ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: BUDOWNICTWO z. 47 Nr kol. 603

Eugeniusz BARON, Piotr KUBIEŃ

FORMUŁOWANIE PŁASKICH ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH NIEKTÓRYCH PRZESTRZENNYCH PROBLEMÓW LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

CZĘŚĆ II

Streszczenie. Rozpatrzono przypadki szczególne zagadnienia sformułowanego w pierwszej części pracy, funkcje naprężeń i przemieszczeń. Pokazano, że przy odpowiednio dobranej postaci więzów można zagadnienie przestrzenne rozbić na zagadnienia graniczne tarczowe i płytowe. Numeracja wzorów dostosowana jest do numeracji w poprzedniej pracy autorów.

5. Przypadki szczególne omawianej teorii

5.1. Więzy narzucone na wszystkie składowe przemieszczenia i wszystkie składowe stanu naprężenia

W przypadku tym w równaniu ruchu (4.6) i kinetycznych warunkach brzegowych (4.7) współczynniki G są równe zeru oraz nie występują równania $(4.4)_2$, gdyż $Z-V = \emptyset$. Podstawowy układ równań we współrzędnych uogólnionych ma postać:

$$B^{KM\alpha\beta\gamma} f_{M,\alpha\beta\gamma} + B^{KM\alpha\beta} f_{M,\alpha\beta} + B^{KM\alpha} f_{M,\alpha} + B^{KM} f_M + B^K + g^K = \varrho W^{KL} \ddot{u}_L \quad \text{w} \, \Pi ,$$

$$(B^{KM\alpha\beta\gamma} f_{M,\beta\gamma} + B^{KM\alpha} f_M + B^{K\alpha}) n_\alpha = q^K \quad \text{na} \, \partial\Pi$$

$$D^{MR\alpha\beta\gamma\delta} f_{R,\alpha\beta\gamma\delta} + D^{(MR)\alpha\beta} f_{R,\alpha\beta} + D^{MR} f_R + D^M =$$

$$- B^{MK\alpha\beta\gamma} u_{K,\alpha\beta\gamma} - B^{MK\alpha\beta} u_{K,\alpha\beta} + B^{MK\alpha} u_{K,\alpha} - B^{MK} u_K \quad \text{w} \, \Pi \tag{5.1}$$

$$(B^{MK\alpha\beta\gamma} u_{K,\beta\gamma} - B^{MK\alpha\beta} u_{K,\beta} - D^{MR\alpha\beta\gamma\delta} f_{R,\beta\gamma\delta} - D^{MR\alpha\beta} f_{R,\beta}) n_\alpha +$$

$$+ \left[(B^{MK\alpha\beta\gamma} u_{K,\gamma} - B^{MK\alpha\beta} u_K - D^{MR\alpha\beta\gamma\delta} f_{R,\gamma\delta} - D^{MR\alpha\beta\gamma} f_{R,\gamma} - D^{M\alpha\beta}) g_\alpha n_\beta \right]_{,s} = 0,$$

$$(B^{MK\alpha\beta\gamma} u_{K,\gamma} - B^{MK\alpha\beta} u_K - D^{MR\alpha\beta\gamma\delta} f_{R,\gamma\delta} - D^{MR\alpha\beta\gamma} f_{R,\gamma} - D^{M\alpha\beta}) n_\alpha n_\beta = 0 \quad \text{na} \, \partial\Pi .$$

Równania ruchu (5.1) i warunki zgodności odkształceń $(5.1)_3$ są sprzężone. Wykażemy, że można tak dobrać postać więzów, aby z równań $(5.1)_3$ otrzymać układ równań tylko ze względu na funkcje f_M.

Niech funkcje $a_{ij}^{M\alpha\beta}$, b_{ij}^{M}, c_{ij} będą dobrane tak, by

$$\sigma^{ij}{}_{,j} = 0, \tag{5.2}$$

dla

$$\sigma_{ij} = a_{ij}^{M\alpha\beta} f_{M,\alpha\beta} + b_{ij}^{M} f_M + c_{ij}.$$

O funkcjach f_M będziemy mówić wtedy, że są funkcjami naprężeń.

Warunek (5.2) powoduje zerowanie się członu dywergencyjnego w (5.1) tak, że $(5.1)_1$ redukuje się do:

$$\varrho W^{KL} \ddot{U}_L = g^K, \quad (x^\alpha) \in \Pi \tag{5.3}$$

gdzie:

$$g^K = \int_{-h}^{h} b^i A_i^K dx^3.$$

Jeśli przyjmiemy, że siły masowe są niezmienne w czasie to rozwiązaniem układu równań (5.3) są funkcje

$$U_K(x^\alpha, t) = U_{K_o}(x^\alpha) + \dot{U}_{K_o}(x^\alpha) \cdot t + Bt^2, \tag{5.4}$$

gdzie $B = B(x^\alpha)$ jest znaną funkcją oraz

$$\begin{aligned} U_{K_o} &= U_K(x^\alpha, t)\Big|_{t=0}, \\ \dot{U}_{K_o} &= \dot{U}_K(x^\alpha, t)\Big|_{t=0}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

określają warunki początkowe.

Skorzystamy z relacji (5.2) przy wyprowadzeniu warunków zgodności odkształceń. Wychodząc z równań idealności więzów (2.7), po podstawieniu $\delta(\sigma_{ij,j}) = 0$, otrzymujemy:

$$\int_{-h}^{h} \left(a_{ij}^{M\alpha\beta} \varepsilon^{ij}{}_{,\alpha\beta} + b_{ij}^{M} \varepsilon^{ij}\right) dx^3 = \left(a_{i3}^{M\alpha\beta} w^i{}_{,\alpha\beta} + b_{i3}^{M} w^i\right)\Big|_{-h}^{h}, \tag{5.6}$$

gdzie pionowa kreska oznacza różnicę wielkości w nawiasie dla $x^3 = h$ i $x^3 = -h$.

Prawa strona powyższego równania znika przy założeniu, że σ_{ij} zależą tylko od drugich pochodnych f_M oraz przy założeniu, że $a_{i3}^{M\alpha\beta}$ są antysymetryczne ze względu na α i β. (Założenia te pociągają za sobą $\sigma^{ij}{}_{,j} = 0$).

Po przyjęciu powyższych założeń postać równania (5.6) będzie następująca:

$$\int_{-h}^{h}(a_{ij}^{M\alpha\beta}\varepsilon^{ij}{}_{,\alpha\beta} + b_{ij}^{M}\varepsilon^{ij})dx^3 = 0 \tag{5.7$_1$}$$

a we współrzędnych uogólnionych:

$$D^{MR\alpha\beta\gamma\delta}f_{R,\alpha\beta\gamma\delta} + D^{(MR)\alpha\beta}f_{R,\alpha\beta} + D^{MR}f_R + D^M = 0, \tag{5.7$_2$}$$

gdzie współczynniki D mają to samo znaczenie co poprzednio.

Do równań (5.7) dołączamy komplet warunków brzegowych: równania $(5.1)_2$, $(5.1)_4$ i $(5.1)_5$. W równaniach $(5.1)_4$ znikną człony zawierające U_K.

Równania $(5.7)_2$ nazywać będziemy równaniami zgodności dla funkcji naprężeń. Otrzymaliśmy więc niezależny układ równań dla funkcji f_M. Załóżmy, że z tego układu równań funkcje f_M wyznaczyć można jednoznacznie. Wtedy składowe stanu naprężenia dane będą wzorami (5.2), a składowe stanu odkształcenia wyznaczymy z równań konstytutywnych. Po wyznaczeniu przemieszczeń z wzorów (5.4) reakcje więzów wyznaczymy z równań (4.15). Reasumując, przy podanych założeniach można ogólny układ równań doprowadzić do płaskiego zagadnienia brzegowego dla funkcji naprężeń.

Porównując $(5.7)_1$ z warunkiem zgodności odkształceń $(4.4)_1$, zauważymy, że $\varepsilon_{ij} = w_{(i,j)}$ jest jednym z rozwiązań równania $(5.7)_1$. Nie oznacza to jednak równości $w_{(i,j)} = \varepsilon_{ij}$, gdyż rozwiązanie to może w ogólnym przypadku nie spełniać warunków brzegowych. Zbadajmy, przy jakich warunkach zachodzi równość:

$$w_{(i,j)} = \varepsilon_{ij} \quad \text{tzn. że} \quad J_{ij} = 0 \tag{5.8}$$

a pole otrzymane w wyniku rozwiązania układu $(5.7)_2$ z warunkami brzegowymi jest całkowalne. Równanie (5.8) zapiszmy w postaci:

$$A_i^K U_{K,j} + A_{i,j}^K U_K = \varepsilon_{ij}, \tag{5.9}$$

gdzie ε_{ij} są wyznaczonymi już funkcjami $\varepsilon_{ij}(x^k,t)$, a U_K mają postać daną równaniami (5.4) i (5.5).

Widać, że w przypadku dowolnych warunków początkowych spełnienie warunku $J_{ij} = 0$, a co za tym idzie, równania (5.9) jest niemożliwe. Jeśli jednak nie występują siły masowe i rozpatrujemy przypadek statyczny, to rozwiązaniem równania (5.3) jest:

$$U_K(x^\alpha,t) = U_{K_o}(x^\alpha), \tag{5.10}$$

gdzie warunki początkowe mają postać:

$$\begin{aligned} U_{K_o}(x^\alpha,t)\Big|_{t=0} &= U_{K_o}, \\ \dot{U}_{K_o}(x^\alpha,t)\Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

W przypadku statycznym warunki brzegowe dla równania $(5.7)_2$ są niezależne od czasu, więc na podstawie (5.9), (5.10) i (5.11) wnioskujemy, że przyjęcie $J_{ij} = 0$ narzuca warunki początkowe w postaci

$$w_{(i,j)}\Big|_{t=0} = \varepsilon_{ij}. \tag{5.12}$$

Reakcje więzów kinetycznych znikają tożsamościowo tylko jeśli rozpatrujemy przypadek statyczny przy pominięciu sił masowych i spełniony jest warunek (5.12).

5.2. Przypadek więzów narzuconych tylko na składowe przemieszczenia

Jeśli więzy kinetyczne nie występują, to ogólny układ równań będzie miał postać analogiczną do uzyskanej w [1], tj.

$$G^{KL\alpha\beta}U_{L,\alpha\beta} + (G^{KL\alpha} - G^{LK\alpha})U_{L,\alpha} + G^{KL}U_L + f^K = \varrho W^{KL}\ddot{U}_L \quad \text{w}\, \Pi \tag{5.13}$$

$$(G^{KL\alpha}U_L + G^{KL\alpha\beta}U_{L,\beta})n_\alpha = q^K \quad \text{na}\, \partial\Pi \tag{5.14}$$

a równocześnie otrzymamy zamiast (4.9) i $(4.4)_2$

$$\varepsilon_{ij} = w_{(i,j)}. \tag{5.15}$$

Sposób rozwiązania układu równań (5.13) (bez członów dynamicznych) podano w pracy [1]. Współrzędne uogólnione U_L wyrażono tam poprzez funkcje przemieszczeń, co w efekcie doprowadziło do układu równań ze względu na te funkcje.

Metodę rozwiązania przypadku dynamicznego przedstawiono w [2] str.499.

5.3. Przypadek więzów narzuconych na niektóre składowe naprężenia i wszystkie składowe przemieszczenia

Podstawowy układ równań będzie miał postać (4.6), (4.7), (4.9) i (4.10). Również i w tym przypadku wprowadzić można funkcje naprężeń. Załóżmy, że w równaniach więzów występują jedynie drugie pochodne funkcji f_M oraz że funkcje $a_{ij}^{M\alpha\beta}$ są antysymetryczne ze względu na wskaźniki i . Wtedy spełniona będzie tożsamość:

$$\sum_j \sigma_{ij,j} = 0, \quad \{i,j\} \in V. \tag{5.16}$$

Jest to zmodyfikowana wersja relacji (5.2).

Po wykorzystaniu relacji (5.16) do wyprowadzenia warunków zgodności odkształceń, otrzymuje się na analogicznej, co w punkcie 5.1, drodze układ $\bar{M}$ równań dla funkcji f_M w postaci $(5.7)_2$.

W równaniu ruchu (4.6) pozostaje:

$$G^{KL\alpha\beta}U_{L,\alpha\beta} + 2G^{[KL]\alpha}U_{L,\alpha} + G^{KL}U_L + g^K = \varrho W^{KL}\ddot{U}_L, \tag{5.17}$$

gdzie:

$$g^K = \int_{-h}^{h} b^i A_i^K dx^3 + \left[\sum_{\{i,j\}\in Z-V} \sigma_{ij} A^{Ki} n^j\right]_{-h}^{h}, \tag{5.18}$$

gdzie nawias prostokątny oznacza sumę.

Równanie (5.17) rozwiązujemy metodą podaną w [1] lub [2], str. 499. Warunki brzegowe dla równań $(5.7)_2$ i (5.17) mają postać (4.7) i (4.10). Należy do nich dołączyć warunki początkowe.

Po wyznaczeniu funkcji f_M i U_K pozostałe wielkości obliczymy kolejno w sposób analogiczny do podanego w relacjach (4.11)-(4.15).

5.4. Przypadek, gdy więzy nie są narzucone na żadne składowe przemieszczenia

Jeśli więzy nie są narzucone na żadne ze składowych przemieszczania, to równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe sprowadzają się do postaci klasycznej $\sigma^{ij}{}_{,j} + b^i = \varrho \ddot{w}^i$, $\sigma^{ij}n_j = q_i$.

Reakcje więzów geometrycznych są równe zeru: $r^i = 0$, $s^i = 0$. Jeśli przy tym więzy kinetyczne narzucone są na wszystkie składowe stanu naprężenia, to otrzymujemy w efekcie płaskie zagadnienie graniczne - układ równań dla funkcji f_M. Jeśli natomiast więzy narzucone są na nie wszystkie składowe stanu naprężenia, sprawa się komplikuje, gdyż w efekcie otrzymuje się równania różniczkowo-całkowe.

Podobnie w przypadku więzów narzuconych na niektóre składowe przemieszczenia (niezależnie od sposobu przyjęcia więzów kinetycznych) otrzymuje się układ równań różniczkowo-całkowych.

W przypadku,gdy więzy nie są narzucone na żadne ze składowych stanu przemieszczenia i naprężenia to z równań powyższej teorii otrzymuje się równania klasycznej teorii sprężystości.

6. Stan tarczowy i płytowy

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że wielkości A_i^K, $a_{ij}^{M\alpha\beta}$, b_{ij}^M, c_{ij} oraz składowe tensora sztywności sprężystej C_{ij}^{kl} są funkcjami co najwyżej zmiennej x^3. Załóżmy dodatkowo, że pole tensora sztywności sprężystej jest symetryczne względem płaszczyzny $x^3 = 0$ oraz, że w każdym punkcie ciała istnieje płaszczyzna symetrii sprężystej równoległa do płaszczyzny $x^3 = 0$. Założenia te są dość ogólne - ciało tak zdefiniowane zawiera w sobie m.in. przypadek ciała izotropowego i ortotropowego.W szczególności C_{ij}^{kl} mogę być stałymi funkcjami zmiennej x^3.

Wszystkie wielkości, na które narzucono więzy rozbijemy na sumę funkcji symetrycznych i antysymetrycznych względem płaszczyzny $x^3 = 0$. Jeśli $f(x^3)$ jest dowolną funkcją funkcji x^3, to symetryczna składowa

$$f_s(x^3) = \frac{f(x^3) + f(-x^3)}{2},$$

antysymetryczna składowa

$$f_A(x^3) = \frac{f(x^3) - f(-x^3)}{2}.$$

Możemy więc napisać:

$$\begin{cases} w_\alpha = w'_\alpha + w''_\alpha, & w'_\alpha \text{ jest sym., } w''_\alpha \text{ jest antysym.,} \\ w_3 = w'_3 + w''_3, & w'_3 \text{ jest antysym, } w''_3 \text{ jest sym.,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta} + \sigma''_{\alpha\beta}, & \sigma'_{\alpha\beta} \text{ jest sym., } \sigma''_{\alpha\beta} \text{ jest antysym.,} \\ \sigma_{\alpha 3} = \sigma'_{\alpha 3} + \sigma''_{\alpha 3}, & \sigma'_{\alpha 3} \text{ jest antysym., } \sigma''_{\alpha 3} \text{ jest sym.,} \\ \sigma_{33} = \sigma'_{33} + \sigma''_{33}, & \sigma'_{33} \text{ jest sym., } \sigma''_{33} \text{ jest antysym.} \end{cases} \tag{6.1}$$

Więzy napiszemy w takiej postaci, aby relacje (6.1) wynikały automatycznie z równań więzów. Niech:

$$\begin{aligned} & w_i = A_i^{\prime K} U_K^{\prime} + A_i^{\prime\prime L} U_L^{\prime\prime} \qquad w\Omega \qquad ^{x)} \\ & C_\nu^{\prime K} U_K^{\prime} + C_\nu^{\prime\prime L} U_L^{\prime\prime} = 0 \qquad na\ \partial\Omega\times L, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\sigma_{ij} = a_{ij}^{\prime N\alpha\beta} f_{N,\alpha\beta}^{\prime} + b_{ij}^{\prime N} f_N^{\prime} + c_{ij}^{\prime} + a_{ij}^{\prime\prime M\alpha\beta} f_{M,\alpha\beta}^{\prime\prime} + b_{ij}^{\prime\prime M} f_M^{\prime\prime} + c_{ij}^{\prime\prime} \qquad w\Omega$$

przy czym

$$w_i^{\prime} = A_i^{\prime K} U_K^{\prime}, \qquad w_i^{\prime\prime} = A_i^{\prime\prime K} U_L^{\prime\prime} \qquad itd.$$

Współczynniki $A_i^{\prime K}$, $A_i^{\prime\prime L}$, $a_{ij}^{\prime N\alpha\beta}$, $a_{ij}^{\prime\prime M\alpha\beta}$, $b_{ij}^{\prime N}$, $b_{ij}^{\prime\prime M}$, $c_{ij}^{\prime}$, $c_{ij}^{\prime\prime}$ występujące w (6.2) posiadają odpowiednie cechy symetrii. Można wykazać, że wielkościami symetrycznymi względem $x^3 = 0$ są:

$$A_\alpha^{\prime K},\ A_{3,3}^{\prime K},\ A_3^{\prime\prime L},\ A_{\alpha,3}^{\prime\prime L},\ a_{\alpha\beta}^{\prime N\gamma\delta},\ a_{\alpha 3}^{\prime\prime M\gamma\delta},\ a_{33}^{\prime N\gamma\delta},$$

$$b_{\alpha\beta}^{\prime N},\ b_{\alpha 3}^{\prime\prime M},\ b_{33}^{\prime N},\ c_{\alpha\beta}^{\prime},\ c_{\alpha 3}^{\prime\prime},\ c_{33}^{\prime},$$

podczas gdy wielkościami antysymetrycznymi względem płaszczyzny $x^3 = 0$ są:

$$A_3^{\prime K},\ A_{\alpha,3}^{\prime\prime L},\ A_\alpha^{\prime K},\ A_{3,3}^{\prime\prime L},\ a_{\alpha\beta}^{\prime\prime M\gamma\delta},\ a_{\alpha 3}^{\prime N\gamma\delta},\ a_{33}^{\prime\prime M\gamma\delta},$$

$$b_{\alpha\beta}^{\prime\prime M},\ b_{\alpha 3}^{\prime N},\ b_{33}^{\prime\prime M},\ c_{\alpha\beta}^{\prime\prime},\ c_{\alpha 3}^{\prime},\ c_{33}^{\prime\prime}.$$

Wyprowadzając równania Langrange'a dla więzów przyjętych w formie $(6.2)_1$ $(6.2)_2$ otrzymuje się dwie niezależne grupy równań. W jednej wystąpią wielkości $w_i^{\prime}$, $\sigma_{ij}^{\prime}$, w drugiej $w_i^{\prime\prime}$, $\sigma_{ij}^{\prime\prime}$. Układ równań rozpada się więc na dwa podukłady, przy czym niektóre składowe sił obciążających występują w jednym, pozostałe w drugim podukładzie. Otrzymany układ równań ma postać równania ruchu $w\Omega$:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{h} (\sigma_{i\alpha}^{\prime} A_i^{\prime K})_{,\alpha} dx^3 - \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}^{\prime} A^{\prime Ki,j} dx^3 + \left[p^{\prime i} A_i^{\prime K} \right]_{-h}^{h} + \int_{-h}^{h} b^{\prime i} A_i^{\prime K} dx^3 = \int_{-h}^{h} \varrho \ddot{w}^{\prime i} A_i^{\prime K} dx^3, \\ & \int_{-h}^{h} (\sigma_{i\alpha}^{\prime\prime} A_i^{\prime\prime L})_{,\alpha} dx^3 - \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}^{\prime\prime} A^{\prime\prime Li,j} dx^3 + \left[p^{\prime\prime i} A_i^{\prime\prime L} \right]_{-h}^{h} + \int_{-h}^{h} b^{\prime\prime i} A_i^{\prime\prime L} dx^3 = \int_{-h}^{h} \varrho \ddot{w}^{\prime\prime i} A_i^{\prime\prime L} dx^3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

---

x) Takie przyjęcie więzów stanowi jedynie zmianę postaci więzów (3.1) i (3.2) i nie zawęża klasy rozpatrywanych zagadnień.

kinetyczne warunki brzegowe na $\partial\Omega$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-h}^{h} \sigma'_{i\alpha} A'^{Ki} n^{\alpha} dx^3 = \int_{-h}^{h} p'^{i} A'^{K}_{i} dx^3 + \mu^{\nu} C'^{K}_{\nu},\\
&\int_{-h}^{h} \sigma''_{i\alpha} A''^{Li} n^{\alpha} dx^3 = \int_{-h}^{h} p''^{i} A''^{L}_{i} dx^3 + \mu^{\nu} C''^{L}_{\nu}.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

W równaniach (6.3), (6.4) rozłożono obciążenia zewnętrzne na części symetryczne i antysymetryczne względem $x^3 = 0$ w sposób następujący:

$$
\begin{aligned}
&p_{\alpha} = p'_{\alpha} + p''_{\alpha}, \quad && p'_{\alpha} \text{ jest symetryczne, } p''_{\alpha} \text{ jest antysymetryczne}\\
&p_3 = p'_3 + p''_3 \quad && p'_3 \text{ jest antysymetryczne, } p''_3 \text{ jest symetryczne}
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

a rozkład ten obowiązuje na $\partial\Pi\times L$ i $\Pi\times\partial L$.

Składowe obciążenia p'_{α} i p'_3 są obciążeniami, które zwykło się uważać jako "tarczowe", natomiast p''_{α} i p''_3 za "płytowe". Ponadto w równaniu "tarczowym" występują składowe sił objętościowych b'^{i} i w równaniu "płytowym" składowe $b^{i''}$. Otrzymaliśmy niezależne równania ruchu dla stanu "tarczowego" i "płytowego".

Przechodząc do warunków zgodności odkształceń, po wykorzystaniu $(6.2)_3$ otrzymujemy równania w Ω :

$$
\begin{aligned}
&\int_{-h}^{h} (\bar{a}'^{N\alpha\beta}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij}{}_{,\alpha\beta} + \bar{b}'^{N}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij}) dx^3 = 0,\\
&\int_{-h}^{h} (\bar{a}''^{M\alpha\beta}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij}{}_{,\alpha\beta} + \bar{b}''^{N}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij}) dx^3 = 0,
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

i warunki brzegowe na $\partial\Pi\times L$:

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-h}^{h} \bar{a}'^{N\alpha\beta}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij}{}_{,\beta} dx^3 n_{\alpha} + \left(\int_{-h}^{h} \bar{a}'^{N\alpha\beta}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij} dx^3 g_{\alpha} n_{\beta}\right)_{,s} = 0,\\[2ex]
\displaystyle\int_{-h}^{h} \bar{a}'^{N\alpha\beta}_{ij} \, \mathfrak{I}^{ij} dx^3 n_{\alpha} n_{\beta} = 0
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{''M\alpha\beta} J^{ij}{}_{,\beta} dx^3 n_\alpha + \left(\int\limits_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{''M\alpha\beta} J^{ij} dx^3 s_\alpha n_\beta \right)_{,s} = 0, \\ \int\limits_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{'M\alpha\beta} J^{ij} dx^3 n_\alpha n_\beta = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

oraz

$$J_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad \{i,j\} \in Z-V. \tag{6.8}$$

Rozłóżmy J_{ij} i ε_{ij} na sumę funkcji symetrycznych i antysymetrycznych względem płaszczyzny $x^3 = 0$, tak by składowe J_{ij} i ε_{ij} miały te same cechy symetrii, co odpowiadające im składowe $w_{(i,j)}$.

Otrzymamy wtedy:

$$J'_{ij} + J''_{ij} = (w'_{(i,j)} + w''_{(i,j)}) - (\varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij}). \tag{6.9}$$

Interesuje nas pytanie, kiedy (6.9) rozprzęga się na dwa równania:

$$\begin{aligned} J'_{ij} &= w'_{(i,j)} - \varepsilon'_{ij}, \\ J''_{ij} &= w''_{(i,j)} - \varepsilon''_{ij}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Krótka analiza, której tu nie przytoczymy, prowadzi do wniosku, że (6.9) jest równoważne (6.10) przy założeniu, że w każdym punkcie ciała istnieje płaszczyzna symetrii sprężystej równoległa do płaszczyzny $x^3 = 0$ oraz że pole tensora sztywności sprężystej C_{ij}^{kl} jest symetryczne względem płaszczyzny $x^3 = 0$.

Wzór (6.10) oznacza, że warunki zgodności odkształceń rozprzęgają się. Mamy więc w Ω:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-h}^{h} (\bar{a}_{ij}^{'N\alpha\beta} J'^{ij}{}_{,\alpha\beta} + \bar{b}_{ij}^{'N} J'^{ij}) dx^3 = 0, \\ &\int\limits_{-h}^{h} (\bar{a}_{ij}^{''M\alpha\beta} J''^{ij}{}_{,\alpha\beta} + \bar{b}_{ij}^{''M} J''^{ij}) dx^3 = 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

i warunki brzegowe na $\partial\Omega \times L$:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{\prime N\alpha\beta} J^{\prime ij}{}_{,\beta}\, dx^3 n_\alpha + \left(\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{\prime N\alpha\beta} J^{\prime ij} dx^3 g_\alpha n_\beta\right)_{,s} = 0,\\ &\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{\prime N\alpha\beta} J^{\prime ij} dx^3 n_\alpha n_\beta = 0, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{\prime\prime M\alpha\beta} J^{\prime\prime ij}{}_{,\beta}\, dx^3 n_\alpha + \left(\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{\prime\prime M\alpha\beta} J^{\prime\prime ij} dx^3 g_\alpha n_\beta\right)_{,s} = 0,\\ &\int_{-h}^{h} \bar{a}_{ij}^{\prime\prime M\alpha\beta} J^{\prime\prime ij} dx^3 n_\alpha n_\beta = 0, \end{aligned}\right. \tag{6.12}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} J'_{ij} &= 0\\ J''_{ij} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{dla } \{i-j\} \in Z-V. \tag{6.13}$$

Powyższe równania we współrzędnych uogólnionych przyjmą postać:
Dla stanu płytowego:

1) równania ruchu w Π :

$$G''^{KL\alpha\beta} U''_{L,\alpha\beta} + 2G''^{[KL]\alpha} U''_{L,\alpha} + G''^{KL} U''_L + \tilde{g}''^K +$$

$$+ B''^{KN\alpha\beta\gamma} f'_{N,\alpha\beta\gamma} + B''^{KN\alpha\beta} f'_{N,\alpha\beta} + B''^{KN\alpha} f'_{N,\alpha} + B''^{KN} f''_N + B''^K =$$

$$= \varrho W''^{KL} \ddot{U}''_L, \tag{6.14}$$

2) kinetyczne warunki brzegowe na $\partial\Pi$:

$$(G''^{KL\alpha\beta} U''_{L,\beta} + G''^{KL\alpha} U''_L +$$

$$+ B''^{KN\alpha\beta\gamma} f'_{N,\beta\gamma} + B''^{KN\alpha} f'_N + B''^{K\alpha}) n_\alpha = q''^K, \tag{6.15}$$

3) warunki zgodności odkształceń wΠ:

$$D''^{MN\alpha\beta\gamma\delta} f'_{N,\alpha\beta\gamma\delta} + 2D''^{(MN)\alpha\beta} f'_{N,\alpha\beta} + D''^{MN} f'_N + D''^M =$$

$$= B''^{ML\alpha\beta\gamma} U''_{L,\alpha\beta\gamma} - B''^{ML\alpha\beta} U''_{L,\alpha\beta} - B''^{ML\alpha} U''_{L,\alpha} - B''^{ML} U''_L, \tag{6.16}$$

4) warunki brzegowe na $\partial\Pi$:

$$
\left(B''^{ML\alpha\beta\gamma}U''_{L,\beta\gamma} - B''^{ML\alpha\beta}U''_{L,\beta} - D''^{MN\alpha\beta\gamma\delta}f''_{N,\beta\gamma\delta} - D''^{MN\alpha\beta}f''_{N,\beta}\right)n_{\alpha} +
$$

$$
+\left[\left(B''^{ML\alpha\beta\gamma}U''_{L,\gamma} - B''^{ML\alpha\beta}U''_{L} - D''^{MN\alpha\beta\gamma\delta}f''_{N,\gamma\delta} - D''^{MN\alpha\beta\gamma}f''_{N,\gamma}\right)g_{\alpha}n_{\beta}\right]_{,s} = 0,
$$

$$
\left(B''^{ML\alpha\beta\gamma}U''_{L,\gamma} - B''^{ML\alpha\beta}U''_{L} - D''^{MN\alpha\beta\gamma\delta}f''_{N,\gamma\delta} - D''^{MN\alpha\beta\gamma}f''_{N,\gamma}\right)n_{\alpha}b_{\beta} = 0. \tag{6.17}
$$

5) warunki zgodności odkształceń w Ω:

$$
w''_{(i,j)} = \varepsilon''_{ij} \quad \text{dla} \quad \{i,j\} \in Z\text{-}V. \tag{6.18}
$$

Oznaczenia w równaniach (6.14)-(6.17) mają tę samą postać jak w (4.5) i (4.8) z tym, że do ich określenia używamy współczynników "płytowych" A''^{K}_{i}, $a''^{M\alpha\beta}_{ij}$ itd. Wyjątkiem od tej zasady jest:

$$
\tilde{g}''^{K} = \int_{-h}^{h} b^{3}A''^{K}_{3}dx^{3} + \left[p''^{i}A''^{K}_{i}\right]_{-h}^{h}.
$$

Analogicznie do równań dla stanu płytowego (6.14)÷(6.18) otrzymuje się równania dla stanu tarczowego, z tym że:

$$
\tilde{g}'^{K} = \int_{-h}^{h} b'^{\gamma}A'^{K}_{\gamma}dx^{3} + \left[p'^{i}A'^{K}_{i}\right]_{-h}^{h}.
$$

Reasumując, przy założeniu, że więzy dane są w postaci (6.2) oraz przy założeniu istnienia w każdym punkcie płaszczyzny symetrii sprężystej równoległej do płaszczyzny $x^3 = 0$ i symetrii tensora C^{kl}_{ij} względem płaszczyzny $x^3 = 0$, otrzymuje się dwa kompletne, niezależne układy równań dla funkcji U'_K, f'_N oraz U''_L, f''_M. Równania te wraz z równaniami więzów (6.2) pozwalają wyznaczyć wszystkie składowe przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia oddzielnie dla stanu tarczowego i płytowego.

Literatura cytowana w tekście podana została w części pierwszej.

О ФОРМИРОВАНИИ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОБЛЕМ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

II ЧАСТЬ

Р е з ю м е

В статье в I части рассматривается детально вопросы теории представлений и обсуждается функции напряжений и перемещений. Доказывается, что можно так принять форму связей, чтобы каждую пространственную задачу линейной теории упругости можно было привести к плоским краевым задачам - плитовой и дисковой.

ON THE FORMULATION OF PLANE BOUNDARY PROBLEM SOLUTIONS OF SOME SPATIAL PROBLEMS OF THE LINEAR THEORY OF ELASTICITY

S u m m a r y

Special cases of the theory given in Part I have been considered including stress and displacement functions. It has been shown that if the form of the constraints is appropriately chosen the solution of a spatial problem can be resolved into a solution of two independent plane problems.