ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: ELEKTRYKA z. 87 Nr kol. 773

Władysław PASZEK, Zbigniew PAWELEC

Instytut Maszyn i Urządzeń
Elektrycznych Politechniki Śląskiej

PARAMETRY ELEKTROMAGNETYCZNE MASZYNY INDUKCYJNEJ O WIRNIKU GŁĘBOKOŻŁOBKOWYM Z PRĘTAMI KLINOWYMI

Streszczenie. Przedstawiono metodę wyznaczania parametrów elektromagnetycznych o schemacie zastępczym maszyny indukcyjnej o wirniku głębokożłobkowym z prętami klinowymi. Admitancja operatorowa prętów wirnika o transcendentnej postaci funkcyjnej posłużyła do wyznaczenia parametrów skupionych R,L schematu zastępczego po dokonaniu rozkładu admitancji na nieskończony szereg ułamków prostych. Dokładność aproksymacji przy skończonej liczbie obwodów zastępczych wirnika wynika z porównania charakterystyki modułowo-fazowej. Załączone wykresy dają parametry obwodów zastępczych wirnika dla danego współczynnika kształtu prętów klinowych.

Model matematyczny maszyny indukcyjnej o wirniku głębokożłobkowym zawiera równania różniczkowe zwyczajne wyrażające zależności pomiędzy prądami, napięciami i strumieniami skojarzonymi stojana i pola szczeliny powietrznej oraz równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych opisujące rozkład przestrzenny strumienia rozproszenia w części żłobkowej prętów wirnika.

Łączne rozwiązywanie układu równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych jest utrudnione. Dlatego dąży się do zastąpienia modelu matematycznego maszyny przybliżającym go układem równań różniczkowych zwyczajnych o tak dobranych parametrach, aby przy dużej dokładności przybliżenia liczba równań była możliwie niewielka. Można tego dokonać poprzez wyznaczenie parametrów zastępczych skupionych obwodów wirnika na podstawie rozkładu admitancji operatorowej żłobkowej części pręta w szereg ułamków prostych.

W pracach [3], [6] przedstawiono takie równania dla silników o prostokątnych żłobkach wirnika, którego parametry wyrażają się przez proste zależności analityczne. W przypadku maszyny o prętach klinowych oblicza się je z rozkładu admitancji pręta o większej złożoności funkcji transcendentnej.

1. Równania maszyny indukcyjnej o stałych rozłożonych w obwodach klatki wirnika

Dla uproszczenia analizy przyjęto, że uzwojenia stojana i wirnika są sprzężone wyłącznie za pośrednictwem podstawowej harmonicznej przestrzen-

nego rozkładu indukcji magnetycznej w szczelinie wzdłuż obwodu maszyny. Zjawisko wypierania prądu w prętach wirnika potraktowano jako jednowymiarowe, tzn. założono, że rozkład gęstości prądu w przekroju poprzecznym pręta zależy jedynie od współrzędnej mierzonej wzdłuż jego wysokości. Założono także liniowość oraz symetrię obwodów elektrycznych i magnetycznych silnika.

Przy wykorzystaniu współrzędnych kompleksorowych wielkości elektromagnetycznych układ równań silnika, wyrażony na płaszczyźnie odniesienia wirującej z prędkością kątową ω względem stojana (nieruchomej względem wirnika), przyjmuje postać:

$$\underline{U}_1 = \frac{d\underline{\Psi}_1}{dt} + j\omega\,\underline{\Psi}_1 + R_1\,\underline{I}_1 \tag{1a}$$

$$0 = \frac{d\underline{\Psi}'_{2\sigma}}{dt} + R'_{2\sigma}\,\underline{I}'_2 + \underline{U}'_{2p} \tag{1b}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ \underline{\Psi}'_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1\sigma} + L_\mu, & L_\mu \\ L_\mu, & L'_{2\sigma} + L_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} \tag{1c}$$

Kompleksory $\underline{H}_{1(2)}$ napięć, strumieni skojarzonych oraz prądów są powiązane z odpowiednimi wielkościami fazowymi stojana (W_A, W_B, W_C) oraz wirnika (W_k; $k = 1,2,\ldots N$) za pomocą relacji [3]:

$$\underline{W}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(W_A + \underline{a}_1 W_B + \underline{a}_1^2 W_C)\,e^{-j\vartheta_1(t)} \quad ; \quad \underline{a}_1 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \tag{2a}$$

$$\underline{W}'_2 = \zeta_W \sqrt{\frac{2}{N}}\,(W_1 + \underline{a}_2 W_2 + \ldots \underline{a}_2^{N-1} W_N); \quad \underline{a}_2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{2b}$$

gdzie:

N – liczba prętów uzwojenia wirnika,

$\vartheta_1(t) = \vartheta_{10} + \int_0^t \omega(t)dt$ – kąt elektryczny położenia osi fazy A stojana względem osi odniesienia wirnika,

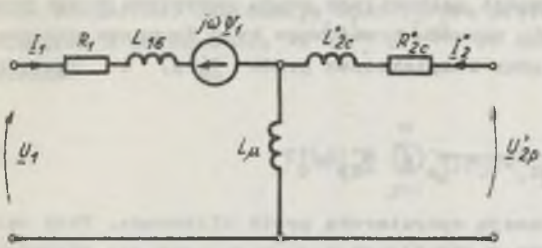
ζ_W – współczynnik sprowadzenia dla wirnika, dla napięć i strumieni skojarzonych:

$$\zeta_u = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\kappa_1\,\frac{\xi_1}{\xi_2}$$

dla prądów: $\zeta_I = \frac{1}{\zeta_u}$

$$\xi_2 = \sin \frac{\pi p_b}{N}$$

z_1 ξ_1, p_b – liczba zwojów, współczynnik uzwojenia oraz liczba par biegunów uzwojenia stojana.



Rys. 1. Schemat zastępczy silnika o wirniku głębokożłobkowym

Wielkościami fazowymi wirnika są prądy, strumienie skojarzone i spadki napięć przyporządkowane elementarnym obwodom klatki złożonym z dwu sąsiednich prętów i odpowiadających im segmentów pierścieni zwierających. Schemat zastępczy silnika dla wielkości kompleksorowych przedstawiono na rys. 1.

Części prętów klatki wystające poza pakiet blach oraz segmenty pierścieni zwierających, zwane połączeniami czołowymi klatki, w których nie zachodzi wypieranie prądu, reprezentowane są przez parametry skupione R'_{2c} oraz L'_{2c}.

Indukcyjność L_{2c} zawiera poza indukcyjnością rozproszenia połączeń czołowych klatki także indukcyjność rozproszenia szczelinowego wirnika oraz indukcyjność rozproszenia szczerbin żłobkowych [7] $L_{N\sigma}$:

$$R'_{2c} = \xi_u^2 \left(2R_R + 4\xi_2^2 R_W\right) \tag{3a}$$

$$L'_{2c} = \xi_u^2 \frac{\mu_0 \pi D l_1}{\delta' N} - L_\mu + \xi_u^2 \left[2L_{R\sigma} + 4\xi_2^2 \left(L_{W\sigma} + L_{N\sigma}\right)\right] \tag{3b}$$

gdzie:

R_R, $L_{R\sigma}$ – rezystancja oraz indukcyjność rozproszenia pojedynczego segmentu pierścienia zwierającego,

R_W, $L_{W\sigma}$ – rezystancja oraz indukcyjność rozproszenia części pręta poza pakietem blach,

D, l_1, δ' – średnica wirnika, długość idealna pakietu blach oraz zastępcza grubość szczeliny powietrznej.

Oddziaływanie pola elektromagnetycznego rozproszenia żłobków wirnika w równaniu (1b) uwzględniono za pomocą kompleksora spadku napięcia $\underline{U}_{2p}$ na częściach żłobkowych prętów. $\underline{U}'_{2p}$ nie zależy od rozkładu przestrzennego

wektora natężenia pola elektrycznego w pręcie, lecz jedynie od jego wartości na powierzchni pręta przy szczerbinie żłobkowej $\vec{E}_p$:

$$U'_{2p} = -\vec{E}_p \vec{l}_i \tag{4}$$

W wyniku rozwiązania równania cząstkowego dyfuzji dla natężenia pola elektrycznego wewnątrz pręta, związanego ze strumieniem rozproszenia żłobkowego, przy założeniu znajomości całkowitego prądu przepływającego przez żłobek oraz przy wykorzystaniu warunku brzegowego typu Neumanna otrzymuje się operatorowy związek pomiędzy kompleksorem prądu $\underline{I}'_2(p)$ i napięciem $\underline{U}'_{2p}(p)$:

$$\underline{I}'_2(p) = Y'_p(p)\, \underline{U}'_{2p}(p) \tag{5}$$

Funkcja $Y'_p(p)$ jest admitancją operatorową pręta klinowego. Przy założeniu że rzeczywisty, trapezowy kształt przekroju poprzecznego pręta przybliżony jest za pomocą wycinka pierścienia o promieniach R, r (rys. 2), wyraża się ona przez zmodyfikowane funkcje Bessela argumentu operatorowego [1], [7]:

$$Y'_p(p) = \frac{L(p)}{M(p)} = 4\xi_u^2\xi_2^2 \frac{\frac{b}{l_i}\gamma}{\sqrt{\gamma\mu_o p}} \cdot \frac{I_1(\beta Z)\, K_1(Z) - I_1(Z)\, K_1(\beta Z)}{I_o(\beta Z)\, K_1(Z) + I_1(Z)\, K_o(\beta Z)} \tag{6}$$

Rys. 2. Przekrój żłobka klinowego

gdzie:

$$Z = \frac{h}{1-\beta}\sqrt{\gamma\mu_o p},$$

$\beta = \frac{r}{R}$ – współczynnik zwężenia żłobka,

h – wysokość pręta,

γ – konduktywność pręta.

Równania (1a–c) oraz (5) opisują zachowanie się silnika podczas dowolnych stanów nieustalonych. Jednak ich rozwiązanie nastręcza trudności ze względu na skomplikowaną postać admitancji operatorowej $Y'_p(p)$.

2. Przybliżony schemat zastępczy o parametrach skupionych w obwodzie wirnika

Przedstawiony wyżej model matematyczny maszyny o parametrach rozłożonych można aproksymować za pomocą skończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Poprzez rozkład meromorficznej funkcji $Y'(p)$, posiadającej nieskończoną ilość rzeczywistych, pojedynczych biegunów $p_j = -\lambda_{Mj}$ w lewej płaszczyźnie liczb zespolonych w szereg ułamków prostych [2]:

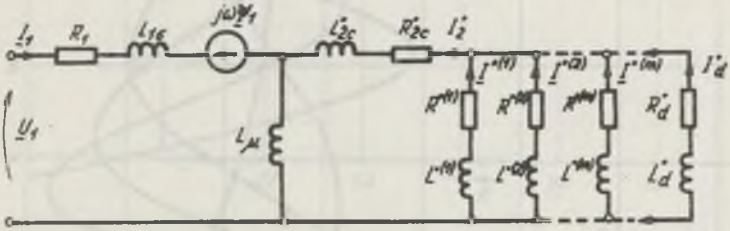
$$Y'_p(p) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{p - p_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L(p_j)}{\left[\frac{d}{dp} M(p)\right]_{p=p_j}} \cdot \frac{1}{p + \lambda_{Mj}} \tag{7}$$

można odwzorować admitancję operatorową pręta za pomocą wiązki gałęzi równoległych o parametrach $R'^{(j)}$, $L'^{(j)}$. Po uwzględnieniu skończonej ilości wyrazów:

$$Y'_p(p) \cong \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R'^{(j)} + pL'^{(j)}} \tag{8}$$

otrzymuje się schemat zastępczy silnika o parametrach skupionych przedstawiony na rys. 3, przy czym:

$$L'^{(j)} = \frac{1}{a_j}, \quad R'^{(j)} = \lambda_{Mj} L'^{(j)} \tag{9}$$



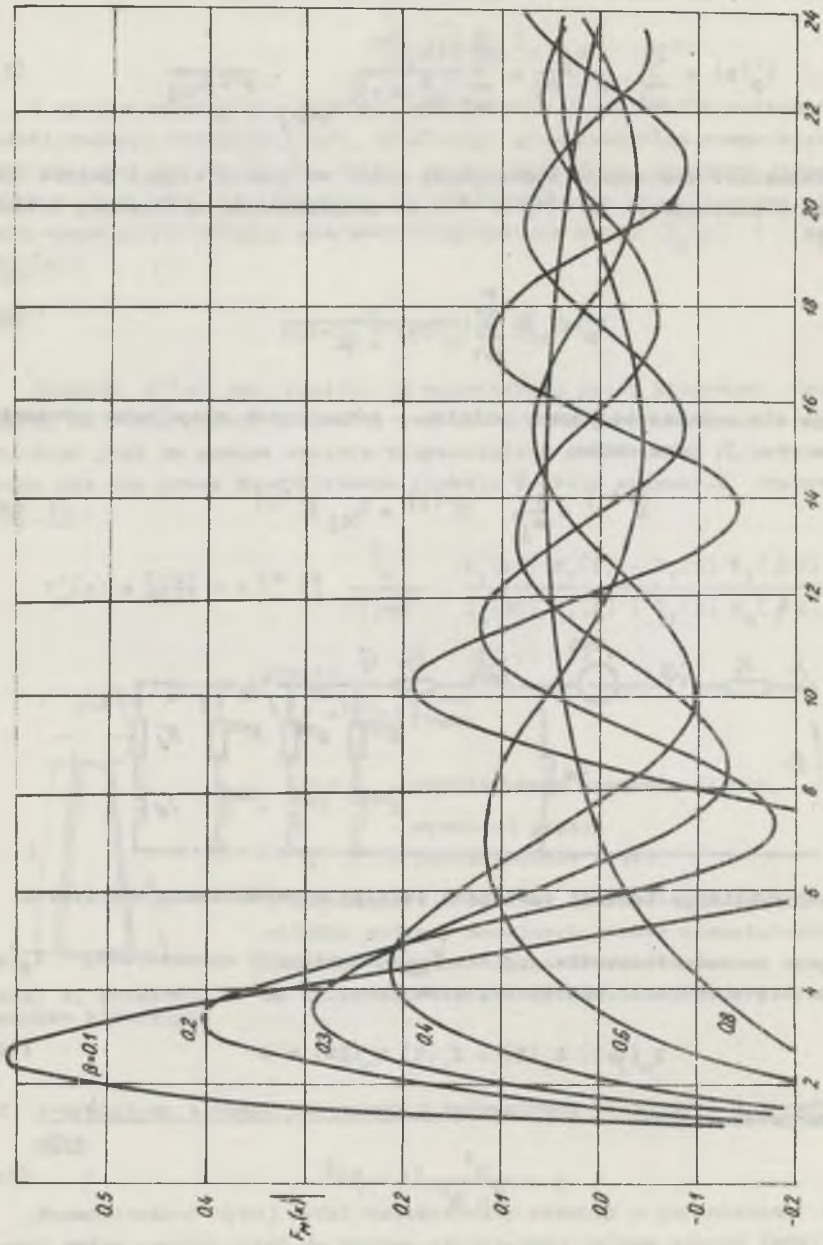
Rys. 3. Przybliżony schemat zastępczy silnika o parametrach skupionych

Miejsca zerowe mianownika $p_j = -\lambda_{Mj}$ admitancji operatorowej $Y'_p(p)$ wyznacza się z równania charakterystycznego

$$I_0(\beta z)\, K_1(z) + I_1(z)\, K_0(\beta z) = 0 \tag{10}$$

W wyniku podstawienia:

$$p = \frac{x^2}{\gamma \mu_0 h^2} (1 - \beta)^2 \tag{11}$$



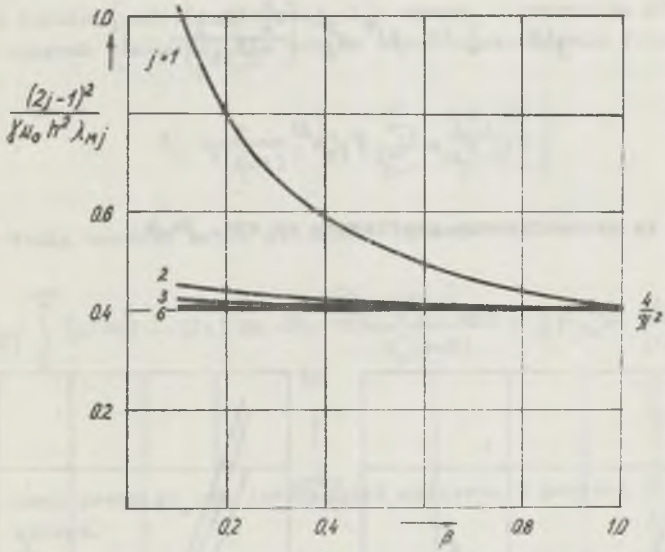
Rys. 4. Zależność funkcji $F_M(x)$ od współczynnika zwężenia β

zmodyfikowane funkcje Bessela w równaniu (10) przechodzą w funkcje zwykłe, a zagadnienie sprowadza się do znalezienia miejsc zerowych funkcji:

$$F_M(x) = J_o(\beta x)\, Y_1(x) - J_1(x)\, Y_o(\beta x) = 0 \qquad (12)$$

Na rys. 4 przedstawiono rodzinę funkcji $F_M(x)$ przy parametrycznie zmiennym współczynniku zwężenia żłobka.

Rys. 5 przedstawia zależność pierwszych sześciu wartości $\lambda_{Mj} = -p_j$ od współczynnika zwężenia β.



Rys. 5. Zależność pierwszych sześciu wyrażeń $\frac{(2j-1)^2}{\gamma\mu_o h^2 \lambda_{Mj}}$ od współczynnika β

Parametry obwodów zastępczych $L^{*(j)}$, $R^{*(j)}$ dogodnie jest przedstawić przez indukcyjność L_p^* i rezystancję R_p^* pręta w statycznym stanie ustalonym:

$$L^{*(j)} = l_j(\beta)\, L_p^* \qquad (13a)$$

$$R^{*(j)} = r_j(\beta)\, R_p^* \qquad (13b)$$

gdzie:

$$L_p^* = 4\,\zeta_u^2\,\xi_2^2\,\frac{l_1\mu_o h}{b}\cdot\frac{\beta}{(1+\beta)}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\,A(\beta)$$

$$R_p' = 4\,\zeta\, u^2\, \xi_2^2\, l_1\, \frac{2\beta}{bh\gamma(1+\beta)}$$

$$A(\beta) = \left[\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta^2$$

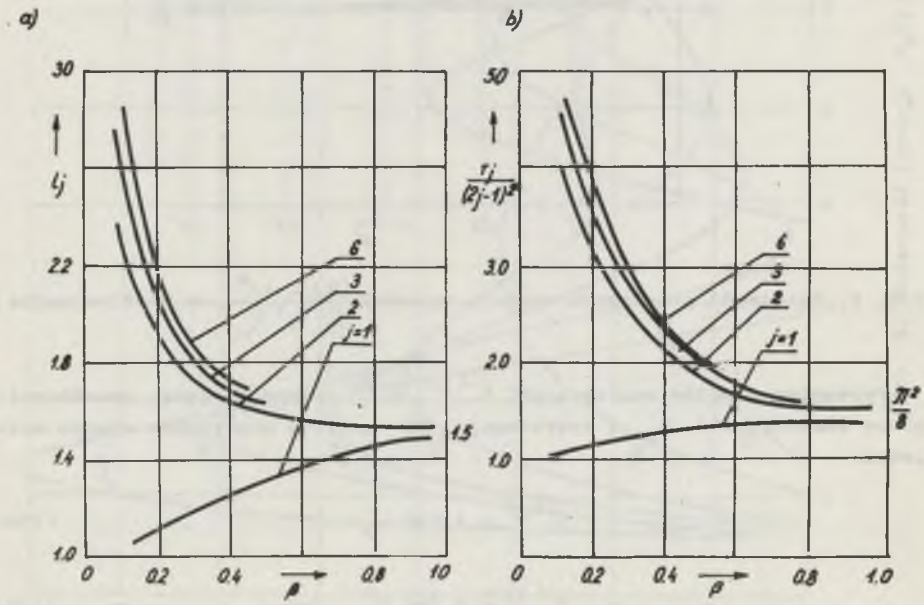
Współczynniki $l_j(\beta)$ oraz $r_j(\beta)$ zależą wyłącznie od współczynnika zwężenia żłobka β [7]:

$$l_j(\beta) = (1-\beta)^2 \frac{1}{2A(\beta)} \left[\frac{J_0^2(\beta x_j)}{J_1^2(x_j)} - 1\right] \tag{14a}$$

$$r_j(\beta) = \frac{1}{4}(1-\beta)^2\, x_j^2 \left[\frac{J_0^2(\beta x_j)}{J_1^2(x_j)} - 1\right] \tag{14b}$$

$$x_j^2 = \lambda_{Mj}\,\gamma\,\mu_0 h^2 \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

Zależności te przedstawione graficznie na rys. 6a,b.



Rys. 6a,b. Zależność parametrów l_j, r_j od współczynnika zwężenia β

Dla uściślenia równań silnika pominięte uprzednio składniki rozkładu $Y_p^{\cdot}(p)$ wyższych rzędów ($j > m$) uwzględniono w sposób przybliżony poprzez wprowadzenie do schematu zastępczego (rys. 3) dodatkowej gałęzi o parametrach $L_d^{\cdot}$, $R_d^{\cdot}$ [3] [7]. Wartość rezystancji $R_d^{\cdot}$ wynika z kryterium równości rezystancji pręta w statycznym stanie ustalonym dla modelu ścisłego i przybliżonego:

$$R_d^{\cdot} = R_p^{\cdot}\, r_d = R_p^{\cdot} \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j(\phi)}} \tag{15}$$

Wartość indukcyjności dodatkowej $L_d^{\cdot}$ wynika z kryterium równości zastępczych stałych czasowych dla prętów wirnika dla modelu ścisłego i przybliżonego:

$$L_d^{\cdot} = L_p^{\cdot}\, r_d^2 \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1_j(\phi)}{|r_j(\phi)|^2} \right\} \tag{16}$$

Zastępczą stałą czasową pręta obliczono wg zależności:

$$T_Z = \frac{1}{i(\infty)} \int_0^{\infty} [i(\infty) - i(t)\, dt = - \frac{\left[\frac{d}{dp} Y_p^{\cdot}(p)\right]_{p=0}}{Y_p^{\cdot}(p=0)} = \frac{1}{2} \gamma \mu_0 h^2 \frac{A(\phi)}{(1-\phi)^2} = \frac{L_p^{\cdot}}{R_p^{\cdot}} \tag{17}$$

gdzie:

$i(t)$ – prąd pręta po przyłożeniu doń napięcia w postaci skoku jednostkowego.

Przy uwzględnieniu parametrów uzupełniających $L_d^{\cdot}$, $R_d^{\cdot}$ przybliżony układ równań różniczkowych o $(m+1)$ obwodach zastępczych wirnika przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ [0] \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ [\underline{\Psi}_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega & \\ & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ [\underline{\Psi}_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & \\ & [R_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ [\underline{I}_2] \end{bmatrix} \tag{18a}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ [\underline{\Psi}_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1\sigma} + L_\mu, & L_\mu, \dots L_\mu \\ L_\mu & \\ \vdots & [L_2] \\ L_\mu & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ [\underline{I}_2] \end{bmatrix} \tag{18b}$$

gdzie:

$$[R_2] = R_{2o}[E] + \mathrm{diag}\left\{R^{\cdot(1)},\ R^{\cdot(2)} \ldots R^{\cdot(m)},\ R_d^{\cdot}\right\}$$

$$[L_2] = (L_{2o}^{\cdot} + L_{\mu})\ [E] + \mathrm{diag}\left\{L^{\cdot(1)},\ L^{\cdot(2)} \ldots L^{\cdot(m)},\ L_d^{\cdot}\right\}$$

$$[\underline{I}_2] = \left[\underline{I}^{\cdot(1)},\ \underline{I}^{\cdot(2)},\ \ldots\ \underline{I}^{\cdot(m)},\ \underline{I}_d^{\cdot}\right]^T$$

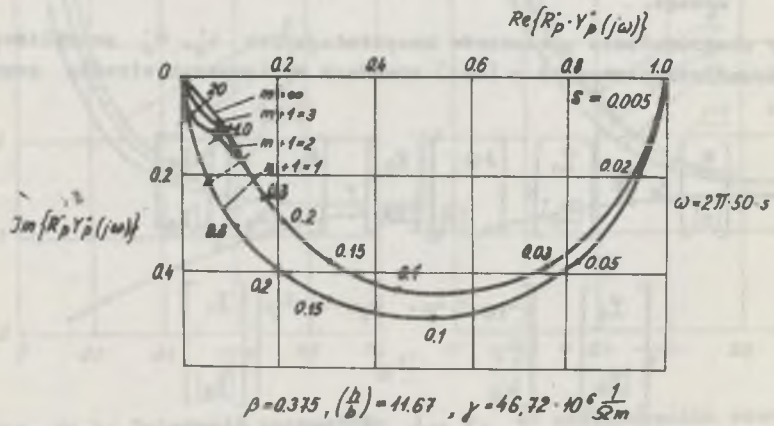
$$[\underline{\psi}_2] = \left[\underline{\psi}^{\cdot(1)},\ \underline{\psi}^{\cdot(2)},\ \ldots\ \underline{\psi}^{\cdot(m)},\ \underline{\psi}_d^{\cdot}\right]^T$$

$[E]$ = kwadratowa macierz jednostkowa o wymiarach $(m+1) \times (m+1)$.

3. Ocena dokładności przybliżenia modelu matematycznego maszyny za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych

Dla oceny stopnia dokładności odwzorowania ścisłego modelu silnika głębokożłobkowego za pomocą przybliżonego układu równań różniczkowych zwyczajnych dokonano porównania odpowiednich charakterystyk częstotliwościowych.

Na rys. 7 przedstawiono rodzinę charakterystyk modułowo-fazowych admitancji $Y_p^{\cdot}(p = j\omega)$ żłobka dla różnej liczby obwodów zastępczych m+1. Charakterystykę modelu dokładnego przedstawia krzywa oznaczona przez $m = \infty$. Charakterystyka ta ma kształt zależny jedynie od współczynnika zwężenia β (nie zależy od wysokości pręta h i jego konduktywności γ). Przy zmianie wysokości lub konduktywności zmienia się natomiast skala częstotliwości charakterystyki.

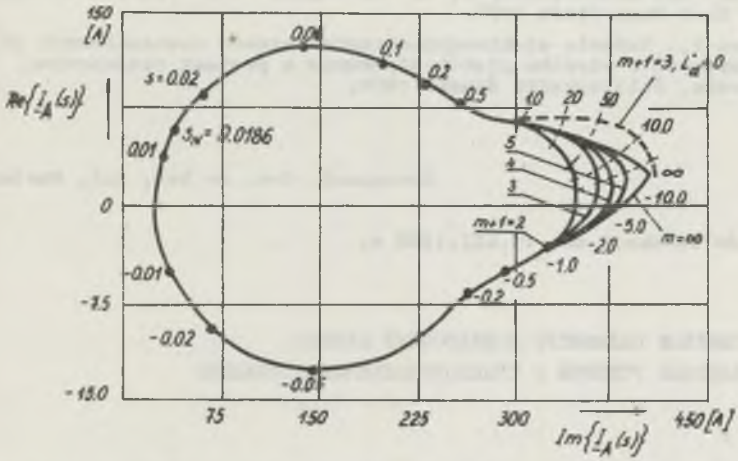


Rys. 7. Rodzina charakterystyk modułowo-fazowych admitancji żłobka klinowego dla różnej liczby obwodów zastępczych m + 1

Dla zmienionych wartości h^* oraz γ^* częstotliwość danego punktu charakterystyki wynosi:

$$\omega^* = \frac{\gamma h^2}{\gamma^* h^{*2}} \tag{19}$$

Na rys. 8 dokonano podobnego porównania dla poślizgowych charakterystyk prądu stojana silnika o mocy 400 kW (h = 35 mm, b = 0,375). Charakterystykę zaznaczoną linią przerywaną obliczono przy zerowej wartości indukcyjności uzupełniającej L_d''.



Rys. 8. Rodzina poślizgowych charakterystyk prądu stojana dla równej liczby obwodów zastępczych m + 1 (silnik SZJr-138r o mocy 400 kW)
$\underline{I}_A = \hat{U}_A \, \underline{Y}_1(s)$, $\underline{Y}_1^{(s)}$ – fazowa admitancja stojana

Charakterystyki częstotliwościowe przybliżonego modelu maszyny odbiegają od charakterystyk modelu dokładnego dla dużych wartości częstotliwości. Prowadzi to do wniosku, że przy obliczaniu przebiegów wielkości elektromagnetycznych w stanach ustalonych silnika na podstawie przedstawionego wyżej zastępczego układu równań różniczkowych zwyczajnych największe niezgodności w porównaniu z rozwiązaniem dokładnym występują w początkowych chwilach trwania procesu.

Na podstawie podobnych porównań dla silników posiadających żłobki o różnym współczynniku zwężenia oraz na podstawie obliczeń wybranych stanów nieustalonych stwierdzono, że dla uzyskania dostatecznie dokładnych wyników wystarczy uwzględnić 3 lub 4 obwody zastępcze, przy czym dla żłobków o małym współczynniku zwężenia liczba obwodów zastępczych może być mniejsza.

LITERATURA

[1] Nürnberg W.: Die Asynchronmaschine. Springer 1963.

[2] Doetsch G.: Introduction to the Theory und Application of the Laplace Transformation. Springer Vlg 1974.

[3] Paszek W.: Transientes Verhalten der Induktions maschine mit Hochstabläufer. Archiv für Elektrotechnik 63 (1981) 77-86.

[4] Prasler H.: Kettenleiter - Netzmodell für das elektromagnetische Feld in den Nuten elektrischer Maschinen. Archiv für Elektrotechnik 56 (1971) str. 193.

[5] Rogers G.J.: Induction motor terminal-voltage equation Proc IEE Vol. 123, Nr 3 1976.

[6] Paszek W., Kudła J., Pawelec Z.: Transientes Verhalten der Induktionsmaschine mit Hochstabläufer. G. Fachtagung Industrielle Automatisierung. Karl-Marx-Stadt 1978.

[7] Pawelec Z.: Badanie elektrodynamicznych stanów nieustalonych silników indukcyjnych o wirniku głębokożłobkowym z prętami trapezowymi. Praca doktorska. Politechnika Śląska 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Marian Noga

Wpłynęło do Redakcji dn. 15.XII.1982 r.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ
С ГЛУБОКОПАЗОВЫМ РОТОРОМ С ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫМИ СТЕРЖНЯМИ

Р е з ю м е

Представлено метод определения электромагнитных параметров в схеме замещения асинхронной машины с глубокопазовым ротором с трапецеидальными стержнями. Операторный адмитанс стержня ротора, имеющий трансцендентный вид использовано для определения сосредоточенных параметров R,L в схеме замещения, после разложения адмитанса на бесконечный ряд простых дробей. Точность апроксимирования, при конечном числе замещающих контуров ротора, определяется путём сравнения амплитудно-фазовой характеристики. Приложенный график показывет параметры контуров ротора для заданного коэффициента формы стержня.

ELECTROMAGNETIC PARAMETERS OF INDUCTION MACHINE
WITH WEDGE SHAPED DEEP BAR ROTOR

S u m m a r y

The method of evaluation of the electromagnetic parameters in the equivalent circuit of a induction machine with deep wedge shaped rotor bars

is presented. The operational admittance of the rotor bars possesing a transcedent form after its expansion into infinite partial fractions determines the lumped R,L values of the equivalent circuit. The accuracy of the approximation at finite number of rotor equivalent circuits has been estimated from the frequency responce plot.
The enclosed diagramms give the parameters of the roter circuit for wedge shaped bars at given shape factor.