Bojda K.H.: Ugięcia płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych, Rozpr. Inż., 2, 1972.

ПРИМЕНЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОПРОЛЁТНОЙ ПЛАСТИНКИ С НЕПОСТОЯННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ

Р е з ю м е

В статье приводится новый способ решения задачи многопролётной плоскости с односторонней переменной жёсткостью. При помощи операторов просто исчисленных реакций опор, а также приводится функция деформации пластинки, учитывая при этом упругость опор.

APPLICATION OF OPERATIONAL CALCULUS TO THE PROBLEM OF RECTANGULAR PLATE WITH VARIABLE RIGIDITY

S u m m a r y

The paper presents a new method of solution of the problem of multi-spanned rectangular plate with variable rigidity. The application of the operational calculus enabled a simple and explicit evaluation of the reactions and of the deflection surface of the plate. Elasticity of the supports has been taken into account.