ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: BUDOWNICTWO z. 47 Nr kol. 603

Eugeniusz BARON, Piotr KUBIEŃ

FORMUŁOWANIE PŁASKICH ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH
NIEKTÓRYCH PRZESTRZENNYCH PROBLEMÓW LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
CZĘŚĆ I

Streszczenie. Praca zawiera sformułowanie liniowej teorii sprężystości opartej na mechanice analitycznej kontinuum materialnego. Elementem nowym jest rozpatrzenie nie tylko więzów geometrycznych, ale również kinetycznych. Następnie przedstawiono sposób sprowadzania niektórych przestrzennych zagadnień liniowej teorii sprężystości do płaskich zagadnień granicznych i wyprowadzono ogólny układ równań.

1. Wprowadzenie

Klasyczne zagadnienia graniczne liniowej teorii sprężystości dla przestrzennej deformacji prowadzą w ogólnym przypadku do zadań nie dających się najczęściej efektywnie rozwiązać. Dlatego też tworzy się dwuwymiarowe teorie tarcz, płyt, powłok. W klasycznych teoriach sprowadza się przestrzenny stan naprężenia lub odkształcenia do stanu płaskiego za pomocą pewnych założeń kinematycznych, niejednokrotnie dobieranych w sposób powodujący wewnętrzną sprzeczność tych teorii (np. teoria Kirchhoffa płyt, klasyczne teorie prętów etc.).

Celem poniższej pracy jest sformułowanie, dla potrzeb zastosowań w technice, teorii sprężystości umożliwiającej rozwiązywanie problemów trójwymiarowego stanu naprężenia i odkształcenia poprzez sprowadzenie ich do zagadnień granicznych płaskich. Podejście, które zastosujemy w pracy, opiera się na mechanice analitycznej kontinuum materialnego, por. [2, 3, 4, 5]. Umożliwia ono rozwiązywanie zagadnienia przestrzennego przy pomocy rozwiązania odpowiedniego zagadnienia granicznego płaskiego w sposób niesprzeczny z ogólnymi zasadami mechaniki. Podstawową ideą mechaniki analitycznej kontinuum materialnego jest wprowadzenie pojęcia więzów wewnętrznych. Więzy te, to pewne hipotezy odnośnie stanu deformacji lub stanu naprężenia. Analitycznie, więzy wyrażone są poprzez relacje między składowymi stanu przemieszczenia lub naprężenia. Więzy powodują występowania reakcji, którymi w przypadku więzów dla deformacji są pewne siły masowe i powierzchniowe, a w przypadku więzów dla naprężeń - pewne pola niezgodności deformacji materiału i ośrodka.

Sformułowanie liniowej teorii sprężystości zagadnień przestrzennych, której problemy graniczne są problemami płaskimi, zostało dokonane w pracy [1], korzystając wyłącznie z pojęcia więzów dla deformacji. Elementem nowym w tej pracy jest przyjęcie, że więzy narzucone są nie tylko na deformację, ale również na składowe stanu naprężenia. Umożliwia to rozpatrywanie dużo szerszej klasy przypadków szczególnych. Gdy więzy są narzucone jedynie na przemieszczenia, to rezultaty niniejszej pracy sprowadzają się do uzyskanych w [1].

W całej pracy obowiązuje konwencja sumacyjna; sumują się wskaźniki umieszczone na różnych poziomach. Jeżeli w tekście nie zaznaczono inaczej to wskaźniki $i,j,k,l\ldots$ przebiegają ciąg $1,2,3$, wskaźniki $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ przebiegają ciąg $1,2$, a wskaźniki $K,L,M,N\ldots$ odpowiednio ciągi $1,2,\ldots,\bar{K}$ $(\bar{L},\bar{M},\bar{N}\ldots)$.

Przez $f(x^k)$ rozumieć będziemy funkcję $f(x^1,x^2,x^3)$, podobnie $f(x^\alpha) = f(x^1,x^2)$.

2. Podstawowe pojęcia i założenia

Ciało będące w stanie naturalnym utożsamiać będziemy z regularnym obszarem Ω w przestrzeni R^3, parametryzowanej prostokątnym układem współrzędnych x^k. Ponadto zakładać będziemy, że obszar Ω da się przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego $\Omega = \Pi \times L$ regularnych obszarów $\Pi \subset R^2$, $L = (-h,h) \subset R$. Brzeg obszaru Ω oznaczamy przez $\partial\Omega$, $\underline{n} = (n^k)$ wektor zewnętrznie normalny do $\partial\Omega$.

Deformacja ciała względem stanu naturalnego opisywana będzie wektorem przemieszczenia $\underline{w}$ o składowych $w_i = w_i(x^k,t)$, $(x^k)\in\Omega$; a stan naprężenia - symetrycznym tensorem naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x^k,t)$, $(x^k)\in\Omega$.

Będziemy przyjmować, że pochodne $w_{i,3}(x^k,t)$ oraz funkcje $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x^k,t)$ są określone wszędzie w Ω z wyjątkiem płaszczyzn $S_N = \Pi \times x^3_N$, gdzie $x^3_N \in (-h,h)$. Oznaczymy $S = \bigcup_N S_N$. Wektor normalny do S ma tylko jedną niezerową składową $n_3 = 1$.

1° Równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe i kontaktowe

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{ij}_{\ ,j} + b^i + r^i = \varrho\ddot{w}^i && \text{dla } (x^k)\in\Omega \\
&\sigma^{ij}n_j = p^i + b^i && \text{dla } (x^k)\in\partial\Omega \qquad (2.1)\\
&[\sigma^{i3}]n_3 = b^i && \text{dla } (x^k)\in S,
\end{aligned}
$$

gdzie:

$b^i = b^i(x^k,t)$ - dane obciążenia objętościowe,

$p^i = p^i(x^k,t)$ - dane obciążenia powierzchniowe,

$r^i = r^i(x^k,t)$ - wewnętrzne siły objętościowe,

$s^i = s^i(x^k,t)$ - wewnętrzne siły powierzchniowe, określone na $\partial\Omega$ i S,

$[\sigma^{ij}]$ - skok wielkości zawartej w nawiasie prostokątnym przy przejściu przez powierzchnię S w kierunku wektora - n_S,

ϱ - gęstość masy.

Do równań (2.1) należy dołączyć warunki początkowe dla w_i.

2^o Równania konstytutywne dla materiału liniowo sprężystego

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl}\,\varepsilon_{kl} \qquad \text{dla} \quad (x^k)\in\Omega \tag{2.2}$$

gdzie:

C_{ij}^{kl} - składowe tensora sztywności sprężystej,

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x^k,t)$ - składowe tensora małego odkształcenia, tj. $\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$ jest tensorem metrycznym ciała w chwili t i miejscu (x^k).

3^o Równania geometryczne

Przyjmować będziemy, że pole tensora odkształcenia ε_{ij} nie jest równe w ogólnym przypadku symetryzowanemu gradientowi pola przemieszczeń. Tym samym istnieje pole $J_{ij} = J_{ij}(x^k,t)$, zwane polem niezgodności deformacji, takie że:

$$w_{(i,j)} = \varepsilon_{ij} + J_{ij} \qquad \text{dla} \quad (x^k)\in\Omega \tag{2.3}$$

4^o Równanie więzów

Geometrycznych

$$\begin{aligned} L_\vartheta\left[x^k,\, w_i\right] &= 0 \qquad w\,\Omega \qquad \vartheta = 1,2,\ldots\bar{N}, \\ L_\varrho\left[x^k,\, w_i\right] &= 0 \qquad na\,\partial\Omega \qquad \varrho = 1,2,\ldots\bar{R}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

oraz kinetycznych:

$$L_\mu\left[x^k,\, \sigma^{ij}\right] = 0 \qquad w\,\Omega \qquad \mu = 1,2,\ldots\bar{M}, \tag{2.5}$$

gdzie:

$L_\vartheta[x^k,\cdot]$, $L_\varrho[x^k,\cdot]$, $L_\mu[x^k,\cdot]$ – dane w każdym problemie liniowe lokalne operatory różniczkowe względem x^k, zależne od charakteru rozpatrywanego zagadnienia.

Równania (2.4) i (2.5) wyrażają pewne hipotezy dotyczące stanu naprężenia i stanu przemieszczenia (np. hipoteza płaskich przekrojów, jednoosiowości stanu naprężenia itp.).

5^o Relacje idealności więzów

Objętościowe i powierzchniowe siły wewnętrzne r^i i s^i interpretujemy jako siły reakcji więzów geometrycznych (2.4), natomiast pole niezgodności deformacji J_{ij} jako reakcje więzów kinetycznych (2.5). Zakładamy, że praca wszystkich sił reakcji więzów na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zeru. Tym samym, dla każdego przemieszczenia przygotowanego δw_i, tj. takiego, że $L^o_\vartheta[x^k,\delta w_i] = 0$ i $L^o_\varrho[x^k,\delta w_i] = 0$ x), mamy:

$$\int_\Omega r^i \delta w_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} s^i \delta w_i d(\partial\Omega) + \int_S s^i \delta w_i dS = 0. \tag{2.6}$$

Zakładamy również, że dla każdej wirtualnej zmiany naprężenia, tj. że $L^o_\mu[x^k,\delta\sigma_{ij}] = 0$ x), mamy:

$$\int_\Omega J_{ij}\delta\sigma^{ij} d\Omega = 0. \tag{2.7}$$

Więzy, których reakcje spełniają równania (2.6) i (2.7) nazywamy idealnymi i tylko takimi będziemy się zajmować.

O wszystkich funkcjach występujących w powyższych relacjach będziemy zakładać, że spełniają odpowiednie warunki regularności. Nie będziemy wprowadzać żadnych dodatkowych postulatów poza wymienionymi w 1^o-5^o.

Idea pracy polega na wprowadzeniu takich równań więzów (2.4), (2.5), które umożliwią rozwiązanie zagadnienia przestrzennego liniowej teorii sprężystości poprzez rozwiązanie płaskiego zagadnienie granicznego.

Jeżeli więzy (2.5) nie występują, to wówczas (2.7) zachodzi dla każdej funkcji $\delta\sigma_{ij}$ ciągłej z pierwszymi pochodnymi, co prowadzi do $J_{ij} = 0$, a problem sprowadza się do omówionego w [1].

x) L^o – jednorodna część liniowego operatora L.

3. Matematyczne sformułowanie problemu

W celu wyróżnienia tych składowych stanu naprężenia, na które zostały narzucone więzy (2.5) wprowadzimy zbiór Z będący dziewięcioelementowym zbiorem par wskaźników i, j, czyli $\{i,j\} \in Z$. Niech V oznacza dany podzbiór Z, $V \subseteq Z$; wtedy $\{i,j\} \in V$ albo $\{i,j\} \in Z - V$. Zbiór V będzie dalej zbiorem tych par wskaźników, które odpowiadają naprężeniom, na które zostały narzucone więzy (2.5). W szczególności zbiór V być może pusty lub równy Z.

Więzy (2.4) i (2.5) tak dobieramy by relacje (2.1), (2.2), (2.3),(2.6) i (2.7), prowadziły do płaskich zagadnień brzegowych. W tym celu załóżmy, że rozwiązanie ogólne równań (2.4) ma następującą postać:

$$
\begin{gathered}
w_i(x^k,t) = A_i^K(x^3)u_K(x^\alpha,t) \quad \text{w}\,\Omega \\
C_\vartheta^K(x^\alpha)u_K(x^\alpha,t) = 0 \quad \text{na}\,\partial\Pi\,, \quad \vartheta = 1,2,\ldots\bar{\vartheta},
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

a jednocześnie rozwiązanie ogólne równań (2.5) da się przedstawić w postaci:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij}(x^k,t) = a_{ij}^{M\alpha\beta}f_{M\alpha\beta}(x^\delta,t) + b_{ij}^M f_M(x^\delta,t) + c_{ij} \\
\text{w}\,\Omega\,, \quad \text{dla}\ \{i,j\} \in V.
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

W równaniach (3.1), (3.2) A_i^K, C_ϑ^K, $a_{ij}^{M\alpha\beta}$, b_{ij}^M, c_{ij}, są znanymi funkcjami zmiennej $x^3 \in (-h,h)$, podczas gdy u_K i f_M są nowymi nieznanymi fukcjami zależnymi od $(x^\alpha) \in \Pi$ i czasu t. Zakładać będziemy, że funkcje A_i^K, $a_{ij}^{M\alpha\beta}$, b_{ij}^M, c_{ij} są różniczkowalne wszędzie w $(-h,h)$ z wyjątkiem punktów x_N^3. Funkcje u_K i f_M nazywać będziemy współrzędnymi uogólnionymi. Zakładamy więc, że wszystkie składowe przemieszczenia oraz niektóre składowe stanu naprężenia zależne są w znaczny sposób od współrzędnych uogólnionych u_K i f_M niezależnych od zmiennej x^3. Szczególnym przypadkiem więzów (3.2), mogą być więzy w postaci $\sigma_{ij} = 0$ dla niektórych $\{i,j\} \in V$. Należy także zwrócić uwagę na fakt, że równanie (3.2) jest równaniem tensorowym tylko w przypadku, gdy $V = Z$, w przeciwnym razie jest spełnione tylko w przyjętym tu układzie x^k.

W dalszej części pracy wykażemy, że więzy (3.1) i (3.2) prowadzą do płaskich zagadnień granicznych, podamy postać tych zagadnień w przypadku ogólnym, a także rozpatrzymy pewne szczególne przypadki tych więzów, doprowadzając zagadnienie do znanych jak i do nowych wariantów płaskiej liniowej teorii sprężystości.

4. Ogólny układ równań

Rugując z relacji (2.6) i (2.7) reakcje więzów r^i, s^i oraz J_{ij} przy wykorzystaniu równań (2.1) oraz (3.1) i (3.2) otrzymamy w $\Omega = \Pi \times L$:

1° Zasadę prac wirtualnych

$$\int_{\partial\Omega} p^i \delta w_i d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} (b^i - \varrho \ddot{w}^i)\delta w_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma^{ij}(\delta w_i)_{,j} d\Omega, \tag{4.1}$$

która winna być spełniona dla wszystkich $\delta w_i(x^k) = A^K_i(x^3)\delta U_K(x^\alpha)$, gdzie $\delta U_K(x^\alpha)$ są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi w Π i spełniającymi na $\partial\Pi$ warunek $C^K_\vartheta U_K = 0$.

2° Zasadę pracy komplementarnej

$$\int_{\Omega} w_i \overline{\delta b}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega} w_i \overline{\delta p}^i d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \overline{\delta\sigma}^{ij} d\Omega, \tag{4.2}$$

która powinna być spełniona przez dowolne pola $\overline{\delta b}^i$, $\overline{\delta p}^i$, $\overline{\delta\sigma}^{ij}$ związane następującymi relacjami $\overline{\delta b}^i + \overline{\delta\sigma}^{ij}{}_{,j} = 0$ w Ω, $\overline{\delta\sigma}^{ij} n_i = \overline{\delta p}^i$ na $\partial\Omega$, gdzie $\overline{\delta\sigma}^{ij} = a^{M\alpha\beta}_{ij}\delta f_{M,\alpha\beta} + b^M_{ij}\delta f_M$, a δf_M są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi w Π

Wychodząc z zasady prac wirtualnych (4.1), korzystając z twierdzenia o mnożniku Lagrange'a i lematu du Bois-Reymonda otrzymamy po formalnych przekształceniach następujące równania ruchu:

$$\int_{-h}^{h} (\sigma^{i\alpha} A^K_i)_{,\alpha} dx^3 - \int_{-h}^{h} \sigma^{i3} A^K_{i,3} dx^3 + \int_{-h}^{h} b^i A^K_i dx^3 + \Big[p^i A^K_i\Big]_{-h}^{h} =$$

$$= \int_{-h}^{h} \varrho \ddot{w}^i A^K_i dx^3, \quad (x^k) \in \Omega \tag*{(4.3)$_1$}$$

gdzie $\Big[p^i A^K_i\Big]_{-h}^{h}$ oznacza sumę wartości wyrażenia w klamrze dla $x^3 = h$ i $x^3 = -h$,

oraz kinetyczne warunki brzegowe:

$$\left(\int_{-h}^{h} \sigma^{i\alpha} A^K_i dx^3\right) n_\alpha = \int_{-h}^{h} p^i A^K_i dx^3 + \mu^\vartheta C^K_\vartheta, \quad (x^k) \in \partial\Pi \tag*{(4.3)$_2$}$$

gdzie $\mu^{\nu} = \mu^{\nu}(x^{\alpha}, t)$ są brzegowymi mnożnikami Lagrange'a odpowiadającymi $(3.1)_2$.

Wychodząc z zasady idealności więzów (2.7) i korzystając z lematu du Bois-Reymonda otrzymujemy:

$$\int_{-h}^{h} \left(\bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} J^{ij}{}_{,\alpha\beta} + \bar{b}_{ij}^{M} J^{ij} \right) dx^3 = 0, \quad (x^k) \in \Omega \qquad (4.4)_1$$

gdzie:

$$\bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} = \begin{cases} a_{ij}^{M\alpha\beta} & \text{dla } \{i,j\} \in V \\ 0 & \text{dla } \{i,j\} \in Z - V \end{cases}$$

$$\bar{b}_{ij}^{M} = \begin{cases} b_{ij}^{M} & \text{dla } \{i,j\} \in V \\ 0 & \text{dla } \{i,j\} \in Z - V \end{cases}$$

oraz

$$w_{(i,j)} = \varepsilon_{ij}, \quad \text{tzn } J_{ij} = 0, \quad \{i,j\} \in Z - V, \quad (x^k) \in \Omega \qquad (4.4)_2$$

a także całkowe warunki brzegowe

$$\int_{\partial\Pi} \left(\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} J^{ij}{}_{,\beta} dx^3 \delta f_M - \int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} J^{ij} dx^3 \delta f_{M,\beta} \right) n_{\alpha} d(\partial\Pi) = 0. \qquad (4.4)_3$$

Warunki $(4.4)_3$ prowadzą (por. [3] str. 116) do relacji:

$$\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} J^{ij}{}_{,\beta} dx^3 n_{\alpha} + \left(\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} J^{ij} dx^3 g_{\alpha} n_{\beta} \right)_{,s} = 0$$

$$\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} J^{ij} dx^3 n_{\alpha} n_{\beta} = 0, \qquad (4.4)_4$$

spełnionych na każdym gładkim łuku $K \subset \partial\Pi$.

W równaniach $(4.4)_4$ g_{α} są składowymi wektora jednostkowego stycznego do K, a różniczkowanie odbywa się według długości łuku s.

Równania (4.3) i (4.4) zapiszemy we współrzędnych uogólnionych U_K i f_M. W równaniach ruchu wystąpię zarówno te składowe stanu naprężenia, na które narzucono więzy, jak i te składowe,na które więzów nie narzucono. Jeśli $\{i,j\} \in V$, to σ_{ij} wyrazimy poprzez funkcje f_M zgodnie z (3.2). Jeśli $\{i,j\} \in Z-V$, to σ_{ij} wyrazimy poprzez funkcje U_K korzystając z równań konstytutywnych (2.2) oraz równań $(4.4)_2$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$W^{KL} = \int_{-h}^{h} A_i^K A^{Li} dx^3,$$

$$g^K = \int_{-h}^{h} A_i^K b^i dx^3 + \left[p^i A_i^K\right]_{-h}^{h},$$

$$q^K = \int_{-h}^{h} A_i^K p^i dx^3$$

$$B^{KM\alpha\beta\gamma} = \int_{-h}^{h} \bar{a}_{i\alpha}^{M\beta\gamma} A^{Ki} dx^3, \qquad B^{K\alpha} = \int_{-h}^{h} A_i^K \bar{c}^{i\alpha} dx^3,$$

$$B^{KM\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{M\alpha\beta} A^{Ki,j} dx^3, \qquad B^K = \int_{-h}^{h} A_{i,j}^K \bar{c}^{ij} dx^3, \tag{4.5}$$

$$B^{KM\alpha} = \int_{-h}^{h} b_{i\alpha}^M A^{Ki} dx^3, \qquad G^{KL} = \int_{-h}^{h} \bar{G}^{ijmn} A_{i,j}^K A_{m,n}^L dx^3,$$

$$B^{KM} = \int_{-h}^{h} b_{ij}^M A^{Ki,j} dx^3, \qquad G^{KL\alpha} = \int_{-h}^{h} \bar{C}^{i\alpha mn} A_i^K A_{m,n}^L dx^3,$$

$$G^{KL\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \bar{C}^{i\alpha m\beta} A_i^K A_i^L dx^3,$$

gdzie:

$$\bar{C}^{ijkl} = \begin{cases} C^{ijkl} & \text{dla } \{i,j\} \in V \\ 0 & \text{dla } \{i,j\} \in Z-V, \end{cases}$$

natomiast

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{dla } \{i,j\} \in V \\ 0 & \text{dla } \{i,j\} \in Z-V. \end{cases}$$

Korzystając z powyższych oznaczeń dla każdej chwili t otrzymamy równania ruchu we współrzędnych uogólnionych:

$$G^{KL\alpha\beta}U_{L,\alpha\beta} + 2G^{[KL]\alpha}U_{L,\alpha} + G^{KL}U_{L} + g^{K} + B^{KM\alpha\beta\gamma}f_{M,\alpha\beta\gamma} +$$

$$+ B^{KM\alpha\beta}f_{M,\alpha\beta} + B^{KM\alpha}f_{M,\alpha} + B^{KM}f_{M} + B^{K} = \varrho W^{KL}\ddot{U}_{L}{}^{x)} \qquad (4.6)$$

spełnione w Π oraz kinetyczne warunki brzegowe.

$$(G^{KL\alpha\beta}U_{L,\beta} + G^{KL\alpha}U_{L} + B^{KM\alpha\beta\gamma}f_{M,\beta\gamma} + B^{KM\alpha}f_{M} + B^{K\alpha})n_{\alpha} = q^{K},$$

spełnione na $\partial\Pi$

Do równań (4.6) i (4.7) dołączamy warunki początkowe.

Analogicznie postępując, zapiszemy we współrzędnych uogólnionych warunki zgodności odkształceń. W relacji $(4.4)_1$ podstawimy za w_i prawe strony równań $(3.1)_1$, a do wyrażenia ε_{ij} przez U_K i f_M skorzystamy z równań konstytutywnych (2.2). W tym celu wprowadzamy pojęcie tensora odwrotnego do tensora sztywności sprężystej. Oznaczymy go symbolem S^{kl}_{ij}. Tensor S^{kl}_{ij} spełnia warunek $S^{mn}_{ij}C^{kl}_{mn} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})$, gdzie δ_{ik} jest symbolem Kroneckera. Mając wyznaczone z (2.2) składowe ε_{ij} poprzez składowe σ_{ij}, korzystamy z równań więzów (3.2).

Oznaczmy:

$$D^{M} = \int_{-h}^{h} S^{ijkl}\bar{b}^{M}_{ij}\bar{c}_{kl}dx^{3},$$

$$D^{MR} = \int_{-h}^{h} S^{ijkl}\bar{b}^{M}_{ij}\bar{b}^{R}_{kl}dx^{3},$$

$$D^{MR\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} S^{ijkl}\bar{b}^{M}_{ij}\bar{a}^{R\alpha\beta}_{kl}dx^{3}, \qquad (4.8)$$

$$D^{MR\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{-h}^{h} S^{ijkl}\bar{a}^{M\alpha\beta}_{ij}\bar{a}^{R\gamma\delta}_{kl}dx^{3},$$

$$D^{M\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} S^{ijkl}\bar{a}^{M\alpha\beta}_{ij}\bar{c}_{kl}dx^{3}.$$

---

x) $G^{[KL]\alpha} = \frac{1}{2}(G^{KL\alpha} - G^{LK\alpha})$.

Korzystając z tych oznaczeń otrzymamy równanie zgodności odkształceń we współrzędnych uogólnionych w Π :

$$D^{MR\alpha\beta\gamma\delta}f_{R,\alpha\beta\gamma\delta}+2D^{(MR)\alpha\beta}f_{R,\alpha\beta}+D^{MR}f_R+D^M=$$

$$=B^{KMK\alpha\beta\gamma}U_{K,\alpha\beta\gamma}-B^{MK\alpha\beta}U_{K,\alpha\beta}+B^{MK\alpha}U_{K,\alpha}-B^{MK}U_K{}^{x)} \tag{4.9}$$

oraz warunki brzegowe na

$$(B^{MK\alpha\beta\gamma}U_{K,\alpha\beta\gamma}-B^{MK\alpha\beta}U_{K,\alpha\beta}-D^{MR\alpha\beta\gamma\delta}f_{R,\beta\gamma\delta}-D^{MR\alpha\beta}f_{R,\beta})n_\alpha+$$

$$+\left[(B^{MK\alpha\beta\gamma}U_{K,\gamma}-B^{MK\alpha\beta}U_K-D^{MR\alpha\beta\gamma\delta}f_{R,\gamma\delta}-D^{MR\alpha\beta\gamma}f_{R,\gamma}-D^{M\alpha\beta})g_\alpha n_\beta\right]_{,s}=0$$

$$(B^{MK\alpha\beta\gamma}U_{K,\gamma}-B^{MK\alpha\beta}U_K-D^{MR\alpha\beta\gamma\delta}f_{R,\gamma\delta}-D^{MR\alpha\beta\gamma}f_{R,\gamma}-D^{M\alpha\beta})n_\alpha n_\beta=0, \tag{4.10}$$

gdzie różniczkowanie odbywa się według długości łuku s.

Związki (4.6) i (4.9) stanowią podstawowy układ równań pola dla $U_K(x,t)$ i $f_M(x^\alpha,t)$. Jest to układ $\bar{K}+\bar{M}$ równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach dla $\bar{K}+\bar{M}$ niewiadomych funkcji U_K i f_M z kinetycznymi warunkami brzegowymi (4.7) oraz deformacyjnymi warunkami brzegowymi (4.10). Do równań (4.6) i (4.9) dołączyć również należy warunki początkowe.

Otrzymany układ równań stanowi sprowadzenie rozwiązania zagadnienia przestrzennego do rozwiązania odpowiedniego zagadnienia granicznego płaskiego. Po wyznaczeniu z płaskiego zagadnienia granicznego funkcji U_K i f_M obliczamy kolejno:

1° Składowe stanu przemieszczenia w dowolnym punkcie obszaru z równań $(3.1)_1$

$$w_i=A_i^K U_K. \tag{4.11}$$

2° Składowe tensora naprężenia, na które zostały narzucone więzy z równań (3.2)

$$\sigma_{ij}=a_{ij}^{M\alpha\beta}f_{M,\alpha\beta}+b_{ij}^M f_M+c_{ij}, \quad \{i,j\}\in V. \tag{4.12}$$

---
x) $D^{(MR)\alpha\beta}=\frac{1}{2}(D^{MR\alpha\beta}+D^{RM\alpha\beta})$.

3^{o} Składowe tensora naprężenia, na które nie zostały narzucone więzy z układu równań

$$\bar{S}^{mn}_{ij}\sigma_{mn} = -S^{kl}_{ij}(\bar{a}^{M\alpha\beta}_{kl}f_{M,\alpha\beta} + \bar{b}^{M}_{kl}f_{M} + \bar{c}_{kl}) + (A^{K}_{(i}U_{K}),_{j)}, \qquad (4.13)$$

gdzie: $\{i,j\} \in Z-V$.

$$\bar{S}^{mn}_{ij} = \begin{cases} S^{mn}_{ij} & \text{dla } \{i,j\} \in Z-V \\ 0 & \text{dla } \{i,j\} \in V, \end{cases}$$

składowe te są określone wszędzie z wyjątkiem punktów nieciągłości funkcji A^{K}_{i}.

4^{o} Składowe tensora odkształcenia z równań

$$\varepsilon_{ij} = (A^{K}_{(i}U_{K}),_{j)} \quad \text{dla } \{i,j\} \in Z-V, \qquad (4.14)_1$$

(za wyjątkiem punktów, gdzie $A^{K}_{i,3}$ nie istnieje),

$$\varepsilon_{ij} = S^{kl}_{ij}\sigma_{kl} \quad \text{dla } \{i,j\} \in V. \qquad (4.14)_2$$

5^{o} Reakcje więzów z równań

$$\begin{aligned} r^{i} &= \varrho\ddot{w}^{i} - b^{i} - \sigma^{ij},_{j} && \text{w}\,\Omega \\ s^{i} &= \sigma^{ij}n_{j} - p^{i}, && \text{na}\,\partial\Omega \\ s^{i} &= [\sigma^{i3}]n_{3}, && \text{na } S^{x)}, \\ \jmath_{ij} &= w_{(i,j)} - \varepsilon_{ij} && \text{dla } \{i,j\} \in V. \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Wszystkie wielkości opisujące trójwymiarowy stan naprężenia i odkształcenia zostały jednoznacznie określone przy pomocy współrzędnych uogólnionych będących fukcjami dwu zmiennych. Współrzędne uogólnione z kolei są rozwiązaniem płaskiego zagadnienia granicznego.

Reasumując rozwiązanie przestrzennego zagadnienia sprowadziliśmy do rozwiązania zagadnienia płaskiego.

---

x) Oznaczenia jak w $(2.1)_3$.

LITERATURA

[1] Bojda K.: Teoria uogólnionych pseudopłaskich stanów równowagi sprężystej, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. nr 516, Gliwice 1977.

[2] Nowacki W.: Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.

[3] Woźniak Cz.: Non-linear mechanics of constrained naterial continua I, Arch. Mech. Stos. 26, 1, 105-118, 1974.

[4] Woźniak Cz.: Non-linear mechanics of constrained material cantinua II, Arch. Mech. Stos. 28, 2, 155-170, 1976.

[5] Woźniak Cz.: Constrained continuous media I, II, III, Bull.Acod.Polon. Sci. Serie Sci. Techn., 21, 3-4, 109-116, 167-173, 175-182, 1973.

[6] Woźniak Cz.: Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego, Ossolineum, Warszawa 1976.

О ФОРМИРОВАНИИ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОБЛЕМ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I. ЧАСТЬ

Р е з ю м е

Рассмотрены детальные вопросы теории представленной в первой части, обсуждены функции напряжений и перемещений. Показывается, что можно так принять форму связей, чтобы каждую пространственную проблему теории упругости привести к двум плоским краевым задачам - плитовой и дисковой.

ON THE FORMULATION OF PLANE BOUNDARY PROBLEM SOLUTIONS OF SOME SPATIAL PROBLEMS OF THE LINEAR THEORY OF ELASTICITY

S u m m a r y

The paper contains the formulation of the linear theory of elasticity basing on the analytical continuum mechanics. The novelty of the approach lies in the fact that not only deformation, but also the components of stress have been considered as being subject to constraints.

A method of resolving some spatial problems of the linear theory of elasticity into plain boundary problems is presented, and the fundamental set of equations is given.