

Jerzy KUDŁA, Zbigniew T. RYCZKO

Institut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych  
Politechniki Śląskiej

## DRGANIA SKRĘTNE W UKŁADZIE PRZENOSZENIA MOMENTU OBROTOWEGO SILNIKÓW INDUKCYJNYCH DUŻEJ MOCY

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono model matematyczny opisujący drgania skrętne układu przenoszenia momentu obrotowego w silnikach indukcyjnych dużej mocy. Rozpatrzono drgania wymuszone tego układu dla różnych wersji modelu matematycznego. Obliczenia przeprowadzono dla silnika indukcyjnego o mocy 400 kW.

### 1. Wprowadzenie

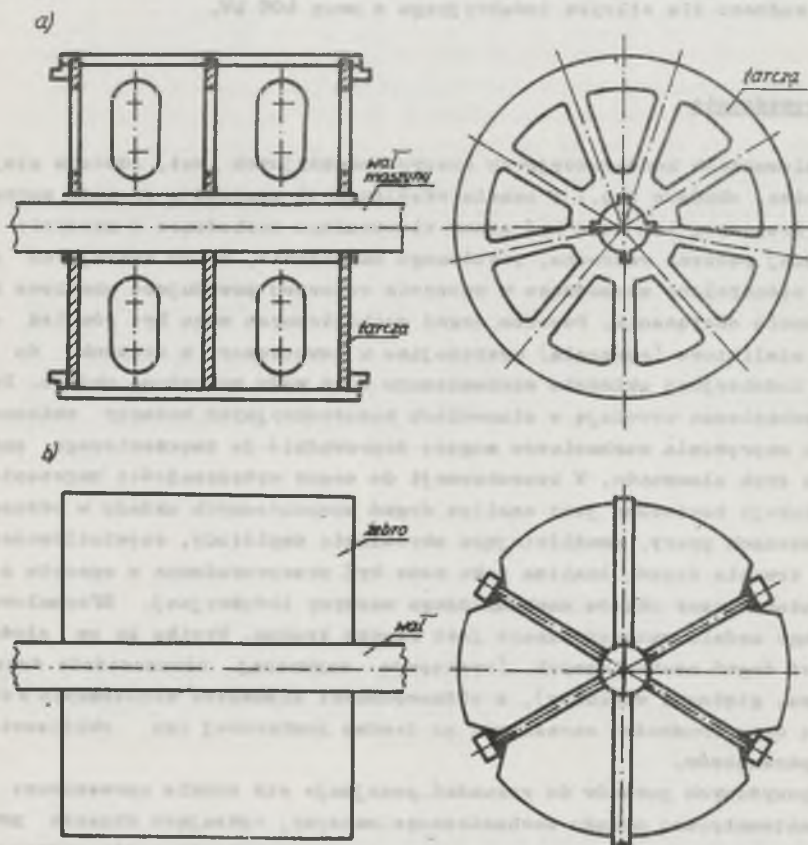
W elementach konstrukcyjnych maszyn indukcyjnych (wał, rdzenie stojana i wirnika, obudowa itp.) w czasie eksploatacji występują drgania mechaniczne. Przyczyną ich mogą być stany nieustalone zachodzące w maszynie indukcyjnej podczas rozruchu, powtórnego załączenia, zwarć awaryjnych oraz stany nieustalone zachodzące w maszynie roboczej powodujące chwilowe zmiany momentu obciążenia. Powodem drgań mechanicznych mogą być również elementy nieliniowe (sprzęgła) występujące w zewnętrznym w stosunku do maszyny indukcyjnej układzie mechanicznym oraz wady montażowe układu. Drgania mechaniczne wywołują w elementach konstrukcyjnych maszyny zmienne w czasie naprężenia mechaniczne mogące doprowadzić do zmęczeniowego zniszczenia tych elementów. W konsekwencji do oceny wytrzymałości zmęczeniowej konstrukcji konieczna jest analiza drgań mechanicznych układu w różnorodnych stanach pracy, umożliwiającą określenie amplitudy, częstotliwości i czasu trwania drgań. Analiza taka może być przeprowadzona w oparciu o model matematyczny układu mechanicznego maszyny indukcyjnej. Sformułowanie ogólnego modelu matematycznego jest rzeczą trudną. Wynika to ze złożonej postaci drgań mechanicznych (występują zazwyczaj równocześnie drgania skrętne, giętne i wzdłużne), z różnorodności elementów wchodzących w skład układu oraz trudności określenia na drodze pomiarowej lub obliczeniowej jego parametrów.

Z powyższych powodów do rozważań przyjmuje się zwykle uproszczone modele matematyczne układu mechanicznego maszyny, opisujące drgania proste wybranych fragmentów maszyny, przy uproszczonym potraktowaniu wpływu na te drgania pozostałych elementów.

W artykule rozpatrzono model matematyczny opisujący drgania skrętne układu mechanicznego maszyny uczestniczącego w przenoszeniu momentu obrotowego do maszyny roboczej.

## 2. Opis analizowanego układu

W skład układu mechanicznego maszyny uczestniczącego w przekazywaniu momentu obrotowego z wirnika maszyny do maszyny roboczej wchodzi: rdzeń ferromagnetyczny wirnika wraz z uzwojeniem, wał maszyny, element pośredniczący między rdzeniem wirnika a wałem oraz sprzęgło łączące maszynę indukcyjną z maszyną roboczą.



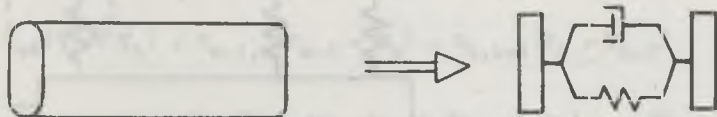
Rys. 1a,b. Podstawowe rozwiązania konstrukcyjne elementu pośredniczącego między wałem a wirnikiem

a - wał z tarczami, b - wał z żebrami

Wał maszyny wykonywany jest zwykle jako element o stopniowanych średnicach. W maszynach indukcyjnych o dużych mocach znamionowych, ze względu na mniejszą średnicę wału od średnicy wewnętrznej rdzenia, między wałem a rdzeniem wirnika istnieje element pośredniczący. Spotykane są dwa podstawowe rozwiązania tego elementu. Dla maszyn o średnicach zewnętrznych wirnika mniejszych od 1 metra elementem pośredniczącym są żebra umieszczone wzdłuż osi wału i przyspawane do wału lub płyty nasadzonej na wał (rys. 1a). Przy większych średnicach elementem pośredniczącym są taroze umieszczone prostopadłe do osi wału wzmocnione podłużnymi żebrami (rys. 1b). Wał maszyny połączony jest z zewnętrznym zazwyczaj różnorodnym układem mechanicznym za pośrednictwem sprzęgieł mechanicznych (sztywnych, podatnych, odśrodkowych).

### 3. Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do budowy modelu matematycznego układu mechanicznego

Przy formułowaniu modelu matematycznego układu mechanicznego maszyny zastosowano metodę sztywnych elementów skończonych [3]. Według tej metody w rozpatrywanym układzie mechanicznym wyodrębnia się, o ile to możliwe, elementy o zwartej sztywnej konstrukcji, w których można pominąć odkształcenia oraz elementy o małej sztywności podlegające odkształceniom. Pierwsze z nich nazywa się sztywnymi elementami skończonymi, drugie elementami sprężysto-tłumiącymi. W przypadku gdy taki naturalny podział konstrukcji jest niemożliwy ze względu na występowanie elementów odkształcalnych o ciągłym rozkładzie masy, podziału dokonuje się w sposób myślowy. W wyniku podziału otrzymuje się elementarne fragmenty konstrukcji, których własności odkształcalne zastępuje się elementami sprężysto-tłumiącymi, a ich masy zastępuje się sztywnymi elementami skończonymi umieszczonymi po obu stronach elementów sprężysto-tłumiących (rys. 2).



Rys. 2. Zastąpienie układu o ciągłym rozkładzie masy elementem sprężysto-tłumiącym i elementami sztywnymi

W konsekwencji otrzymuje się dyskretny układ mechaniczny składający się z połączonych ze sobą sztywnych elementów skończonych i elementów sprężysto-tłumiących. Sztywne elementy skończone scharakteryzowane są przez masę i masowe momenty bezwładności, zaś elementy sprężysto-tłumiące przez

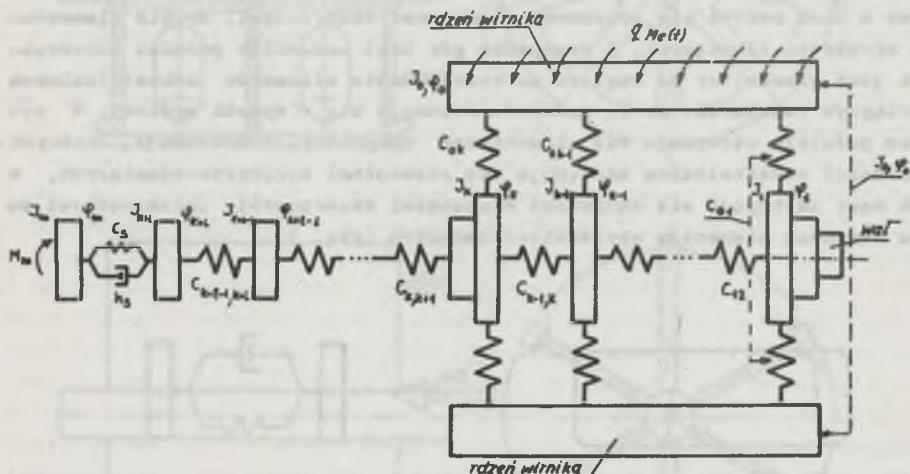


współczynniki sztywności i tłumienia. Rozpatrując drgania skrętne układu mechanicznego przedstawionego w punkcie 2 (z zębami jako elementami pośredniczącymi) przyjęto, że:

- rdzeń ferromagnetyczny wirnika wraz z uzwojeniem jest ciałem doskonale sztywnym,
- zęba łączące wał z wirnikiem stanowią elementy sprężyste (pominięto masę zębów oraz ich własności tłumiące),
- wał wirnika jest ciałem odkształcalnym o ciągłym rozkładzie masy.

Wał wirnika podzielono na elementarne odcinki, część końcową wału (od strony sprzęgła) podzielono na 1 odcinków, część środkową wału pod zębami podzielono na  $k-1$  odcinków, pozostałą część wału zastąpiono sztywnym elementem skończonym. Każdemu elementarnemu odcinkowi wału przyporządkowano element sprężysty (własności tłumiące pominięto) oraz leżące obok niego elementy sztywne.

Zewnętrzny układ mechaniczny zastąpiono sztywnym elementem skończonym (własności sprężysto-tłumiące tego układu można w sposób uproszczony uwzględnić w charakterystyce sprzęgła). W wyniku otrzymano dyskretny model mechaniczny przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Model dyskretny układu mechanicznego przenoszącego moment obrotowy z silnika indukcyjnego do maszyny roboczej

4. Równania ruchu układu mechanicznego

Równania ruchu układu mechanicznego wyprowadzono z równań Lagrange'a II rodzaju (1):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial D}{\partial \varphi_i} = M_i \quad i = 0, 1 \dots k+1, m \quad (1)$$

gdzie:

- T - energia kinetyczna układu,
- V - energia potencjalna układu,
- D - funkcja dysypacji,
- $M_i$  - zewnętrzny moment skręcający działający na i-ty sztywny element skończony,
- $\varphi_i$  - kąt obrotu i-tego sztywnego elementu skończonego,
- $\dot{\varphi}_i$  - pochodna kąta obrotu  $\varphi_i$  względem czasu.

Dla układu mechanicznego przedstawionego na rys. 3 otrzymuje się:

$$T = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=0}^{k+1} J_i \dot{\varphi}_i^2 \right] + J_m \dot{\varphi}_m^2, \quad D = \frac{1}{2} h_s (\dot{\varphi}_{k+1} - \dot{\varphi}_m)^2 \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^k c_{0i} (\varphi_0 - \varphi_i)^2 + \sum_{i=1}^{k+1} c_{i-1,i} (\varphi_{i-1} - \varphi_i)^2 + c_s (\varphi_{k+1} - \varphi_m)^2 \right\}.$$

Wstawiając wyrażenia (2) do układu równań (1) otrzymuje się równania ruchu układu mechanicznego stanowiące model matematyczny układu:

$$J_0 \ddot{\varphi}_0 = M_{em} - c_{01} (\varphi_0 - \varphi_1) + \dots - c_{0k} (\varphi_0 - \varphi_k)$$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = c_{01} (\varphi_0 - \varphi_1) - c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

⋮

$$J_k \ddot{\varphi}_k = c_{0k} (\varphi_0 - \varphi_k) + c_{k-1,k} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) - c_{k,k+1} (\varphi_k - \varphi_{k+1})$$

⋮

$$J_{k+1} \ddot{\varphi}_{k+1} = c_{k+1-1,k+1} (\varphi_{k+1-1} - \varphi_{k+1}) - c_s (\varphi_{k+1} - \varphi_m) - h_s (\dot{\varphi}_{k+1} - \dot{\varphi}_m)$$

$$J_m \ddot{\varphi}_m = -M_m + c_s (\varphi_{k+1} - \varphi_m) + h_s (\dot{\varphi}_{k+1} - \dot{\varphi}_m)$$

gdzie:

$M_{em}$  - moment elektromagnetyczny maszyny indukcyjnej,

$M_m$  - moment mechaniczny (obciążenia) układu,

- $C_{oi}, C_{i-1,1}$  - współczynniki sztywności skrętnej elementarnej części układu pośredniczącego i wału,  
 $C_i, h_e$  - współczynnik sztywności skrętnej i tłumienia sprzęgła,  
 $\dot{\varphi}$  - druga pochodna kąta obrotu względem czasu,  
 $J_o, J_m, J_i$  - masowe momenty bezwładności rdzenia wirnika, maszyny roboczej, elementarnego odcinka wału.

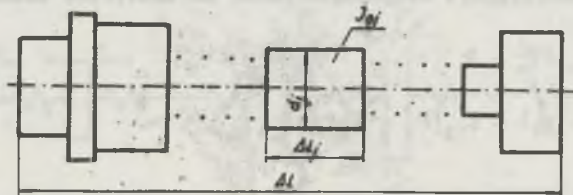
### 5. Obliczenie współczynników sztywności skrętnej układu mechanicznego

Współczynnik sztywności skrętnej odcinka wału maszyny przedstawionego na rys. 4 oblicza się według zależności:

$$\frac{1}{C_w} = \sum_j \frac{1}{C_j}, \quad C_j = \frac{G J_{oj}}{\Delta L_j}, \quad J_{oj} = \frac{\pi d_j^4}{32} \quad (4)$$

gdzie:

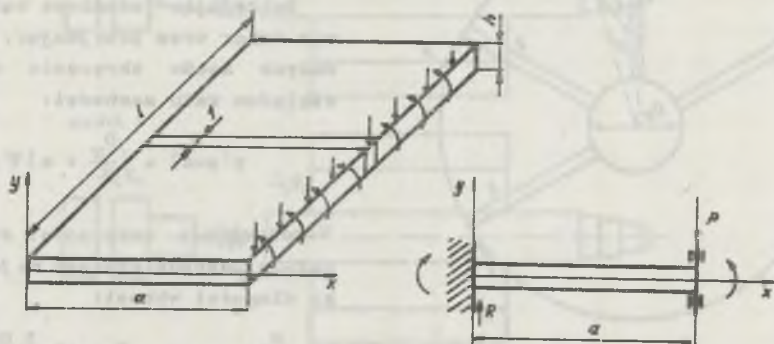
- $C_w$  - współczynnik sztywności skrętnej odcinka wału o długości  $\Delta L$ ,  
 $C_j$  - współczynnik sztywności skrętnej odcinka wału o długości  $\Delta L_j$ ,  
 $G$  - moduł sprężystości postaciowej,  
 $J_{oj}$  - biegunowy geometryczny moment bezwładności przekroju wału o długości  $\Delta L_j$ ,  
 $d_j$  - średnica odcinka wału o długości  $\Delta L_j$ .



Rys. 4. Elementarny odcinek wału o zmiennej średnicy

Przy obliczaniu współczynnika sztywności skrętnej układu pośredniczącego rozpatrzono pracę pojedynczego zębra. Zębro to stanowi płytę prostokątną przytwierdzoną w sposób sztywny do wału oraz w sposób sztywno-przesuwny do rdzenia wirnika. Podczas przemieszczenia się rdzenia wirnika względem wału zębro jest zginane. Dokładne rozpatrzenie drgań giętych zębora jest trudne do przeprowadzenia ze względu na konieczność stosowania do ich opisu równań różniczkowych cząstkowych. Uprościć zagadnienie można poprzez przyjęcie tzw. zginania walcowego płyty [2] i pominięcie masy pły-

ty. Pozwala to zastąpić płytę elementem sprężystym równomiernie rozłożonym wzdłuż środkowej części wału. W celu obliczenia współczynnika sztywności giętnej płyty rozpatrzono układ przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Zginanie walcowe płyty

Równanie linii ugiętej jednostkowego paska płyty ma postać (5):

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M_g(x)}{D}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5)$$

gdzie:

- $M_g(x)$  - moment gnący,
- $D$  - sztywność giętna płyty,
- $E$  - moduł Younga,
- $\nu$  - stała Poissona,
- $h$  - grubość płyty.

Warunki brzegowe dla rozpatrywanego układu są następujące:

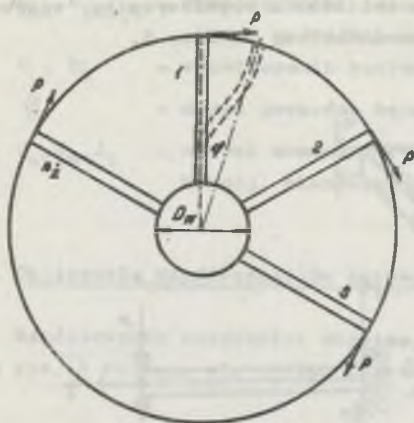
$$\left. \begin{aligned} y(x=0) &= 0 \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{utwierdzenie sztywne} \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{utwierdzenie przesuwno.}$$

Rozwiązując równanie (5) wraz z warunkami brzegowymi (6) otrzymuje się wartość ugięcia jednostkowego paska płyty w punkcie  $x=a$  i na tej podstawie oblicza się jednostkowy współczynnik sztywności giętnej płyty  $C_p$ :

$$y(x=a) = -\frac{pa^3}{12D}, \quad C_p = \frac{12D}{a^3} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{a}\right)^3.$$





Rys. 6. Schemat układu przenoszącego moment obrotowy z wirnika na wał maszyny

gdzie:

- $C_{\pm}$  - współczynnik sztywności skrętnej układu pośredniczącego na jednostkę długości,
- $D_w$  - średnica środkowej części wału,
- $a$  - wysokość żeber,
- $n_{\pm}$  - ilość żebier uczestniczących w przenoszeniu momentu obrotowego (przyjęto, że tylko zebra połączone klinami z rdzeniem wirnika przenoszą moment obrotowy),
- $M_B$  - moment skręcający działający na układ,
- $\varphi$  - kąt skręcenia wirnika względem wału.

## 6. Badania drgań wymuszonych układu mechanicznego, charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe

Na podstawie wyprowadzonego modelu matematycznego układu mechanicznego maszyny przeprowadzono badania drgań skrętnych układu dla silnika indukcyjnego SZJr-138-01 r o mocy 400 kW.

Badania przeprowadzono dla kilku modeli układu mechanicznego oznaczonych cyframi 1,2,3,5 (rys. 7). Parametry modeli podano w tabelicy 1. W modelu 1,2 uwzględniono własności odkształcalne końcowej części wału, zastępując końcowy odcinek wału jednym lub dwoma elementami sprężystymi, traktując pozostałą część układu jako ciało sztywne. W modelu 3,5 uwzględniono własności odkształcalne żebier oraz części wału pod żebrowaniem. W modelu 3 część wału pod żebrowaniem potraktowano jako ciało sztywne, zaś w modelu 5 część wału pod żebrowaniem zastąpiono trzema elementami sprężystymi.

W celu obliczenia współczynnika sztywności skrętnej układu pośredniczącego rozpatrzono układ przedstawiony na rys. 6.

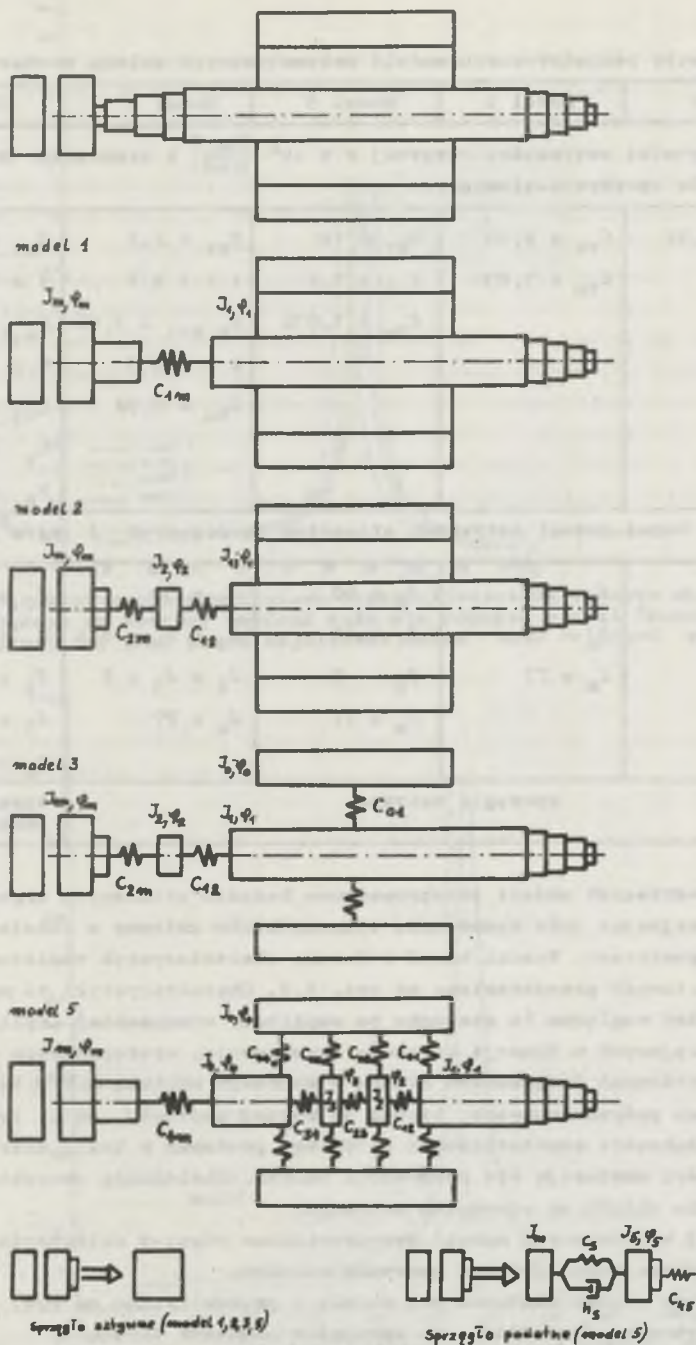
Zakładając jednakowe kąty ugięcia żebier oraz przyjmując, że dla małych kątów skręcenia wirnika względem wału zachodzi:

$$y(x=a) = \left(\frac{D_w}{2} + a\right)\varphi.$$

Współczynnik sztywności skrętnej układu pośredniczącego na jednostkę długości wynosi:

$$C_{\pm} = \frac{M_B}{\varphi} = n_{\pm} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left(\frac{D_w + 2a}{2}\right)^2$$





Rys. 7. Rozpatrywane modele układu mechanicznego

Tablica 1

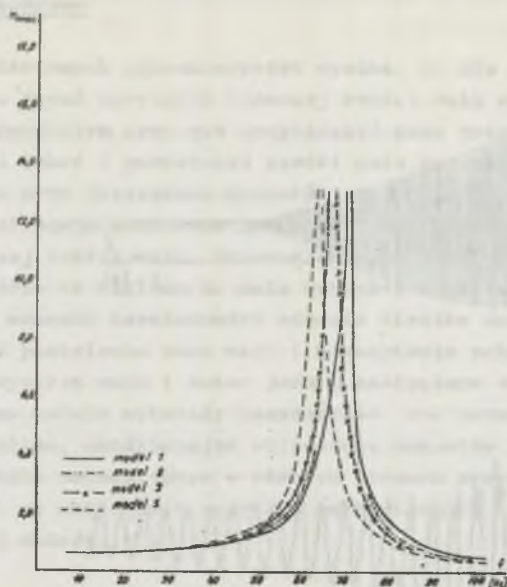
Parametry rozpatrywanych modeli matematycznych układu mechanicznego

Model 1	Model 2	Model 3	Model 5	Model 5
Współczynniki sztywności skrętnej $\alpha \times 10^7 \left[ \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$ i tłumienia $h$ [Nms] elementów sprężysto-tłumiących				
$C_{1m} = 0,72$	$C_{12} = 2,40$ $C_{2m} = 1,032$	$C_{01} = 10$ $C_{12} = 2,4$ $C_{2m} = 1,032$	$C_{01} = 2,5$ $i = 1 \div 4$ $C_{k,k+1} = 3,66$ $k = 1 \div 3$ $C_{4m} = 0,72$	$C_{01} = 2,5$ $i = 1 \div 4$ $C_{k,k+1} = 3,66$ $k = 1 \div 3$ $C_{45} = 0,72$ $C_B = 0,11$ $h_a = 95$
Momenty bezwładności sztywnych elementów skończonych $J$ [kg/m <sup>2</sup> ]				
$J_1 = 77$ $J_m = 77$	$J_1 = 72$ $J_2 = 5$ $J_m = 77$	$J_0 = 60$ $J_1 = 12$ $J_2 = 5$ $J_m = 77$	$J_0 = 60$ $J_1 = J_4 = 6,5$ $J_2 = J_3 = 2$ $J_m = 77$	$J_0 = 60$ $J_1 = J_4 = 6,5$ $J_2 = J_3 = 2$ $J_5 = 20$ $J_m = 291$
sprzęgło sztywne				sprzęgło podatne

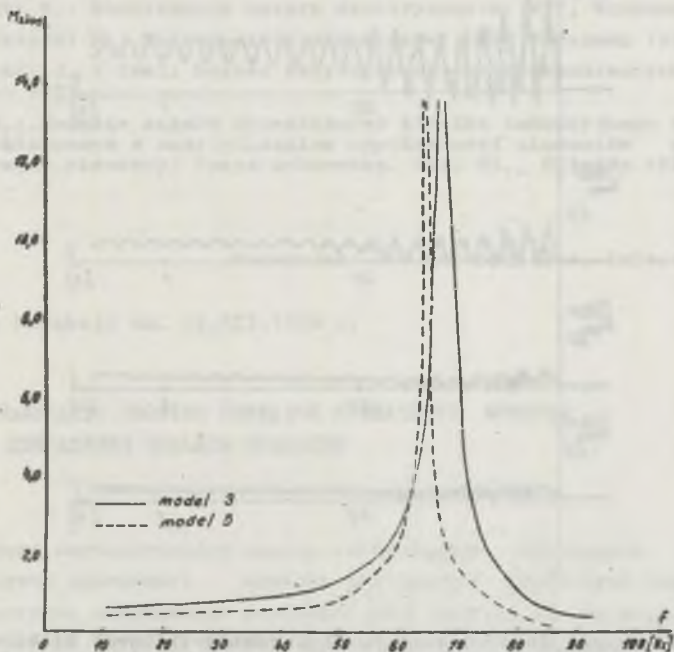
Dla powyższych modeli przeprowadzono badania ustalonych drgań wymuszonych, przyjmując jako wymuszenie sinusoidalnie zmienny w czasie moment elektromagnetyczny. Wyniki badań w formie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych przedstawiono na rys. 8,9. Charakterystyki te przedstawiają wartości względne (w stosunku do amplitudy wymuszenia) amplitud momentów skręcających w funkcji częstotliwości wymuszenia, występujących w najbardziej narażonych fragmentach układu - końcowym odcinku wału i końcowej części układu pośredniczącego, licząc od wolnej końcówki wału. Przedstawiono je w zakresie częstotliwości 0-100 Hz, ponieważ w takim zakresie częstotliwości zawierają się pobudzenia układu. Obliczenia charakterystyk dokonano dla układu ze sprzęgłem sztywnym.

Dla wyżej wymienionych modeli przeprowadzono również obliczenia drgań skrętnych występujących podczas rozruchu silnika.

Przykładowe wyniki obliczeń dla modelu 5 przedstawiono na rys. 10. Obliczenia wykonano dla układu - ze sprzęgłem podatnym skrętnie.

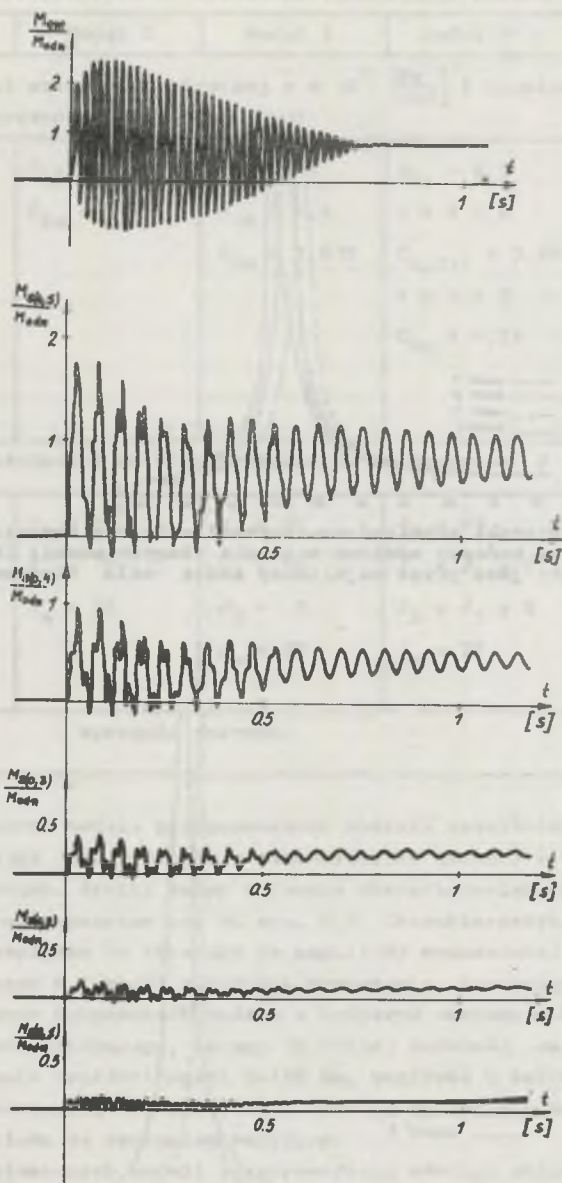


Rys. 8. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe momentu skręcającego działającego na końcowy odcinek wału dla różnych modeli (końcowy odcinek wału określony jest przez najbliższy końca wału element sprężysty)



Rys. 9. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe momentu skręcającego działającego na końcowy odcinek układu zębów dla różnych modeli (końcowy odcinek układu zębów wyznaczony jest przez najbliższy końca zębów element sprężysty)





Rys. 10. Przebiegi czasowe momentu elektromagnetycznego silnika i momentów skręcających działających na końcowy odcinek wału oraz wzdłuż układu żeber wirnika podczas rozruchu bez obciążenia ( $M_{odn} = 6698,72 \text{ Nm}$ )

## 7. Wnioski końcowe

Z przedstawionych charakterystyk wynika, że dla rozpatrywanego układu przy badaniu drgań skrętnych końcowej części wału można zastąpić ją jednym elementem sprężystym oraz nie uwzględniać poza obszarem rezonansu wpływu sprężystości łożysk i pozostałej części wału na drgania.

Natomiast przy obliczaniu momentów skręcających występujących w układzie pośredniczącym konieczne jest uwzględnienie właściwości odkształcalnych środkowej części wału, nieuwzględnienie tego prowadzi do błędów.

Równocześnie ze względu na małe wartości momentu bezwładności wału w stosunku do momentu bezwładności rdzenia wirnika wraz z uzwojeniem istnieje możliwość pominięcia masy wału i zastąpienia połączonych ze sobą elementów sprężystych wału i łożysk jednym zastępczym elementem sprężystym. Przedstawione modele wykazały przydatność do prowadzenia analizy drgań skrętnych układu, umożliwiając obliczenie momentów skręcających występujących w układzie mechanicznym w różnych stanach pracy maszyny. Pozwala to w konsekwencji na obliczenie naprężeń mechanicznych i ocenę wytrzymałości zmęczeniowej układu.

## LITERATURA

- [1] Dąbrowski M.: Konstrukcja maszyn elektrycznych. WNT, Warszawa 1977.
- [2] Niezgodziński M.: Wytrzymałość materiałów. PWN, Warszawa 1981.
- [3] Kruszewski J. i inni: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
- [4] Kudła J.: Badanie stanów dynamicznych silnika indukcyjnego z wirnikiem głębokołożebkowym z uwzględnieniem sprężystości elementów przenoszących moment obrotowy. Praca doktorska. Pol. Śl., Gliwice 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Tadeusz Sobozyk

Wpłynęło do Redakcji dn. 15.XII.1982 r.

## КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧ ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ

### Р е з ю м е

Представлено математическую модель изображающую крутильные колебания системы передачи вращающего момента асинхронных двигателей большой мощности. Рассмотрены вынужденные колебания этой системы для различных вариантов математических моделей. Расчёты проведены для асинхронного двигателя мощностью 400 кВт.

THE TORSIONAL VIBRATIONS IN THE TORQUE TRANSMISSION SYSTEM OF THE BIG POWER INDUCTION MOTOR

Summary

The mathematical model of the torsional vibrations in a big power induction motor is presented.

The stationary vibrations of the system for various states of simplifications of the mathematical model is analysed. The computations have been performed for 400 kV induction motor.



Fig. 1. Stationary torsional vibrations of the shaft of a 400 kV induction motor. The graph shows a complex, periodic waveform with multiple peaks and troughs, indicating high-frequency oscillations. The amplitude of the vibrations is relatively constant over time, suggesting a steady-state condition.

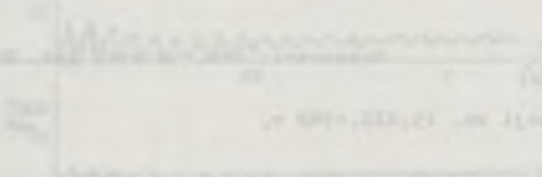


Fig. 2. Stationary torsional vibrations of the shaft of a 400 kV induction motor. The graph shows a smooth, periodic sine wave, indicating a steady-state condition. The amplitude of the vibrations is constant over time.

Fig. 3. Stationary torsional vibrations of the shaft of a 400 kV induction motor. The graph shows a smooth, periodic sine wave, indicating a steady-state condition. The amplitude of the vibrations is constant over time.