ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: ELEKTRYKA z. 87 Nr kol. 773

Zbigniew PAWELEC

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA KLATKOWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM DWUWYMIAROWEGO WYPIERANIA PRĄDU W PRĘTACH WIRNIKA O PRZEKROJU TRAPEZOWYM

Streszczenie. Wykorzystując cząstkowe równanie różniczkowe dyfuzji z warunkiem brzegowym typu Neumanna opisujące dwuwymiarowy rozkład przestrzenny gęstości prądu w żłobkach wirnika, sformułowano model matematyczny silnika klatkowego. Podano go w postaci układu równań różniczkowo-całkowych, przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych rozkładu przestrzennego indukcji magnetycznej w szczelinie.

W oparciu o metodę składników modalnych sformułowano aproksymujący układ równań różniczkowych zwyczajnych oraz podano graficznie zależności pozwalające na dobór parametrów tego modelu w zależności od wymiarów trapezowego żłobka wirnika.

1. Model o stałych rozłożonych w obwodach wirnika

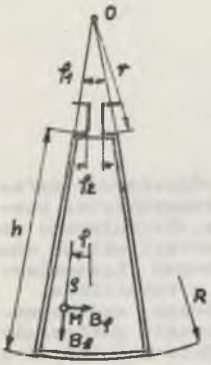
Przyjęto, że stan elektromagnetyczny obwodów silnika indukcyjnego o wirniku głębokożłobkowym opisywany jest przez układ wzajemnie powiązanych równań różniczkowych cząstkowych i zwyczajnych. Równania cząstkowe dyfuzji wraz z warunkami brzegowymi typu Neumanna opisują rozkład przestrzenny gęstości prądu wewnątrz części żłobkowych prętów wirnika, znajdujących się w polu magnetycznym rozproszenia żłobkowego. Równania różniczkowe zwyczajne wiążą prądy, napięcia i strumienie skojarzone pozostałych obwodów maszyny, którym przyporządkowano parametry skupione.

Dla uproszczenia analizy założono:

- liniowość zależności dla obwodów elektrycznych oraz nieskończenie dużą przenikalność elementów ferromagnetycznych,
- symetrię obwodu magnetycznego oraz obwodów elektrycznych maszyny,
- pominięcie efektów skrajnych zachodzących w prętach, przy końcach pakietu blach wirnika; żłobek wirnika rozpatruje się jako wycinek żłobka nieskończenie długiego,
- jednorodność pola magnetycznego rozproszenia w szczerbinie żłobka wirnika.

Dla natężenia pola elektrycznego wewnątrz pojedynczego, k-tego pręta, przez który przepływa prąd i_{pk}, obowiązuje równanie cząstkowe dyfuzji [1], [2]:

$$\nabla^2 E_k(M) = \gamma \mu_0 \frac{\partial E_k(M)}{\partial t} \tag{1}$$



$\varphi_2 \cdot r = b_s$

$\varphi_1 r = b$

$\frac{b_s}{b} = \lambda$

$\frac{r}{R} = \beta$

Rys. 1. Przekrój żłobka trapezowego

Rzeczywisty kształt przekroju poprzecznego pręta trapezowego przybliżono kształtem wyidealizowanym - wycinkiem pierścienia, w którym górna i dolna powierzchnia pręta są częściami powierzchni cylindrycznych o promieniach R, r [1], [2] (rys. 1).

Przybliżenie to pozwoliło zastosować układ współrzędnych cylindrycznych, w którym Laplasjan równania (1) wynosi

$$\nabla^2 E_k(M) = \frac{\partial^2 E_k(M)}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial E_k(M)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 E_k(M)}{\partial \varphi^2} \tag{2}$$

Po wykorzystaniu założenia o nieskończenie dużej przenikalności magnetycznej ferromagnetyka $\mu_{Fe} = \infty$ dla równania (1) obowiązuje warunek brzegowy typu Neumanna:

$$\left.\frac{\partial E_k}{\partial n}\right|_{(M=S)} = \begin{cases} -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{i_{pk}}{b_s} & \text{- w szczerbinie żłobka} \\ 0 & \text{- na pozostałych częściach powierzchni bocznej pręta;} \end{cases} \tag{3}$$

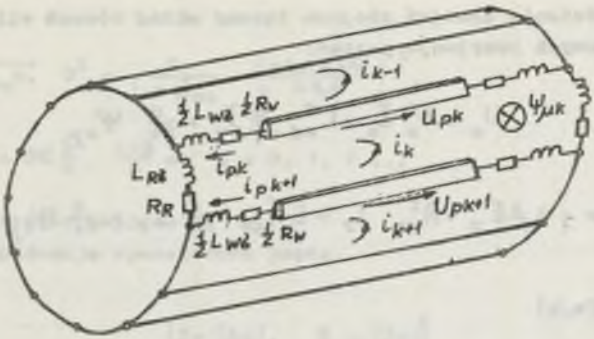
- S zbiór punktów na powierzchni bocznej pręta.

Założono ponadto zerowe warunki początkowe:

$$E_k(M, t = 0) = 0$$

Stan obwodów klatki wirnika o N prętach opisywany jest przez równania napięciowe, w których współrzędnymi są prądy fazowe $i_1, i_2, \ldots, i_N$, zaznaczone na rys. 2.

Części klatki wirnika wystające poza pakiet blach wirnika reprezentowane są przez stałe skupione; rezystancje R_R, R_W oraz indukcyjności rozproszeń $L_{R\sigma}$, $L_{W\sigma}$.



Rys. 2. Szkic klatki wirnika z wyodrębnieniem części żłobkowych prętów

Indukcyjność L_{wz} jest sumą indukcyjności rozproszenia części pręta znajdujących się poza pakietem blach oraz indukcyjności rozproszenia szczerbiny żłobkowej.

Część żłobkowa pręta reprezentowana jest przez zastępczy element, na którym spadek napięcia U_{pk} jest wyrażony przez iloczyn średniej wartości natężenia pola elektrycznego na powierzchni pręta w szczerbinie E_{pk} oraz długości idealnej pakietu blach l_i:

$$U_{pk} = - l_i \, E_{pk} \tag{4}$$

$$E_{pk} = \frac{1}{\varphi_2} \int_{-\frac{1}{2}\varphi_2}^{\frac{1}{2}\varphi_2} E(\varrho = r, \varphi) d\varphi \tag{5}$$

Założenie powyższe, na mocy twierdzenia Poyntinga, zapewnia równość mocy chwilowych wspomnianego wyżej elementu zastępczego i realnego pręta wirnika:

$$P_{pk} = - \oint_S (\vec{E}_k \times \vec{H}_k) dS = - l_i \, E_{pk} \, i_{pk} = U_{pk} \, i_{pk}, \tag{6}$$

gdzie:

$\vec{H}_k$ - natężenie pola magnetycznego k-tego pręta.

Umożliwia ono sformułowanie równań klatki wirnika tak, że nie zależą one od rozkładu przestrzennego natężenia pola elektrycznego wewnątrz pręta, lecz jedynie od jego funkcjonału określonego przez zależność (5).

Po uwzględnieniu uzwojeń stojana łączny układ równań silnika we współrzędnych fazowych przyjmuje postać:

$$U_s = R_s^f I_s + L_{s\sigma}^f \frac{d}{dt} I_s + \frac{d}{dt} \Psi_{s\mu} \tag{7a}$$

$$0 = -i_r A E_p + R_{ro}^f I_r + L_{r\sigma o}^f \frac{d}{dt} I_r + \frac{d}{dt} \Psi_{r\mu} \tag{7b}$$

W równaniu (7a,b)

$$U_s = [U_A, U_B, U_C]^T, \quad I_s = [i_A, i_B, i_C]^T, \quad \Psi_{s\mu} = [\varphi_{A\mu}, \varphi_{B\mu}, \varphi_{C\mu}]^T,$$

są wektorami napięć i prądów strumieni skojarzonych uzwojeń stojana

$$E_p = [E_{p1}, E_{p2}, \ldots, E_{pN}]^T, \quad I_r = [i_1, i_2, \ldots, i_N]^T, \quad \Psi_{r\mu} = [\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\mu}, \ldots, \varphi_{N\mu}]^T$$

Macierze $R_s^f, R_{ro}^f, L_{s\sigma}^f, L_{r\sigma o}^f$ są cyklicznymi macierzami rezystancji i indukcyjności rozproszeń stojana oraz wyodrębnionych uprzednio elementów klatki o stałych skupionych:

$$R_s^f = \text{cykl}\left\{R_s, \ 0, \ 0\right\}, \quad L_{s\sigma}^f = \text{cykl}\left\{L_{s\sigma}, M_{s\sigma}, M_{s\sigma}\right\},$$

$$R_{ro}^f = \text{cykl}\left\{2(R_R + R_W), -R_W, 0, \ldots 0, -R_W\right\},$$

$$L_{r\sigma o}^f = \text{cykl}\left\{2\,(L_{W\sigma} + L_{R\sigma}), -L_{W\sigma}, 0, \ldots 0, -L_{W\sigma}\right\},$$

$$A = \text{cykl}\left\{1, \ -1, \ 0, \ \ldots \ 0\right\}.$$

W wyniku rozwiązania równania (1) z warunkami brzegowymi (3) natężenie średnie pola elektrycznego na powierzchni pręta w szczerbinie żłobka wirnika wyrażono przez prądy fazowe:

$$E_{pk}(t) = -\int_0^t G_p(t-\tau)\left[\frac{d}{d\tau}\left[i_k(\tau) - i_{k-1}(\tau)\right]\right] d\tau, \tag{8}$$

Postać funkcji przejścia $G_p(t)$ [1][2][6] jest jednakowa dla wszystkich prętów wirnika i zależy wyłącznie od kształtów żłobka:

$$G_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_p(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Z_p(p)}{p}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha_p}{\delta p}\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \frac{\Delta\vartheta_n(p)}{\Delta_0\vartheta_n(p)}\right\} \tag{9}$$

gdzie:

$$\alpha_p = \sqrt{\gamma \mu_o p}, \quad D_n^2 = \frac{2}{1 + \delta_{no}} \left[\frac{\sin(k\lambda\pi)}{k\lambda\pi}\right]^2,$$

$$\vartheta_n = \frac{2\pi}{\varphi_1} n = 2\pi \frac{b}{h} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} n; \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

p - operator Laplace'a

$Z_p(p)$ - impedancja operatorowa pręta.

$$\Delta\vartheta_n(p) = \begin{vmatrix} I\vartheta_n(\beta z), & K\vartheta_n(\beta z) \\ I'\vartheta_n(z), & K'\vartheta_n(z) \end{vmatrix}$$

$$\Delta 0\vartheta_n = \begin{vmatrix} I\vartheta_n(\beta z), & K\vartheta_n(\beta z) \\ I'\vartheta_n(z), & K'\vartheta_n(z) \end{vmatrix}$$

$I\vartheta_n$, $K\vartheta_n$, $I'\vartheta_n$, $K'\vartheta_n$ - zmodyfikowane funkcje Bessela oraz ich pochodne

$\beta = \frac{r}{R}$, $z = \gamma \mu_{cp} \frac{h}{1-\beta}$.

Wektory strumieni skojarzonych $\Psi_{s\mu}$, $\Psi_{r\mu}$ wyznaczono w wyniku analizy pola magnetycznego szczeliny powietrznej, przy czym założono, że układ prądowy uzwojeń został wytworzony przez uzwojenie zbudowane z nieskończenie cienkich nitek prądowych rozmieszczonych na cylindrycznych, pozbawionych żłobkowania powierzchniach stojana i wirnika [6]:

$$\Psi_{s\mu} = L^f_{s\mu} I_{s\mu} + \sum_{\vartheta = \pm 1,2}^{\pm\infty} M_{\mu\vartheta} Y^*_{s\vartheta} Y^T_{r\vartheta} I_r, \tag{10a}$$

$$\Psi_{r\mu} = L^f_{r\mu} I_{r\mu} + \sum_{\vartheta = \pm 1,2}^{\pm\infty} M^*_{\mu\vartheta} Y^*_{r\vartheta} Y^T_{s\vartheta} I_s. \tag{10b}$$

Macierze:

$$L^f_{s\mu} = \text{cykl} \left\{L_{s\mu}, M_{s\mu}, M_{s\mu}\right\},$$

$$L^f_{r\mu} = \text{cykl} \left\{L_{r\mu}, M_{r\mu}, M_{r\mu}\right\}$$

zawierają współczynniki indukcyjności uzwojeń stojana i wirnika związane z polem magnetycznym szczeliny powietrznej.

Współczynniki indukcyjności wzajemnej zależą od kąta φ_m wzajemnego położenia stojana i wirnika.

$$\underline{M}_{\mu\vartheta} = 2\sqrt{3}\,\Lambda_\vartheta \xi_{s\vartheta} \cdot \xi_{r\vartheta} z_s e^{j\vartheta\varphi_m p_b}$$

gdzie:

$\xi_{s\vartheta}$, $\xi_{r\vartheta}$ – współczynniki uzwojeń stojana i wirnika,

z_s, p_b – liczba zwojów i liczba par biegunów uzwojenia stojana,

$\Lambda = \frac{\mu_0 D l_i}{2\pi\delta'(\vartheta p_b)^2}$ – D, δ' – średnica wirnika i grubość zastępczej szczeliny powietrznej maszyny,

ϑ – rząd harmonicznej rozkładu przestrzennego pola magnetycznego w szczelinie.

Wektory unormowane:

$$\underline{Y}_{s\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1,\ \underline{a}_s^{\vartheta},\ \underline{a}_s^{2\vartheta}\right]^T, \quad \underline{Y}_{r\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{z_o}}\left[\underline{Y}_{Ir\vartheta}^T,\ \underline{Y}_{Ir\vartheta}^T \dots \underline{Y}_{Ir\vartheta}^T\right],$$

$$\underline{Y}_{Ir\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{N_2}}\left[1,\ \underline{a}_r,\ \underline{a}_r^2,\ \dots\ \underline{a}_r^{(N_2-1)\vartheta}\right]$$

charakteryzują rozłożenie uzwojeń stojana i klatki wirnika.

$\underline{a}_s = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $\underline{a}_r = e^{j\frac{2\pi}{N}}$, z_o – największy wspólny podzielnik liczb N oraz p_b, $N_2 = \frac{N}{z_o}$.

Po wyrażeniu wektorów E_p, $\varphi_{r\mu}$, $\varphi_{s\mu}$ przez prądy fazowe według zależności (8), (10a,b) równania silnika (7a,b) przyjmują postać umożliwiającą zastosowania transformacji układów współrzędnych podobnie jak w przypadku zwykłego silnika klatkowego.

W wyniku transformacji równań wirnika za pomocą macierzy unitarnej [3]:

$$C = \frac{1}{\sqrt{z_o}}\begin{bmatrix} J_I, & J_I, \dots & J_I \\ J_I, & J_I\,\underline{\gamma}_r, \dots & J_I\,\underline{\gamma}_r^{(z_o-1)} \\ \vdots & & \\ J_I \dots & J_I\,\underline{\gamma}_r^{(z_o-1)} \dots & J_I\,\underline{\gamma}_r^{(z_o-1)^2} \end{bmatrix}, \quad \underline{\gamma}_r = e^{j\frac{2\pi}{z_o}} \tag{11}$$

gdzie:

J_I – macierz jednostkowa o wymiarach $(N_2 \times N_2)$,

dokonano eliminacji $N - N_2$ składowych zerowych:

$$C\underline{I}_r = \begin{bmatrix} \underline{I}_{rI} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierz $\underline{I}_{rI}$ jest wektorem prądów fazowych wirnika zastępczej maszyny o liczbie prętów wirnika $N_2 = \frac{N}{n_o}$.

Równania zastępczej maszyny poddano transformacjom za pomocą macierzy unitarnych $\underline{W}_s$, $\underline{W}_r$ do układu współrzędnych kompleksorowych $\underline{I}_s$, $\underline{I}_r$:

$$\underline{I}_s = \underline{W}_s \underline{I}_s, \quad \underline{I}_r = \underline{W}_r \underline{I}_{rI} \tag{13}$$

$$\underline{W}_s = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{s1}^T \\ \underline{Y}_{s2}^T \\ \underline{Y}_{s3}^T \end{bmatrix} \qquad \underline{W}_r = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{Ir1}^T \\ \underline{Y}_{Ir2}^T \\ \vdots \\ Y_{IrN_2}^T \end{bmatrix}$$

Otrzymany układ równań różniczkowo-całkowych silnika:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + \frac{d}{dt}\left(L_s \underline{I}_s + \underline{M}_{sr} \underline{I}_r\right) \tag{14a}$$

$$0 = 1_i B_r \int_0^t G_p(t-\tau)\left[\frac{d}{d\tau}\underline{I}_r(\tau)\right] d\tau + R_{ro}\underline{I}_r + \frac{d}{dt}\left[L_{ro}\underline{I}_r + \underline{M}_{sr}^T \underline{I}_s\right] \tag{14b}$$

posiada budowę znacznie prostszą od wyjściowego układu równań we współrzędnych fazowych:

$$R_s = \mathrm{diag}\left\{R_s, R_s, R_s\right\}, \quad L_s = \mathrm{diag}\left\{L_s, L_s, L_{so}\right\},$$

$$L_s = L_{s\sigma} - M_{s\sigma} + \sum_{\vartheta=1,2}^{\infty} 4\Lambda_\vartheta z_s^2 \xi_{s\vartheta}^2 \left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\vartheta\right),$$

$$L_{so} = L_{s\sigma} + 2M_{s\sigma} + \sum_{\vartheta=1,2}^{\infty} 4\Lambda_\vartheta z_s^2 \xi_{s\vartheta}^2 \left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{3}\vartheta\right),$$

$$B_r = \mathrm{diag}\left\{b_{r1}, b_{r2}, \ldots b_{rN_2}\right\}, \quad R_{ro} = \mathrm{diag}\left\{R_{ro1}, R_{ro2}, \ldots R_{roN_2}\right\},$$

$$L_{ro} = \mathrm{diag}\left\{L_{ro1}, L_{ro2}, \ldots L_{roN_2}\right\},$$

$$b_{rk} = 4\,\xi_{rk}^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi N}{p_b}\,k\right),$$

$$R_{rok} = 2R_r + b_{Rk}\,R_W,$$

$$L_{rok} = \frac{\pi\mu_o\,D\,li}{\delta'\,N} + 2L_{R\sigma} + b_{rk}\,L_{W\sigma} \qquad \text{dla} \quad k < N_2,$$

$$L_{rok} = 2\,L_{R\sigma} \qquad \text{dla} \quad k = N_2.$$

Macierz $\underline{M}_{sr}$ zawiera zespolone elementy $\underline{m}_{ij}$ będące okresowymi funkcjami kąta chwilowego położenia wirnika względem stojana:

$$\underline{m}_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{=\pm 1,2}^{\infty} \underline{M} & \text{gdy } i, j \text{ spełniają związki } \begin{array}{l} i - \vartheta = 3k_1 \\ \vartheta - j = N_2 k_2 \end{array} \\ 0 & \text{- dla pozostałych } i, j \\ k_1, k_2 & \text{- liczby całkowite.} \end{cases}$$

2. Przybliżenie modelu matematycznego silnika za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych

W obliczeniach elektrodynamicznych stanów nieustalonych dogodnie jest posłużyć się przybliżonym modelem matematycznym, w którym obliczanie całek splotowych równań (14b) zastąpiono przez rozwiązywanie dodatkowego układu równań różniczkowych zwyczajnych. W tym celu dokonano rozkładu funkcji przejścia $G_p(t)$ w szereg funkcji własnych $G_p^{(j)}(t)$, $(j = 1,2,\ldots)$.

Przy uwzględnieniu jedynie m pierwszych wyrazów rozwinięcia - dominujących składników modalnych:

$$G_p(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_p^{(j)}(t) \cong a_o + \sum_{j=1}^{m} a_j\, e^{-\lambda_{Nj} t} \tag{15}$$

napięcie pręta

$$U_{pk} = li\left[a_o\, i_{pk} + \sum_{j=1}^{m} a_j\, i^{(j)}\right] \tag{16}$$

Funkcje $i^{(j)}$ są rozwiązaniami dodatkowego układu równań różniczkowych zwyczajnych:

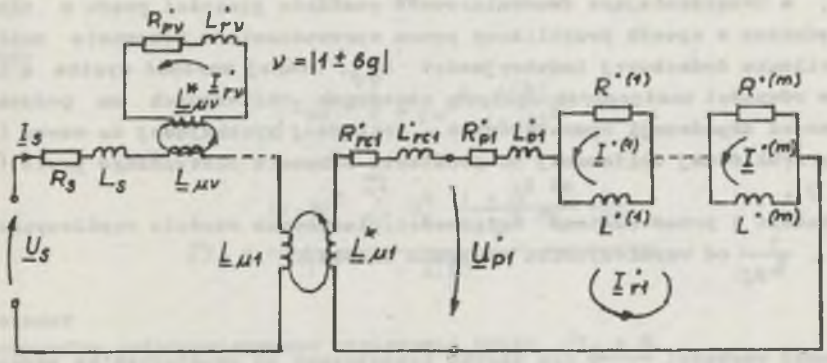
$$\frac{d}{dt} i^{(j)} + \lambda_{Nj} i^{(j)} = \frac{d}{dt} i_p, \quad j = 1,2,\ldots m \tag{17}$$

i mają interpretację prądów przepływających przez elementarne fikcyjne obwody tłumiące, reprezentujące oddziaływanie prądów wirowych w częściach czynnych prętów wirnika.

Biorąc pod uwagę stransformowane równania tych obwodów, przy ograniczeniu rzędu najwyższej z uwzględnionych harmonicznych przestrzennych ($\vartheta_{max} = F < \frac{N_2}{2} - 1$, dla N_2 parzystego lub $F < \frac{N_2-1}{2}$, dla N_2 nieparzystego) otrzymano przybliżony układ równań różniczkowych zwyczajnych silnika:

$$\underline{U}_{MF} = R_{MF}\, \underline{I}_{MF} + \frac{d}{dt}\left(\underline{L}_{MF}\, \underline{I}_{MF}\right) \tag{18}$$

oraz odpowiadający mu schemat zastępczy przedstawiony na rys. 3.



$$R'_{r\nu} = R'_{rc\nu} + R'_{p\nu}$$

dla $\nu > 1$

$$L'_{r\nu} = L'_{rc\nu} + L'_{o\nu}$$

Rys. 3. Przybliżony schemat zastępczy silnika klatkowego przy uwzględnieniu m dominujących składników modalnych funkcji G_p

Postaci macierzy układu (18) wynikają ze struktury schematu. Prądy obwodów wirnika zostały sprowadzone na stronę uzwojenia stojana, przy czym współczynniki sprowadzenia wynoszą:

$$\zeta_{r\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{N}}\, z_s \frac{\xi_{s\vartheta}}{\xi_{p\vartheta}} \quad \vartheta = 1 \pm 6g, \quad g = 0,1,2,\ldots \tag{19}$$

Dla podstawowej harmonicznej przestrzennej liczba obwodów zastępczych wynosi $m + 1$, dla wyższych harmonicznych uwzględniono tylko po jednym obwodzie zastępczym.

Wartości własne dominujących składników modelowych λ_{Mj}, $j = 1,2,\ldots,m$ zostały obliczone w wyniku numerycznego wyznaczenia pierwiastków p_j równania charakterystycznego:

$$\Delta_{o\vartheta n}(p)_{[\vartheta_n=0]} = I_1(\beta z)\, K_1(z) - I_1(z)\, K_1(\beta z) = 0 \qquad (20)$$

$$z = \sqrt{\gamma \mu_{op}}\, \frac{h}{1-\beta}$$

przy czym: $\lambda_{Mj} = -p_j$.

Wartości te są identyczne z wartościami własnymi dla żłobka otwartego ($b_S = b$), w którym wypieranie prądu jest jednowymiarowe. Takie przyjęcie dominujących wartości własnych jest uzasadnione tym, że dla normalnych proporcji żłobków silników klatkowych wysokość żłobka jest co najmniej kilkakrotnie większa od jego szerokości, a wypieranie prądu w kierunku poprzecznym do wysokości odgrywa mniejszą rolę.

Dalsze wartości własne wynikające z odrzucenia wyrazów szeregu (15) dla $j > m$, a uwzględniające dwuwymiarowość rozkładu gęstości prądu w żłobku uwzględnione w sposób przybliżony przez wprowadzenie w schemacie zastępczym silnika dodatkowej indukcyjności $L^{*}_{o\vartheta}$, której wartość wynika z kryterium równości zastępczych stałych czasowych obliczonych na podstawie znajomości impedancji operatorowych - dokładnej (wynikającej ze wzoru (9)) oraz przybliżonej obliczonej na podstawie schematu zastępczego pręta (rysunek 3).

W tabeli 1 przedstawiono zależności pierwszych sześciu współczynników $\frac{1}{\gamma \mu_o h^2}$. $\frac{1}{\lambda_{Mj}}$ od współczynnika zwężenia żłobka β.

Tabela 1

Zależność wartości $\frac{1}{\gamma \mu_o h^2}$ dla żłobka trapezowego od współczynnika zwężenia

β \ j	1	2	3	4	5	6
1,0	0,101321	0,025330	0,011258	0,006333	0,004053	0,002814
0,9	0,101236	0,025325	0,011257	0,006332	0,004053	0,002814
0,8	0,100940	0,025306	0,011253	0,006331	0,004052	0,002814
0,7	0,100359	0,025269	0,011246	0,006329	0,004051	0,002814
0,6	0,099386	0,025204	0,011233	0,006325	0,004050	0,002813
0,5	0,097865	0,025097	0,011211	0,006318	0,004047	0,002812
0,4	0,095572	0,024920	0,011175	0,006306	0,004042	0,002810
0,3	0,092160	0,024622	0,011110	0,006285	0,004033	0,002804
0,2	0,087089	0,024080	0,010985	0,006242	0,004015	0,002796
0,1	0,079491	0,022974	0,010686	0,006132	0,003966	0,002771

Zastępcza stała czasowa żłobka [4] przy uwzględnieniu dwuwymiarowego wypierania prądu:

$$T_Z = \lim_{p \to 0} \frac{\frac{d}{dp} Z_p(p)}{Z_p(p)} \tag{21}$$

została obliczona [6] przy wykorzystaniu podanego przez W. Bucholtza [8] całkowego przedstawienia wyznacznika funkcji Bessela rzędu ϑ_n:

$$D_{\vartheta n} = \begin{vmatrix} I_{\vartheta n}(\beta z), & K_{\vartheta n}(\beta z) \\ I_{\vartheta n}(z), & K_{\vartheta n}(z) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \int_{\ln \beta}^{-\ln \beta} e^{\vartheta n \phi} I_o\left(z \frac{1-\beta}{h^2} k_\phi\right) d\phi \tag{22}$$

$$k_\phi = R^2(1 + \beta^2 - 2\beta \cos h\phi)$$

dzięki czemu obliczanie granic $\lim_{p \to 0} Z_p(p)$ oraz $\lim_{p \to 0} \frac{d}{dp} Z_p(p)$ sprowadza się do obliczania granic funkcji Bessela rzędu całkowitego:

$$T_Z = T_{ZO} \left(1 + \delta T_Z\right) \tag{23}$$

gdzie:

$$T_{ZO} = \frac{1}{2} \gamma \delta \mu_o h^2 \frac{A(\beta)}{(1-\beta)^2}$$

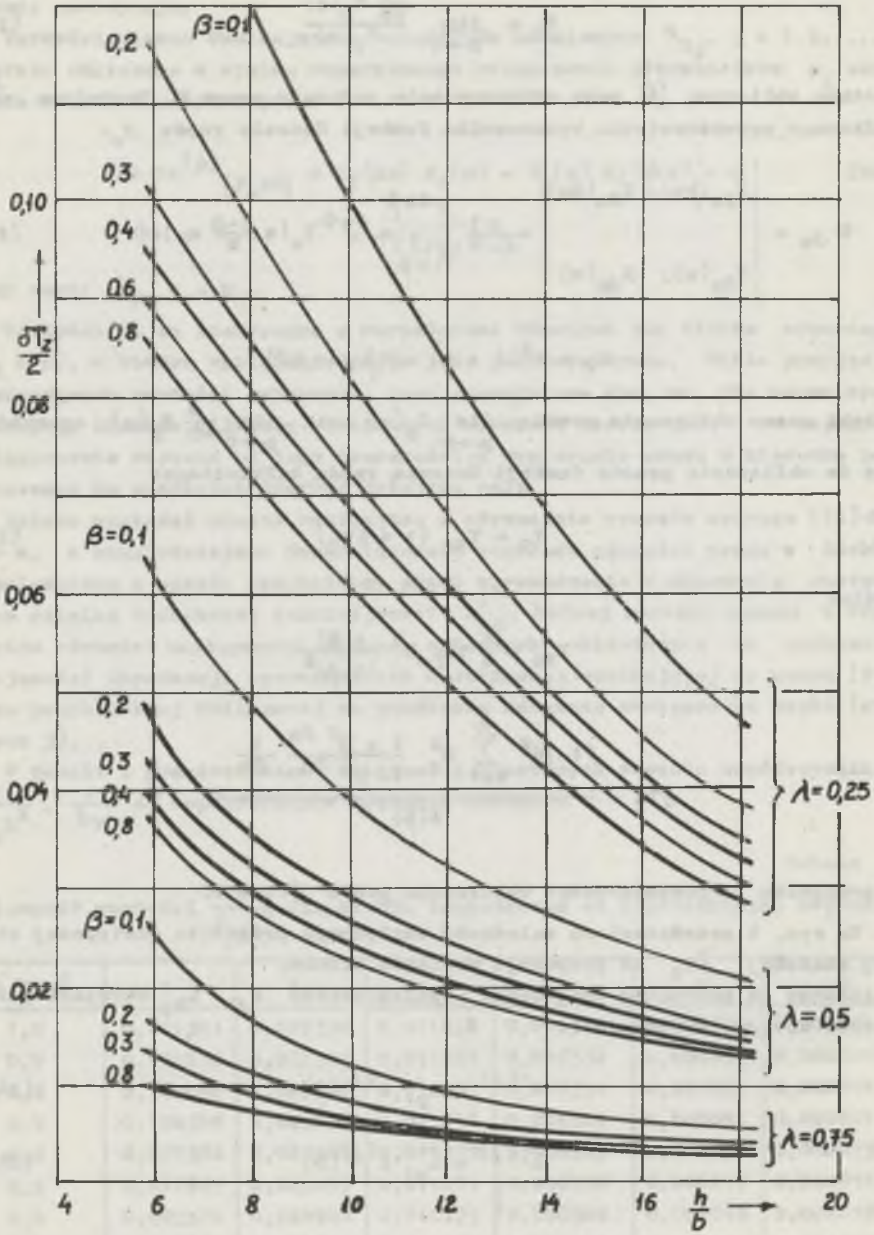
$$\delta T_Z = \frac{(1-\beta)^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_n^2 \frac{1 + \beta^2 \vartheta n}{1 - \beta^2 \vartheta n} \frac{1}{\vartheta n}}{A(\beta)}$$

W przypadku jednowymiarowego wypierania prądu $\delta T_Z = 0$.

Na rys. 4 przedstawiono zależność względnego przyrostu zastępczej stałej czasowej δT_Z od proporcji wymiarów żłobka.
Obliczone na podstawie znajomości współczynników a_j, λ_{Mj} wartości parametrów obwodów skupionych:

$$R'^{(j)} = R'_{p1}\, r^{(j)}(\beta) \tag{24a}$$

$$L'^{(j)} = L'_{p1}\, l^{(j)}(\beta) \tag{24b}$$



Rys. 4. Zależność względnego przyrostu zastępczej stałej czasowej δT_z od proporcji wymiarów żłobka

gdzie:

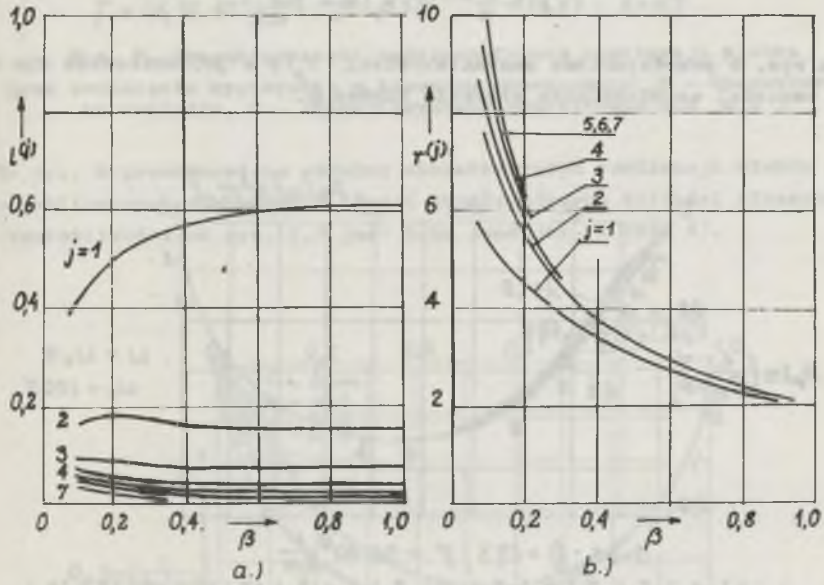
R'_{p1}, L'_{p1} - rezystancja oraz indukcyjność pręta w statycznym stanie ustalonym dla żłobka otwartego.

$$r^{(j)} = \frac{1-\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{A(\beta)} \cdot \frac{1}{x_j^2} \cdot \frac{2\, J_1^2(x_j)}{J_1^2(\beta x_j) - J_1^2(x_j)} \tag{25a}$$

$$l^{(j)} = r^{(j)}\, A(\beta) x_j^2 \tag{25b}$$

$$x_j = \gamma \mu_o h^2 \lambda_{Wj} \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

Wartość współczynników $r^{(j)}$, $l^{(j)}$ w zależności od współczynnika zwężenia żłobka przedstawiono na rys. 5a,b.



Rys. 5a,b. Zależność parametrów $r^{(j)}$, $l^{(j)}$ od współczynnika zwężenia żłobka

Indukcyjność dodatkowa:

$$L'_{o1} = L'_{p1} \left[(1 + \delta T_Z) - \sum_{k=1}^{m} l^{(j)} \right] \tag{26}$$

W wyniku sprowadzenia kompleksorów przybliżonego układu równań różniczkowych zwyczajnych (18) na wspólną płaszczyznę odniesienia wirującą z prędkością kątową ω_x otrzymuje się ostatecznie układ równań silnika o stałych współczynnikach:

$$U_{MF} = R_{MF} I_{MF} + (j K_{MF} + \frac{d}{dt} L_{MF}) I_{MF} \tag{27}$$

gdzie:

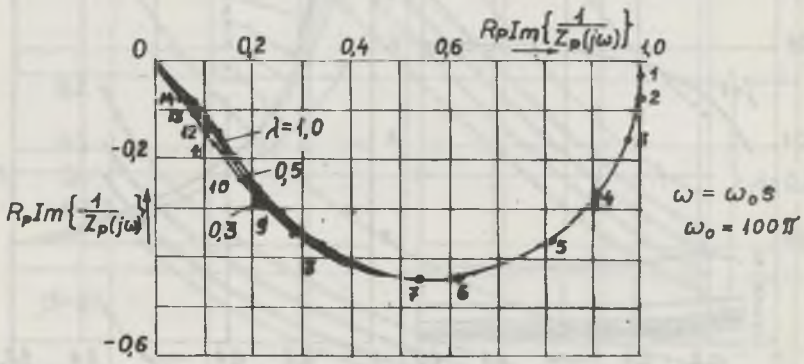
$$K_{MF} = \mathrm{diag}\left\{(\omega_x - \omega),\ (\omega_x - \omega), \ldots (\omega_x - \omega),\ (\omega_x + 5\omega),\ (\omega_x - 7\omega)\right\}$$

elementy macierzy L_{MF} zawierają moduły zespolonych współczynników indukcyjności L_{MF}.

Dla oceny wpływu dwuwymiarowego wypierania prądu na parametry obwodów wirnika dokonano porównania charakterystyk modułowo-fazowych admitancji żłobka:

$$Y_p(p = j\omega) = \frac{1}{Z_p(p = j\omega)} \tag{28}$$

Na rys. 6 przedstawiono charakterystyki $Y_p(p = j\omega)$ obliczone dla różnych wartości współczynnika otwarcia żłobka λ.



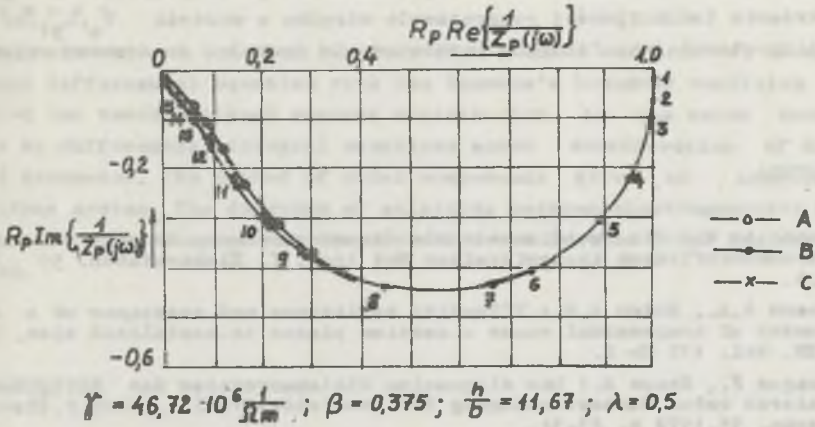
$\beta = 0,6$; $\frac{h}{b} = 13,3$; $\gamma = 56 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
s	0,001	0,005	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,10	0,16	0,2	0,6	0,6	0,8	1,0

Rys. 6. Charakterystyki modułowo-fazowe admitancji żłobka dla różnych wartości współczynnika otwarcia λ

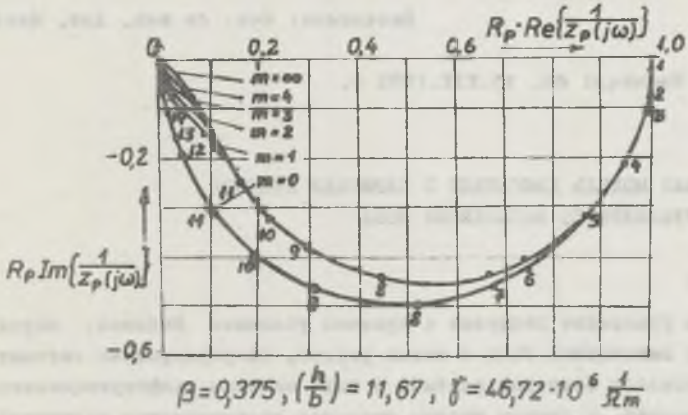
Rys. 7 przedstawia porównanie charakterystyk $Y_p(p = j\omega)$ obliczone na podstawie zależności dokładnych (9) oraz przybliżonych wynikających z uproszczonego schematu zastępczego żłobka, przy uwzględnieniu trzech war-

tości własnych m = 3. Krzywa oznaczona literą A jest charakterystyką przy jednowymiarowym wypieraniu prądu.



Rys. 7. Charakterystyki modułowo-fazowe admitancji żłobka
A - przy pominięciu wypierania w kierunku poprzecznym, B - charakterystyka dokładna, C - charakterystyka przybliżona dla m = 3

Na rys. 8 przedstawiono rodzinę charakterystyk admitancji żłobka otwartego, obliczonych dla różnych ilości uwzględnionych wartości własnych (skala częstotliwości na rys. 7,8 jest taka sama jak na rys. 6).



Rys. 8. Charakterystyki modułowo-fazowe żłobka otwartego przy uwzględnieniu różnej liczby wartości własnych m

Przedstawione wykresy współczynników $r^{(j)}(\beta)$, $l^{(j)}(\beta)$, $T_Z = f(\lambda,\beta,\frac{h}{b})$ pozwalają z wystarczającą dokładnością określić parametry obwodów skupionych przybliżonego modelu matematycznego silnika. Dwuwymiarowość rozkładu gęstości prądu w żłobku została uwzględniona w sposób przybliżony przez powiększenie indukcyjności rozproszenia wirnika o wartość $T_z \cdot L_{pi}$, co można interpretować jako fikcyjne pomniejszenie grubości szczerbiny żłobkowej.

LITERATURA

[1] Bucholtz W.: Die Zweidimensionale Stromverdrängung in einer wechelstromdurchflossen trapezformigen Nut Arch. f. Elektrotechn. 59 1965 H.5.

[2] Swann S.A., Noton A.R.: Effective resistance und reaktance of a conductor of trapezoidal cross - section placed in semiclosed slot. Proc. IEE. Vol. 117 Nr 2.

[3] Teagen F., Homes E.: Das allgemeine Gleichunysystem des Käfigläufermatores unter Berücksichtigung der Oberfelder Teil I, Arch.f.Elektrotechn. 55.1972 s. 21-31.

[4] Paszek W.: Stany nieustalone w maszynach elektrycznych. Cz. I. Maszyny asynchroniczne cz. I. Skrypt Pol. Śl. Gliwice 1981.

[5] Rogers G.J.: Induction motor terminal-voltage equations. Proc.IEE Vol. 123, Nr 3, 1976.

[6] Paweleo Z.: Badanie elektrodynamicznych stanów nieustalonych silników indukcyjnych o wirniku głębokożłobkowym z prętami trapezowymi. Praca doktorska. Pol. Śl. Gliwice 1982.

[7] Bucholtz H.: Elektrische und magnetische Potentialfelder. Wyd.ros.Moskwa 1961.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Marian Noga

Wpłynęło do Redakcji dn. 15.XII.1982 r.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИГАТЕЛЯ С БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКОЙ С УЧЕТОМ ДВУРАЗМЕРНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ТОКА

Р е з ю м е

Используя уравнение диффузии с краевым условием Неймана, определяющие двуразмерные вытеснение тока в пазах ротора, сформулировано математическую модель двигателя с беличьей клеткой в виде системы дифференциально-интегральных уравнений, с учетом высших гармоник распределения магнитной индукции в воздушном зазоре.

Методом модальных составляющих сформулировано апроксимирующую систему обыкновенных дифференцальных уравнений а также графические зависимости для определения их параметров.

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE INDUCTION MOTOR INCLUDING TWODIMENSIONAL CURRENT DISTRIBUTION IN WIDGE SCHAPED

S u m m a r y

The mathematical model of the induction machine was derived, using the partial differential equation with the Neumann's boundary condition discribing the twodimentional current distribution in the rotor bars. It leads to differential integral equations under consideration of higher field harmonics. The method of modal components gives an approximate equations system. The diagrams of relations between electromagnetic parameters and dimensions of the trapezoidal cross section rotor bar are presented.