

Roman KONIECZNY

ZMODYFIKOWANY MODEL MATEMATYCZNY ST3+OP2  
WSPÓLPRACY KILKU ODBIERAKÓW PRĄDU Z SIECIĄ TRAKCYJNĄ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono koncepcję, założenia oraz równania różniczkowe, zmodyfikowanego modelu matematycznego współpracy kilku odbieraków prądu z siecią trakcyjną. Model ten, przeznaczony do wykonywania obliczeń symulacyjnych przy użyciu komputera, umożliwi prowadzenie badań bardzo trudnych do realizacji w warunkach plenerowych.

**1. Wprowadzenie**

Współpraca dynamiczna odbieraka prądu z siecią trakcyjną może być odwzorowana przy użyciu jednego z kilkunastu znanych modeli matematycznych. Modele te w pracy [7] podzielono na dwa zasadnicze typy: ST (sieć trakcyjna) i OP (odbierak prądu), numerując według stopnia złożoności.

Modele matematyczne odwzorowujące sieć trakcyjną są następujące:

- a) Model typu ST1 - w którym sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ z 1 stopniem swobody. Masa zastępcza sieci zawieszona jest na sprężynie - reprezentującej sztywność sieci, równolegle włączony jest tłumik hydrauliczny - reprezentujący tarcie lepkie w sieci, uwzględnione jest również tarcie suche. Parametry: masa, sztywność, współczynnik tarcia lepkiego oraz siła tarcia suchego zależne są od drogi lub czasu (np. model Grajnarta przedstawiony w pracy [5]).
- b) Model typu ST2 - w którym sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ z 2 stopniami swobody. Różnica w stosunku do modelu ST1 polega na rozdzielaniu parametrów sieci na dwa podukłady: linę nośną oraz drut jezdny (np. model Frajfelda opisany w pracy [4]).
- c) Model typu ST3 - w którym sieć trakcyjna odwzorowana jest jako ciąg segmentów. Każdy segment jest modelem typu ST1 o stałych parametrach. Segmenty połączone są ze sobą nieważką nicią p naciągu N (np. model Morisa opisany w artykule [1]).
- d) Model typu ST4 - w którym sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ n mas skupionych. Odwzorowane są wszystkie podukłady sieci: linę nośną, drut jezdny, linka uelastyczniająca Y (np. modele Fishera [3], Scotta i Rothmana [8]).

W grupie modeli sieci trakcyjnej należy uwzględnić jeszcze (według przyjętej w pracy [7] konwencji) typ ST5, w którym sieć odwzorowana jest w postaci drgającej struny lub belki na podłożu sprężystym (np. [6]).

Modele matematyczne odwzorowujące odbierak prądu są następujące:

- a) model typu OP1 - w którym odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 1 stopniem swobody (np. [5]),
- b) model typu OP2 - w którym odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 2 stopniami swobody (np. [2]),
- c) model typu OP3 - w którym odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 3 stopniami swobody (model ten przeznaczony jest do odwzorowania odbieraków piętrowych).

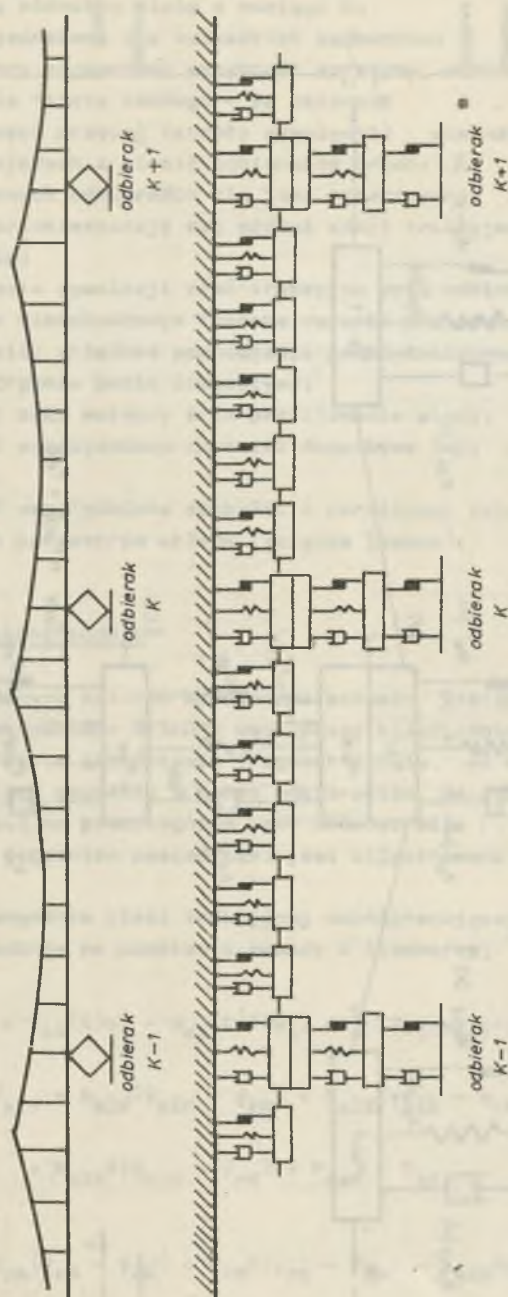
Do symulacji współpracy 1 odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu komputera stosowany jest najczęściej model typu ST1+OP2 (przedstawiony m.in. w artykule [2]). Model ten zmodyfikowano w pracy [7]. Do symulacji współpracy kilku odbieraków prądu z siecią trakcyjną, jako najbardziej typowe, mogą być stosowane modele: ST3+OP2 (Morrisa [1]) oraz ST4+OP2 (Fishera [3] lub Scotta i Rothmana [8]). Modele te posiadają jednak pewne wady. Oprócz nieuwzględnienia tarcia suchego w sieci trakcyjnej, składowych aerodynamicznych działających na odbierak oraz czynników dodatkowych (co jeszcze jest do poprawienia) - modele te są niewygodne w programowaniu, wymagają komputerów o dużej pojemności pamięci operacyjnej; a w przypadku modelu ST4+OP2 wymagają również bardzo długiego czasu obliczeń. Przykładowo: czas trwania przebiegu symulacyjnego dla modelu Fishera, odwzorowującego 3 prześła zawieszenia sieci trakcyjnej, realizowanego na maszynie cyfrowej IBM-370/145 w systemie CSMP - wynosi ok. 90 minut. Dla dłuższych serii obliczeniowych (np. optymalizacja parametryczna) czas ten jest nie do przyjęcia.

## 2. Koncepcja zmodyfikowanego modelu ST3+OP2

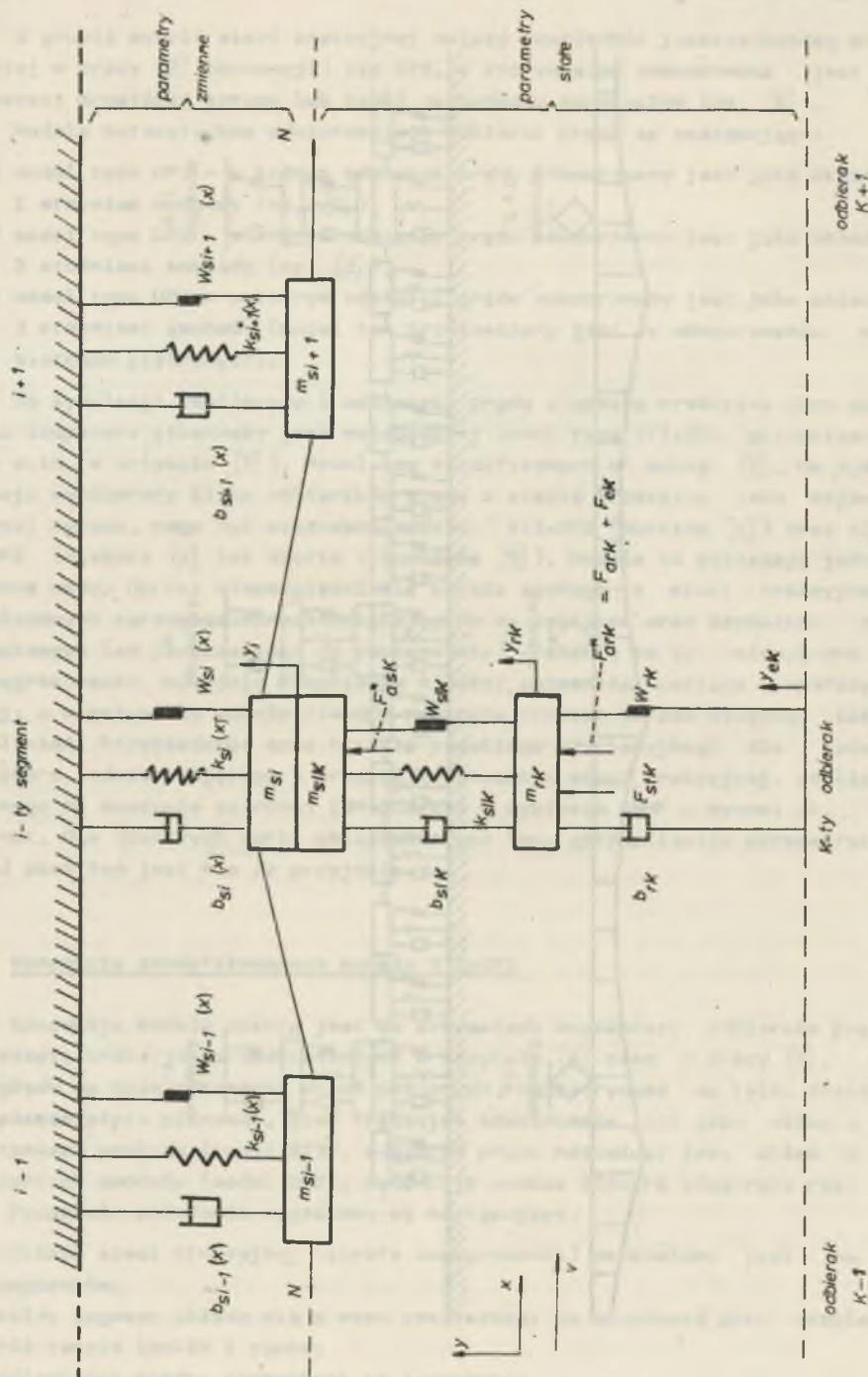
Koncepcja modelu oparta jest na schematach współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną przedstawionych w artykule [1] oraz w pracy [7]. Ze względu na małe znaczenie drgań poziomych, rozpatrywane są tylko drgania w płaszczyźnie pionowej. Sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ o  $n$  stopniach swobody (model ST3), odbierak prądu natomiast jako układ o 2 stopniach swobody (model OP2). Koncepcję modelu ST3+OP2 ilustruje rys. 1.

Pozostałe założenia wyjściowe są następujące:

- odcinek sieci trakcyjnej (strefa odwzorowania) podzielony jest na  $n$  segmentów;
- każdy segment składa się z masy zawieszonyj na sprężynie oraz uwzględnienia tarcie lepkie i suche;
- odległości między segmentami są jednakowe;



Rys. 1. Koncepcja modelu ST3+OP2



Rys. 2. Fragment modelu ST3-OP2

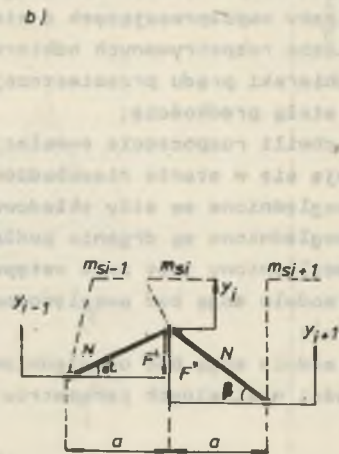
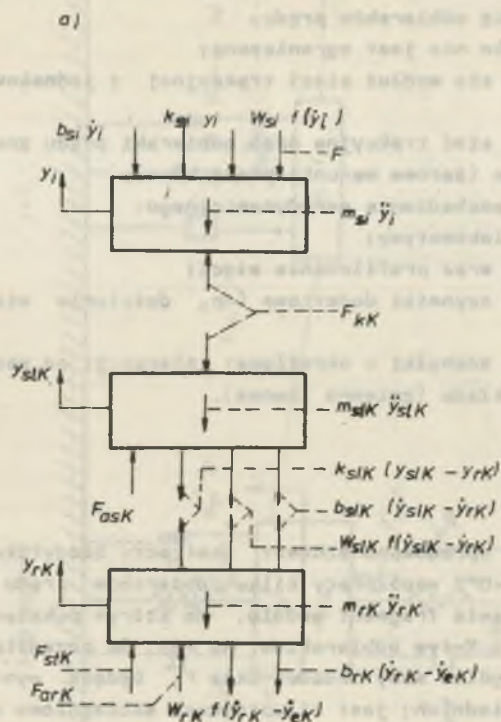
- masy połączone są nieważką nicią o naciągu  $N$ ;
- masy są stałe i jednakowe dla wszystkich segmentów;
- pozostałe parametry segmentów: sztywność sprężyny, współczynnik tarcia lepkiego oraz siła tarcia suchego - są zmienne;
- ilość rozpatrywanych przeseł (strona symulacji) uzależniona jest od liczby współpracujących z siecią odbieraków prądu;
- liczba rozpatrywanych odbieraków nie jest ograniczona;
- odbieraki prądu przemieszczają się wzdłuż sieci trakcyjnej z jednakową i stałą prędkością;
- w chwili rozpoczęcia symulacji sieć trakcyjna oraz odbieraki prądu znajdują się w stanie niewzbudzonym (zerowe warunki początkowe);
- uwzględnione są siły składowe pochodzenia aerodynamicznego;
- uwzględnione są drgania pudła lokomotywy;
- uwzględniony jest zwis wstępny oraz profilowanie sieci;
- w modelu mogą być uwzględnione czynniki dodatkowe (np. działanie wiatru);
- w modelu mogą być uwzględnione odchyłki o określonej tolerancji od wartości nominalnych parametrów układu (zmienne losowe).

### 3. Równania różniczkowe modelu

Na podstawie podanych założeń opracowano schemat zastępczy zmodyfikowanego modelu matematycznego ST3+OP2 współpracy kilku odbieraków prądu z siecią trakcyjną. Rys. 2 przedstawia fragment modelu, na którym pokazana jest współpraca 1-tego segmentu z  $K$ -tym odbierakiem. Na rys. 3a przedstawiono siły działające na poszczególne masy układu. Siła  $F$ , będąca wynikiem oddziaływania segmentów sąsiadnych, jest zilustrowana szczegółowo na rys. 3b.

Równania ruchu segmentu sieci trakcyjnej współpracującego z odbierakiem prądu, wyprowadzone na podstawie zasady d'Alemberta, są następujące:

$$\left. \begin{aligned}
 m_{s1} \ddot{y}_1 + b_{s1}(t) \dot{y}_1 + k_{s1}(t) y_1 + w_{s1}(t) f(\dot{y}_1) + \frac{N}{a} (2y_1 - y_{1-1} - y_{1+1}) + F_{kk} \\
 + m_{s1k} \ddot{y}_{s1k} + b_{s1k} (\dot{y}_{s1k} - \dot{y}_{rk}) + k_{s1k} (y_{s1k} - y_{rk}) + \\
 + w_{s1k} f(\dot{y}_{s1k} - \dot{y}_{rk}) = F_{s1k} - F_{kk} \\
 m_{rk} \ddot{y}_{rk} + b_{rk} (\dot{y}_{rk} - \dot{y}_{ek}) + w_{rk} f(\dot{y}_{rk} - \dot{y}_{ek}) - k_{s1k} (y_{s1k} - y_{rk}) - \\
 - b_{s1k} (\dot{y}_{s1k} - \dot{y}_{rk}) - w_{s1k} f(\dot{y}_{s1k} - \dot{y}_{rk}) = F_{stk} + F_{ark} + F_{ek}
 \end{aligned} \right\} (1)$$



$$\frac{y_i - y_{i-1}}{a} \approx \frac{F^I}{N}$$

$$\frac{y_i - y_{i+1}}{a} \approx \frac{F^{II}}{N}$$

$$F = F^I + F^{II}$$

$$F \approx \frac{N}{a} (2y_i - y_{i-1} - y_{i+1})$$

Rys. 3. Równania modelu ST3+OP2

gdzie:

- $y_i$  - przemieszczenie pionowe i-tego segmentu;  
 $\dot{y}_i, \ddot{y}_i$  - pochodne względem czasu przemieszczenia  $y_i$ ;  
 $y_{s1K}$  - przemieszczenie pionowe ślizgacza K-tego odbieraka;  
 $\dot{y}_{s1K}, \ddot{y}_{s1K}$  - pochodne przemieszczenia  $y_{s1K}$ ;  
 $y_{rK}$  - przemieszczenie pionowe ramy K-tego odbieraka;  
 $\dot{y}_{rK}, \ddot{y}_{rK}$  - pochodne przemieszczenia  $y_{rK}$ ;  
 $m_{s1}, b_{s1}, k_{s1}, w_{s1}$  - odpowiednio: masa, współczynnik tarcia lepkiego, sztywność oraz siła tarcia suchego i-tego segmentu;  
 $m_{s1K}, b_{s1K}, k_{s1K}, w_{s1K}$  - odpowiednio: masa, współczynnik tarcia lepkiego, sztywność usprężynowania, siła tarcia suchego - w układzie ślizgacza K-tego odbieraka;  
 $m_{rK}, b_{rK}, w_{rK}$  - odpowiednio: masa, współczynnik tarcia lepkiego, siła tarcia suchego - w układzie ramowy K-tego odbieraka;  
 $f(\dot{y}_i)$  - funkcja określająca znak siły tarcia suchego w i-tym segmente (np. funkcja  $\text{sgn}$  lub tangens hiperboliczny);  
 $F_{kk}$  - siła stykowa między K-tym odbierakiem a i-tym segmentem;  
 $F_{asK}, F_{arK}$  - składowe aerodynamiczne działające na ślizgacz i układ ramowy K-tego odbieraka;  
 $F_{stK}$  - siła statyczna K-tego odbieraka;  
 $F_{eK}$  - siła oddziaływania pudła pojazdu na układ ramowy K-tego odbieraka;  
 $\dot{y}_{eK}$  - prędkość przemieszczeń pionowych dachu pojazdu dla K-tego odbieraka;  
 $a$  - odległość między segmentami;  
 $N$  - sumaryczny naciąg drutów jezdnych sieci trakcyjnej.

• Po uzależnieniu pochodnych od drogi oraz przyjęciu, że odbierak nie odrywa się od sieci, tzn. spełniony jest warunek:

$$F_{kk} \geq 0 \rightarrow \dot{y}_i = y_{s1K} \quad (2)$$

układ równań (1) przekształcić można do następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned}
 & (m_{s1} + m_{s1K})v^2 \ddot{y}_i + b_{s1} v \dot{y}_i + k_{s1} y_i^* + w_{s1} f(\dot{y}_i) + \\
 & + \frac{N}{a} (2y_i^* - y_{i-1}^* - y_{i+1}^*) + k_{s1K} (y_i^* - y_{rK}^*) + \\
 & + b_{s1K} v (\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) + w_{s1K} f(\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) = F_{asK}^*
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{rK} v^2 \ddot{y}_{rK} - k_{slK} (y_i^* - y_{rK}^*) - b_{slK} v (\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) - \\
 - W_{slK} f(\dot{y}_i - \dot{y}_{rK}) + b_{rK} v (\dot{y}_{rK} - \dot{y}_{eK}) + \\
 + W_{rK} f(\dot{y}_{rK} - \dot{y}_{eK}) = F_{stK} + F_{srK} + F_{eK}
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gdzie  $v$  - prędkość przesuwania się odbieraków wzdłuż sieci; znaczenie symboli oznaczonych gwiazdką wynika ze wzorów (6).

Ruch segmentu nie współpracującego z odbierakiem prądu opisany jest równaniem:

$$m_{si} v^2 \ddot{y}_i + b_{si} v \dot{y}_i + k_{si} y_i^* + W_{si} f(\dot{y}_i) = \frac{N}{a} (y_{i-1}^* + y_{i+1}^* - 2y_i^*) \quad (4)$$

Siła stykowa między siecią trakcyjną a  $K$ -tym odbierakiem prądu wyrażone jest równaniem:

$$F_{kK} = m_{si} v^2 \ddot{y}_i + b_{si} v \dot{y}_i + k_{si} y_i^* + W_{si} f(\dot{y}_i) + \frac{N}{a} (2y_i^* - y_{i-1}^* - y_{i+1}^*) \quad (5)$$

Składnik  $\frac{N}{a} (2y_i^* - y_{i-1}^* - y_{i+1}^*)$ , uwzględniający oddziaływanie segmentów sąsiednich, wyprowadzony został przy założeniu, że wartości kątów  $\beta$  (rys. 3b) są na tyle małe podczas współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, że funkcję sinus można zastąpić tangensem.

Wielkości oznaczone gwiazdką wyrażone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 y_i^* &= y_i - \Delta y_i + y_{dod_i} \\
 y_{rK}^* &= y_{rK} - \Delta y_i \\
 F_{eK}^* &= F_{eK} + F_{dod_K}
 \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

- $\Delta y_i$  - zmiana wysokości zawieszenia drutu jezdnego, mierzona od poziomu na początku rozpatrywanego odcinka sieci trakcyjnej (wielkość ta jest uzależniona od zwisu wstępnego oraz od profilu sieci);
- $y_{dod_i}$  - składnik uwzględniający wpływ czynników dodatkowych (np. chwilowe przemieszczenie sieci trakcyjnej spowodowane wiatrem);
- $F_{dod_K}$  - składnik uwzględniający wpływ czynników dodatkowych (np. siła elektrodynamiczna).

W przyjętym zapisie  $\Delta y_i$ ,  $y_{dod_i}$ ,  $F_{dod_K}$  są funkcjami stałymi.



Odchyłki parametrów mogą być uwzględnione w następujący sposób:

$$P = P_N + \theta \quad (7)$$

gdzie:

$P_N$  - wartość nominalna parametru  $P$ ;

$\theta$  - odchylenie od wartości nominalnej, generowane jako zmienna losowa w odpowiednim zakresie tolerancji.

Równania (3) i (4) są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi drugiego rzędu, nieliniowymi, niejednorodnymi, o zmiennych współczynnikach. Sumaryczna liczba równań różniczkowych do rozwiązania wynosi  $n + R$ , gdzie:  $n$  - oznacza liczbę segmentów odwzorowujących odcinek sieci trakcyjnej;  $R$  - oznacza liczbę odbieraków prądu współpracujących z siecią w strefie odwzorowania.

Przyjmując, że  $a \rightarrow \infty$  oraz pomijając indeksy  $i$  oraz  $K$ , można równania (3) i (5) oraz wzory (6) przekształcić do postaci opisującej model ST1+OP2 współpracy jednego odbieraka prądu z siecią trakcyjną.

#### 4. Uwagi końcowe

Zasadniczą różnicą pomiędzy zmodyfikowanym modelem ST3+OP2 (oprócz uwzględnienia zmian wysokości zawieszenia sieci, czynników dodatkowych oraz składowych aerodynamicznych) a modelem Morrisa - jest przyjęcie w modelu sieci trakcyjnej (ST3) zmienności parametrów:  $b_{s1}$ ,  $k_{s1}$ ,  $w_{s1}$ . Zmiany te mogą być opisane funkcjami okresowymi i odpowiednio zsynchronizowane dla poszczególnych segmentów. Modyfikacja powyższa ułatwia oprogramowanie modelu wielomasowego ST3+OP2 oraz skraca czas obliczeń maszynowych. Strefa symulacji w modelu Morrisa równa jest strefie odwzorowania. Przyjęcie zmienności parametrów ( $b_{s1}$ ,  $k_{s1}$ ,  $w_{s1}$ ) w modelu ST3+OP2 umożliwia dowolne wydłużanie strefy symulacji przy niezmięnionej ilości równań opisujących model.

Należy zwrócić uwagę, że pojęcie strefa odwzorowania w modelu ST1+OP2 nie występuje, ponieważ sieć trakcyjna zredukowana jest do jednego tylko segmentu o zmiennych parametrach.

Model ST3+OP2 umożliwia również badanie rozchodzenia się drgań w sieci trakcyjnej, badania drgań na rozjazdach oraz odbić falowych. Wprowadzenie wskaźnika obecności odbieraka w układach równań typu (3) umożliwi ponadto - włączanie i wyłączanie dowolnego odbieraka w trakcie symulacji współpracy z siecią trakcyjną.

Zmodyfikowany model matematyczny ST3+OP2 nie nakłada ograniczeń co do sposobu usytuowania odbieraków w strefie odwzorowania, ani na długość tej strefy. Długość strefy odwzorowania i związana z tym liczba segmentów oraz liczba rozpatrywanych odbieraków - mogą być jedynie ograniczone mocą obli-

czeniuową dostępnego sprzętu komputerowego. W przypadku wykorzystanie systemu CSMP na maszynach cyfrowych IBM-360, 370 lub R-32 - ograniczenia takie nie występują.

Przedstawiony model matematyczny umożliwia szybkie i tanie wykonania badań niezwykle trudnych do realizacji w warunkach plenerowych.

Zaprezentowany artykuł nie wyczerpuje całości problematyki związanej z modelem ST3+OP2. Kontynuacji wymaga: analiza czułości modelu oraz zagadnienie realizacji przebiegów symulacyjnych.

#### LITERATURA

- [1] Ebeling H.: Stromabnahme bei hohen Geschwindigkeiten-Probleme der Fahrleitungen und Stromabnehmer - Elektrische Bahnen nr 2 i 3, 1969.
- [2] Fidyrych Z.: Zabezpieczenie niezawodnego odbioru prądu przy wysokich prędkościach jazdy pociągów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 62, 1979.
- [3] Fisher W.: Kettenwerk und Stromabnehmer bei hohen Zuggeschwindigkeiten - ZEV Glasers Annalen nr 5, 1977.
- [4] Frajfeld A.W.: Projektowanie kontaktnej sieci. Wyd. "Transport", Moskwa 1978.
- [5] Grajner J.: Drgania ruchomego układu dyskretnej współpracującego z układem ciągłym na przykładzie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska 1979.
- [6] Kokoiev A.D.: Fizyko-matematyczne srodki do badania dynamiki wzajemnego oddziaływania tokoprijemnika i kontaktnej podwieszki. Vestnik VNIIZTr. nr 2, 1975.
- [7] Konieczny R.: Ocena jakości współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu symulacji komputerowej. Praca doktorska, Politechnika Śląska 1981.
- [8] Scott P.R., Rothman M.: Computer Evaluation of Overhead Equipment for Electric Railroad Traction - IEEE Transactions on Industry Applications 1974 (Sept.) Oct. tom 1A-10 Nr 5.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Marcinkowski

Wpłynęło do redakcji dnia 3.XI.1982 r.

#### МОДИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСКОЛЬКИХ ТОКОПРИЕМНИКОВ И КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ

#### Резюме

В статье представлено концепцию, исходные данные, а также дифференциальные уравнения, модифицированной математической модели взаимодействия нескольких токоприемников и контактной подвески. Эта модель, предназначенная к выполнению симуляций на ЭВМ, даёт возможность последовать поведению в очень сложных полигонных условиях.

## THE MODIFIED MATHEMATICAL MODEL ST3+OP2 OF COLLABORATION OF SEVERAL CURRENT COLLECTORS WITH THE OVERHEAD CONTACT SYSTEM

## Summary

The article presents the idea, the assumptions, and the differential equations on the modified mathematical model of several current collectors cooperation with the overhead contact system. This model, predisposed for the execution of computer simulation enables making research very difficult otherwise for realization in field conditions.