

Roman KONIECZNY

Instytut Transportu Kolejowego  
Politechniki Śląskiej

ZAGADNIENIE ODWZOROWANIA MASY ZASTĘPCZEJ SIECI TRAKCYJNEJ  
W OBLICZENIACH SYMULACYJNYCH WSPÓŁPRACY ODBIERAKA PRĄDU  
Z SIECIĄ TRAKCYJNĄ

**Streszczenie.** W modelach matematycznych współpracy dynamicznej jednego odbieraka prądu z siecią trakcyjną występuje konieczność odwzorowania charakterystyki masy zastępczej sieci trakcyjnej. Charakterystyka ta może być odwzorowana kilkoma sposobami. W artykule przedstawiono niektóre aspekty wyboru sposobu najkorzystniejszego do obliczeń symulacyjnych przy użyciu komputera.

## 1. Wprowadzenie

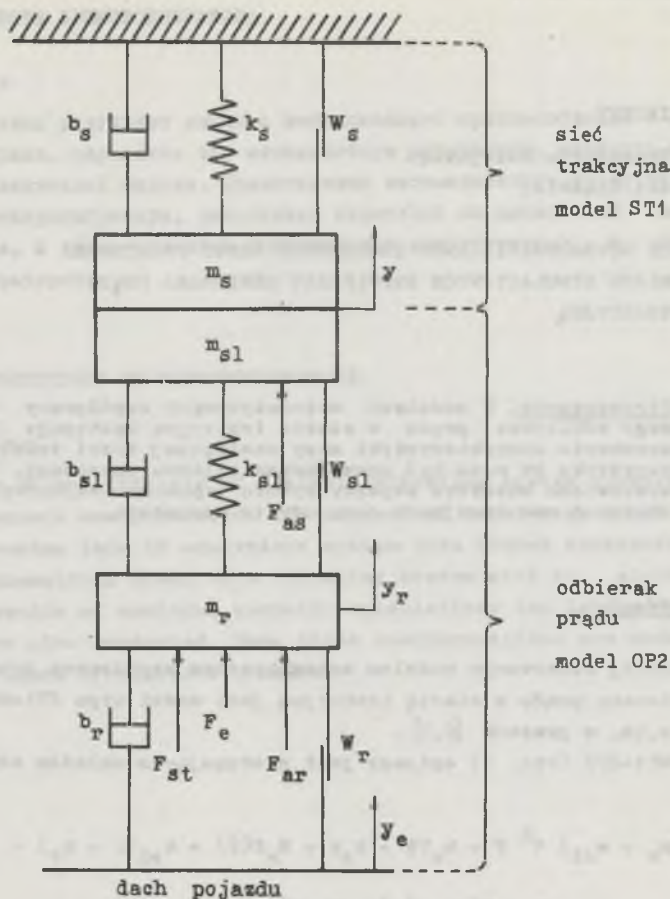
Najczęściej stosowanym modelem matematycznym współpracy dynamicznej jednego odbieraka prądu z siecią trakcyjną jest model typu ST1+OP2, przedstawiony m.in. w pracach [6,7].

Model ST1+OP2 (rys. 1) opisany jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\left. \begin{aligned} (m_s + m_{s1}) v^2 \ddot{y} + b_s v \dot{y} + k_s y + W_s f(\dot{y}) + k_{s1}(y - y_r) + \\ + b_{s1} v(\dot{y} - \dot{y}_r) + W_{s1} f(\dot{y} - \dot{y}_r) = F_{as} \\ m_r v^2 \ddot{y}_r - k_{s1}(y - y_r) - b_{s1} v(\dot{y} - \dot{y}_r) - W_{s1} f(\dot{y} - \dot{y}_r) + \\ + b_r v(\dot{y}_r - \dot{y}_e) + W_r f(\dot{y}_r - \dot{y}_e) = F_{st} + F_{ar} + F_e \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie:

- $y$  - przemieszczenie pionowe punktu styku odbieraka z siecią,
- $\dot{y}$  - prędkość pionowa punktu styku odbieraka z siecią,
- $\ddot{y}$  - przyspieszenie pionowe punktu styku odbieraka z siecią,
- $v$  - prędkość przemieszczenia się odbieraka wzdłuż sieci,
- $m_s$  - masa zastępcza sieci trakcyjnej,
- $b_s$  - współczynnik tarcia lepkiego sieci trakcyjnej,
- $k_s$  - sztywność sieci trakcyjnej w kierunku pionowym,
- $W_s$  - siła tarcia suchego sieci trakcyjnej,



Rys. 1. Model matematyczny typu ST1-OP2 współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną

$y_r$  - przemieszczenie pionowe górnego węzła układu ramowego odbieraka prądu,

$\dot{y}_r$  - prędkość pionowa górnego węzła układu ramowego,

$\ddot{y}_r$  - przyspieszenie pionowe górnego węzła układu ramowego,

$\dot{y}_e$  - prędkość pionowa dachu pojazdu,

$m_{sl}$  - masa ślizgacza odbieraka prądu,

$k_{sl}$  - sztywność usprężynowania ślizgacza,

$b_{sl}$  - współczynnik tarcia lepkiego układu usprężynowania ślizgacza,

$W_{sl}$  - siła tarcia suchego układu usprężynowania ślizgacza,

$m_r$  - masa ramienia odbieraka (średniokowana do górnego węzła),

$b_r$  - współczynnik tarcia lepkiego układu ramowego odbieraka,

- $W_r$  - siła tarcia suchego w układzie ramowym odbieraka,  
 $F_{st}$  - siła statyczna odbieraka prądu,  
 $F_{ar}$  - siła naporu powietrza odchylająca ramiona odbieraka,  
 $F_{as}$  - siła naporu powietrza podnosząca ślizgacz,  
 $F_e$  - siła oddziaływania pudła pojazdu na układ ramowy odbieraka,  
 $f(\dots)$  - funkcje określające znak siły tarcia suchego w układzie.

Siła stykowa między odbierakiem prądu a siecią trakcyjną określona jest równaniem następującej postaci:

$$F_k = m_s V^2 \ddot{y} + b_s \dot{y} + k_s y + W_s f(\dot{y}) \quad (2)$$

Zmienne  $y$ ,  $y_r$  oraz ich pochodne odniesione są do drogi ( $x$ ) wzdłuż sieci trakcyjnej. W modelu ST1+OP2 sieć trakcyjna odwzorowana jest jako układ z 1 stopniem swobody o zmiennych parametrach:  $m_s$ ,  $k_s$ ,  $b_s$  i  $W_s$ ; odbierak prądu odwzorowany jest jako układ z 2 stopniami swobody.

Do obliczeń symulacyjnych realizowanych przy użyciu komputera niezbędna jest znajomość charakterystyk wszystkich parametrów uwzględnionych w ww. modelu matematycznym. Jednym z poważniejszych problemów jest wybór sposobu odwzorowania charakterystyki masy zastępczej sieci trakcyjnej.

## 2. Pojęcie masy zastępczej sieci trakcyjnej

Pojęcie masy zastępczej można zdefiniować następująco: masa zastępcza sieci trakcyjnej jest to fikcyjna masa, zredukowana do punktu styku z odbierakiem prądu, której działanie na ślizgacz odbieraka jest identyczne jak rozłożonych przestrzennie mas rzeczywistych [3,8].

Publikacje omawiające sposoby określenia masy zastępczej sieci trakcyjnej podzielić można na dwie zasadniczo grupy:

- masa zastępcza rozpatrywana jest stosownie do długości uniesionej przez odbierak części sieci trakcyjnej;
- masę zastępczą określa się z warunku dynamicznej równowagi układu, opartej na przyrównaniu częstotliwości drgań swobodnych układu z jednym stopniem swobody z częstotliwością drgań układu z nieskończoną liczbą stopni swobody (takim układem jest w rzeczywistości sieć trakcyjna).

## 3. Sposoby odwzorowania masy zastępczej

Sposobów odwzorowania masy zastępczej sieci trakcyjnej jest kilka. Poniżej podano kilka najbardziej reprezentatywnych.

Rozważania na temat sposobu odwzorowania masy zastępczej należy zacząć od tezy Fujii-Shibata [2], że masa sieci trakcyjnej jako parametr rozło-

zony przestrzennie - nie musi być uwzględniana w modelu matematycznym sieci, tzn. że można przyjąć w obliczeniach:

$$m_s = 0 \quad (3)$$

W artykule [8] podano następujący wzór na obliczenie masy zastępczej sieci trakcyjnej w dowolnym punkcie przęsła zawieszenia:

$$m_s(x) = 0,09 \sqrt{\frac{(T + \Psi N) j_N (F_{st} + F_a)}{k_s(x)}} \quad (4)$$

gdzie:

- $F_a$  - składowa aerodynamiczna nacisku odbieraka na sieć,
- $T$  i  $N$  - naciągi sumaryczne: lin nośnych i drutów jezdnych,
- $j_N$  - masa jednostkowa drutu jezdnych,
- $\Psi$  - współczynnik konstrukcyjny sieci trakcyjnej,

$$\Psi = \frac{(L - 2o)^2}{L^2} \quad (5)$$

$L$  - długość przęsła zawieszenia sieci trakcyjnej,

$o$  - odległość pierwszego wieszaka od podpory (dla sieci typu Y).

Szywność sieci trakcyjnej najczęściej określana jest następującym wzorem [2,5,6,7]:

$$k_s(x) = \bar{k}_s (1 + \delta_k \cos \frac{2\pi}{L} x) \quad (6)$$

gdzie:

$\bar{k}_s$  - wartość średnia sztywności w przęsle zawieszenia,

$\delta_k$  - współczynnik nierównomierności sztywności.

Na podstawie wzoru (4) można stwierdzić, że masa zastępcza osiąga wartość maksymalną w środku przęsła, a minimalną pod podporą.

L. Pasoueci [2,3], analizując zmienność wartości sztywności i masy zastępczej wzdłuż przęsła, zwrócił uwagę na fakt, że są one w stosunku do siebie wprost proporcjonalne, a ich iloraz jest wartością stałą dla dowolnego punktu wzdłuż przęsła:

$$\frac{m_s(x)}{k_s(x)} = \text{const} \quad (7)$$

Stała we wzorze (7) równa jest odwrotności kwadratu częstości drgań własnych sieci trakcyjnej. Można zatem napisać:

$$m_s(x) = \frac{k_s(x)}{\omega_s^2} \quad (8)$$

gdzie:

$\omega_s$  - częstość drgań własnych sieci trakcyjnej.

Ze wzoru (8) wynika, że masa zastępcza osiąga wartość maksymalną pod podporą, a minimalną w środku przęsła.

W pracy [4] omówiono wyniki badań poligonowych przeprowadzonych w ZSRR w celu określenia masy zastępczej sieci M-120+2MF-100, a na ich podstawie sformułowano empiryczną zależność:

$$m_s = 10 n j_N + 22 \quad (9)$$

z której wynika, że masa zastępcza sieci trakcyjnej jest stała wzdłuż przęsła, a wielkość jej uzależniona jest tylko od  $j_N$  - masy jednostkowej drutu jezdnych w [kg/m] oraz od  $n$  - liczby drutów jezdnych. Empiryczna zależność (9) podważa tezę Fujii-Shibata.

Innym wzorem, określającym masę zastępczą jako stałą, jest wzór Nible-  
ra [3]:

$$m_s = \frac{L m_j}{\pi} \quad (10)$$

gdzie:

$m_j$  - masa jednostkowa sieci trakcyjnej.

Na odnotowanie w tym miejscu również zasługuje wzór Kumezawy, którego postać jest następująca [2]:

$$m_s(x) = \bar{m}_s \left( 1 + \varepsilon_m \cos \frac{2\pi}{L} x \right) \quad (11)$$

gdzie:

$\bar{m}_s$  - wartość średnia masy zastępczej w przęsle zawieszenia,

$\varepsilon_m$  - współczynnik nierównomierności rozkładu masy zastępczej wzdłuż przęsła.

#### 4. Pochodna masy zastępczej

Ze wzorów (4), (8) i (11), po podstawieniu explicite  $x = v t$ , wynika, że masa zastępcza sieci trakcyjnej jest zmienna w czasie. W pracy [5] zwrócono uwagę, że skoro masa zastępcza ( $m_s$ ) jest zmienna w czasie, to musi istnieć - zgodnie z definicją Newtona - jej pochodna ( $\dot{m}_s$ ). A zatem pier-

wzrę równanie układu (1) oraz równanie (2) należy uzupełnić o składnik  $(v^2 \dot{m}_s \dot{y})$ .

Ze względu na to, że różniczkowanie numeryczne w obliczeniach symulacyjnych jest operacją charakteryzującą się niestabilnością odpowiedzi, zalecane jest zastępowanie go innym rodzajem obliczeń. Przykładowo: pochodną masy zastępczej można wyznaczyć ze wzoru:

$$\dot{m}_s(x) = \frac{1}{\omega_s^2} \dot{k}_s(x) \quad (12)$$

Przyjmując charakterystykę sztywności sieci według wzoru (6), wyrażenie określające pochodną masy zastępczej przyjmuje postać:

$$\dot{m}_s(x) = - \frac{2\pi \bar{k}_s \varepsilon_k}{\omega_s^2 L} \sin \frac{2\pi}{L} x \quad (13)$$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń testowych dla kilku rodzajów sieci trakcyjnej można stwierdzić, że uwzględnienie pochodnej masy zastępczej ma pewien wpływ na wartość otrzymywanych wyników. Największe odnotowane różnice w wartościach ekstremalnych przemieszczenia pionowego punktu styku ( $y$ ) zawarte były w przedziale od 1 do 2 cm, a dla siły stykowej ( $F_k$ ) od 5 do 10 N.

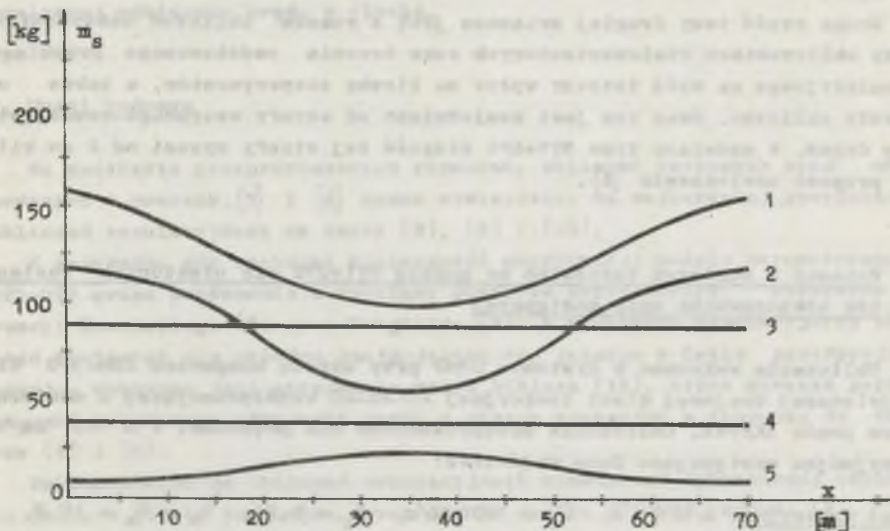
Poprawka dotycząca pochodnej masy zastępczej nie ma więc znaczenia tylko czysto formalnego i powinna być uwzględniana w rozważaniach dotyczących współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną, gdy masa zastępcza jest odwzorowywana jako zmienna w czasie.

##### 5. Zagadnienie wyboru sposobu odwzorowania masy zastępczej

Do obliczeń symulacyjnych współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną należy wybrać jeden ze wzorów: (3), (4), (8), (9), (10) lub (11). Problem polega na określeniu, który z tych wzorów jest najlepszy - tzn. daje największą dokładność odwzorowania charakterystyki masy zastępczej. Najprostszym sposobem rozstrzygnięcia tego problemu byłoby porównanie wyników obliczeń uzyskanych na modelu ST1-OP2 z wynikami pomiarów poligonowych. Zasadniczo trudność polega jednak na tym, że wyniki pomiarów poligonowych są trudno dostępne i nie są zbyt pewne. Wykonywane serie pomiarowe ze względu na wysokie koszty są zbyt krótkie, a ilość niewiadomych czynników - jak np. działające w momencie pomiarów zakłócenia (wiatr, drgania lokomotywy itp.) - jest zbyt wielka. Jedyne krajowe dostępne wyniki [1] również obciążone są tymi wadami.

Na rys. 2 pokazano niektóre warianty odwzorowania masy zastępczej sieci trakcyjnej 2C120-2C według przedstawionych powyżej wzorów. Jak widać,

charakterystyki masy zastępczej rozpatrywanej sieci trakcyjnej dla poszczególnych wariantów różnią się dość wyraźnie.



Rys. 2. Przykłady odwzorowania masy zastępczej sieci trakcyjnej 2C120-2C [6]

(1 - według wzoru (8), 2 - według wzoru (11) dla  $\xi_m = 0,4$  oraz  $\bar{m}_s = 87,5$  kg, 3 - według wzoru (10), 4 - według wzoru (9), 5 - według wzoru (4))

Ażeby rozstrzygnąć kwestię, który wariant odwzorowania masy zastępczej jest najbardziej przydatny do obliczeń symulacyjnych, należałoby postawić następujące dwie tezy:

- 1) najbardziej przydatny do odwzorowania masy zastępczej sieci trakcyjnej jest taki wzór, dla którego zbieżność wyników symulacji z wynikami pomiarów poligonowych jest największa.
- 2) pierwszeństwo w stosowaniu powinien mieć wzór, którego podzbiór parametrów jest najmniejszy, a strefa wstępnego rozwijania się drgań modelu (przy założeniu zerowych warunków początkowych) jest najkrótsza.

Teza pierwsza jest oczywista, ale trudna do udekumentowania. Pierwsza część tezy drugiej dotyczy parametrów trudnych do określenia, których aproksymowanie wartościami przybliżonymi może spowodować duże błędy w obliczeniach. Z tych też względów nie jest wskazane stosowanie wzorów (4) i (11). Wzór (4) uzależnia masę zastępczą od typu współpracującego z siecią odbieraka prądu. Pomijając zasadność takiego uzależnienia, należy stwierdzić, że składnik wzoru:  $F_a$  - składowa aerodynamiczna zależy zarówno od kształtu odbieraka oraz od prędkości jazdy, jak również podlega zakłóceniom związanym z czynnikami atmosferycznymi. Z kolei wzór (11) zawiera dwa

czynnikami niewiadome:  $\bar{m}_s$  i  $\bar{\epsilon}_m$  - możliwe do wyznaczenia tylko na drodze pomiarowej. (Parametr  $\bar{m}_s$  można ewentualnie obliczyć ze wzoru (10), przyjmując:  $m_s = \bar{m}_s$ , a wartość współczynnika  $\bar{\epsilon}_m$  założyć w przedziale od 0,1 do 0,6).

Druga część tezy drugiej związana jest z czasem obliczeń maszynowych. Przy obliczeniach wielowariantowych czas trwania podstawowego przebiegu symulacyjnego ma dość istotny wpływ na liczbę eksperymentów, a także na koszty obliczeń. Czas ten jest uzależniony od strefy wstępnego rozwijania się drgań. W modelach typu ST1+OP2 długość tej strefy wynosi od 2 do kilku pręseł zawieszenia [6].

#### 6. Wnioski z obliczeń testowych na modelu ST1+OP2 dla niektórych wariantów odwzorowania masy zastępczej

Obliczenia wykonano w systemie CSMP przy użyciu komputera IBM-370 dla najcięższej krajowej sieci trakcyjnej 2C120-2C współpracującej z odbierakiem prądu AKP-4E. Obliczenia przeprowadzono dla prędkości  $V = 160$  km/h, przyjmując następujące dane wyjściowe:

sieć trakcyjna:  $L = 70$  m,  $\bar{k}_s = 3670$  N/m,  $\bar{\epsilon}_k = 0,21$ ,  $W_s = \bar{W}_s = 10$  N,  
 $b_s = \bar{b}_s = 30$  Ns/m,  $\omega_s = 5,34$  s<sup>-1</sup>,  $m_j = 3,92$  kg/m,  
 $2N = 19080$  N,  $T = 15900$  N,  $\psi = 0,78$ ;

odbierak prądu:  $m_{s1} = 12,2$  kg,  $m_r = 21,6$  kg,  $k_{s1} = 4785$  N/m,  
 $W_{s1} = W_r = 10$  N,  $b_{s1} = b_r = 0$ ,  $F_{st} = 80$  N,  $F_a = 60$  N,  
 $F_{as} = 42$  N,  $F_{ar} = 18$  N.

Funkcje określające znak siły tarcia suchego aproksymowano tangensem hiperbolicznym oraz założono niewystępowanie drgań pudła pojazdu trakcyjnego.

Ocenie poddano następujące wzory: (4), (8), (9), (10) i (11). Na podstawie wykonanych obliczeń, których część wyników zawiera praca [6], można sformułować następujące wnioski:

- najszybsze ustabilizowanie się przebiegów: pionowego przemieszczenia punktu styku odbieraka z siecią ( $y$ ) oraz siły stykowej ( $F_k$ ) po rozpoczęciu symulacji przy zerowych warunkach początkowych - następuje, gdy charakterystyka masy zastępczej opisana jest wzorem (8), dla którego strefa wstępnego rozwijania się drgań wynosi od 2 do 3 pręseł zawieszenia,
- różnice w wynikach dla wzorów (9), (10) oraz (4) są pomijalne,
- dla wzoru (11), przy zadanej stałej wartości  $\bar{m}_s$ , różnice w wynikach przy zmieniającym się współczynnikiem  $\bar{\epsilon}_m$  w zakresie od -0,5 do 0,5 - są pomijalne,



- we wzorze (11) podstawowym czynnikiem decydującym o różnicach w otrzymanych wynikach jest wartość średnia masy zastępczej ( $\bar{m}_g$ ).

Dokonując obliczeń testowych sformułowano również wniosek ogólny: wzrost masy sieci trakcyjnej powoduje pogorszenie jakości współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią.

## 7. Uwagi końcowe

Na podstawie przeprowadzonych rozważań, obliczeń testowych oraz uwag podanych w pracach [5] i [6] można stwierdzić, że najbardziej przydatne do obliczeń symulacyjnych są wzory (8), (9) i (10).

W przypadku gdy zachodzi konieczność weryfikacji modelu matematycznego ST1+OP2 przez porównanie z wynikami pomiarów poligonowych, korzystne są wzory: Pasuciego (8) oraz Frajfelda (9). W przypadku symulacyjnych obliczeń testowych dla układów znajdujących się jeszcze w fazie przedprojektowej - wskazane jest stosowanie wzoru Niblera (10), który stwarza gorsze warunki współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną w stosunku do wzorów (8) i (9).

Rekomendowane do obliczeń symulacyjnych współpracy dynamicznej odbieraka prądu z siecią trakcyjną, przy użyciu modelu ST1+OP2, wzory: (8), (9) i (10) są łatwe w stosowaniu, ponieważ:

- dla wzoru (8) do odwzorowania masy zastępczej, oprócz podstawowej charakterystyki  $k_g(x)$ , wymagana jest tylko znajomość częstości drgań własnych sieci trakcyjnej,
- dla wzoru (9) wymagana jest tylko znajomość liczby drutów jezdnych oraz ich masy jednostkowej,
- dla wzoru (10) wymagana jest tylko znajomość długości przęsła zawieszenia oraz masy jednostkowej sieci trakcyjnej.

Powyższy fakt może okazać się ważny w przypadku wykorzystania do symulacji prostych narzędzi obliczeniowych, takich jak np. maszyna analogowa lub kalkulator programowany.

Ponieważ masa zastępcza odwzorowana według wzoru (8) jest zmienna w czasie, należy w równaniach modelu uwzględnić jej pochodną ( $\dot{m}_g$ ).

## LITERATURA

- [1] Banek A., Keniewski M.: Badanie sieci trakcyjnej CMK dla wprowadzenia prędkości jazdy 160 km/h. COBiRTK, Warszawa 1977, temat nr 3356/17.
- [2] Ebeling H.: Stromabnahme bei hohen Geschwindigkeiten-Probleme der Fahrleitungen und Stromabnehmer. Elektrische Bahnen nr 2 i 3/1969.
- [3] Fidrych Z.: Sposoby określenia masy zastępczej sieci trakcyjnej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka 52/1977.

- [4] Frajfeld A.W.: Projektowanie kontaktnej sieci. Wyd. "Transport", Moskwa 1978.
- [5] Grajner J.: Drgania ruchomego układu dyskretnej współpracującej z układem ciągłym na przykładzie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska 1979.
- [6] Konieczny R.: Ocena jakości współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną przy użyciu symulacji komputerowej. Praca doktorska, Politechnika Śląska 1981.
- [7] Konieczny R.: Wpływ podstawowych parametrów sieci trakcyjnej i odbieraka prądu na jakość współpracy tych układów. Trakcja i wagony Nr 5/1982.
- [8] Siemiński T.: Masa zastępcza sieci trakcyjnej. Przegląd Kolejowy Elektrotechniczny Nr 11/1971.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Przemysław Pazdro

Wpłynęło do Redakcji dn. 5.I.1983 r.

**ПРОБЛЕМА ОТОБРАЖЕНИЯ ЗАМЕНЯЮЩЕЙ МАССЫ КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ  
В СИМУЛЯЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОПРИЕМНИКА  
И КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ**

**Р е з ю м е**

В математических моделях взаимодействия токоприёмника и контактной подвески выступает необходимость отображения характеристики заменяющей массы контактной подвески. Эта характеристика может быть отображена несколькими методами. В статье представлены некоторые аспекты выбора наиболее эффективного метода симуляционных вычислений при пользовании электронной вычислительной машины.

**THE PROBLEM OF SUBSTITUTIONAL MASS REPRESENTATION OF THE OVERHEAD  
CONTACT SYSTEM IN SIMULATION OF THE CURRENT COLLECTOR COLLABORATION  
WITH THE OVERHEAD CONTACT SYSTEM**

**S u m m a r y**

In the mathematical models of dynamic collaboration of one current collector with overhead contact system there is a necessity of the characteristic of representation substitutional mass of the overhead contact system. This characteristic may be represented by a few methods. Some aspects of the best choice of the method for the computer simulation have been presented in the article.