ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: BUDOWNICTWO z. 53 Nr kol. 660

Wiesław LASKA

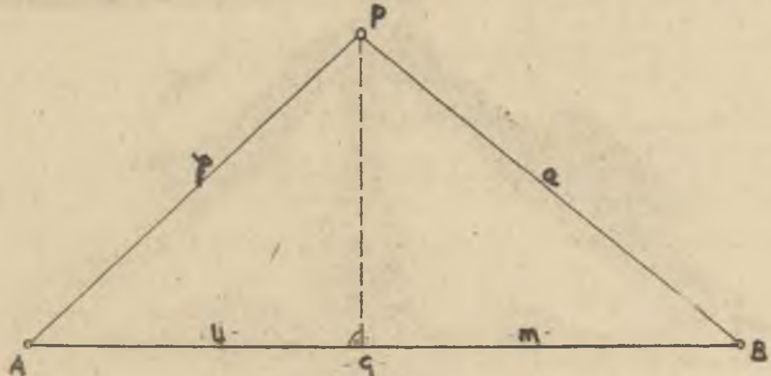
OCENA DOKŁADNOŚCI TYCZENIA METODĄ WCIĘĆ LINIOWYCH

Streszczenie. W pracy podano wyprowadzenie ścisłych wzorów na błąd długości i kierunku odcinka określonego przez dwa punkty wytyczone metodą wcięcia liniowego.
We wzorach uwzględniono wpływ błędów pomiarów wytyczających, bez uwzględnienia wpływu błędów punktów sieci realizacyjnej.

1. WSTĘP

Metoda wcięcia liniowego polega na pomiarze (odłożeniu) odległości od dwóch znanych punktów na bokach osnowy do punktu wyznaczonego. Wielkości liniowe a_P, b_P i a_K, b_K pomierzone od znanych punktów osnowy A, B jednoznacznie lokalizują odcinek PK (por. rys. 2).
Metoda wcięć liniowych jako jedna z metod bezpośrednich pomiarów geodezyjnych znajduje zastosowanie głównie w pomiarach miejskich oraz w pomiarach szczegółów grupy II i III w odniesieniu do szczegółów grupy I.
Zakres wykorzystania tej metody zwiększa się, jeżeli pomiar wielkości liniowych wykonywany jest za pomocą przyrządów do pośredniego pomiaru odległości,

Przedmiotem pracy jest wyznaczenie średnich błędów długości i kierunku tego odcinka, wynikających z niedokładności pomiaru odległości a_P, b_P, a_K, b_K oraz geometrii konstrukcji tyczącej.



Rys. 1

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 1 można napisać zależność:

$$h^2 = b^2 - l^2 = a^2 - m^2, \tag{1.1}$$

stąd:

$$b^2 - a^2 = l^2 - m^2,$$

$$b^2 - a^2 = (l-m)\,(l+m),$$

$$l - m = \frac{b^2 - a^2}{l + m}.$$

Uwzględniająo związek $l + m = c$, otrzymamy:

$$\begin{cases} l + m = c \\ l - m = \dfrac{b^2 - a^2}{c}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Z równań (1.2) i (1.1) wyznaczymy kolejno l, m, h:

$$l = \frac{1}{2c}\,(c^2 + b^2 - a^2) \tag{1.3}$$

$$m = \frac{1}{2c}\,(a^2 + c^2 - b^2) \tag{1.4}$$

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4c^2}\,(c^2 + b^2 - a^2)^2} \tag{1.5}$$

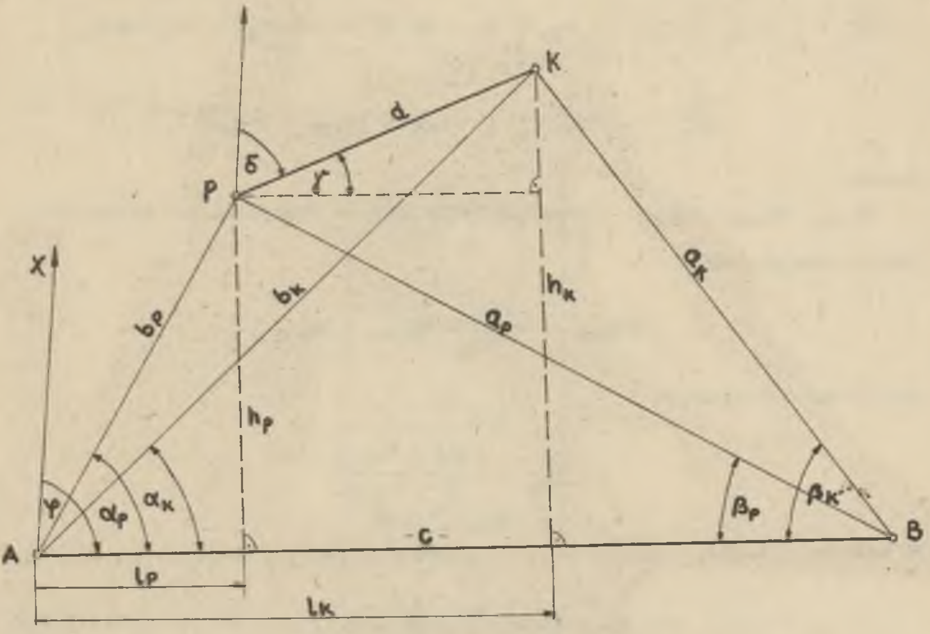
2. ŚREDNI BŁĄD DŁUGOŚCI ODCINKA

Zgodnie z rys. 2 długość d odcinka PK wyrazi się zależnością:

$$d = \sqrt{(h_K - h_P)^2 + (l_K - l_P)^2} \tag{2.1}$$

i po uwzględnieniu wzorów (1.3), (1.5) otrzymamy:

$$d = \sqrt{\left[\sqrt{b_K^2 - \frac{1}{4c^2}\,(c^2 + b_K^2 - a_K^2)^2} - \sqrt{b_P^2 - \frac{1}{4c^2}\,(c^2 + b_P^2 - a_P^2)^2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2c}\,(c^2 + b_K^2 - a_K^2) - \frac{1}{2c}\,(c^2 + b_P^2 - a_P^2)\right]^2} \tag{2.2}$$



Rys. 2

Zależność (2.2) przedstawia długość odcinka PK jako funkcję mierzonych wielkości liniowych. W myśl prawa przenoszenia się błędów, średni błąd tej funkcji wyraża się wzorem:

$$m_d^2 = \left(\frac{\partial d}{\partial a_P}\right)^2 m_{a_P}^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial a_K}\right)^2 m_{a_K}^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial b_P}\right)^2 m_{b_P}^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial b_K}\right)^2 m_{b_K}^2, \quad (2.3)$$

gdzie:

m_d – średni błąd długości odcinka PK z tytułu niedokładności czynności pomiarowych,

$\frac{\partial d}{\partial a_P}, \frac{\partial d}{\partial a_K}, \frac{\partial d}{\partial b_P}, \frac{\partial d}{\partial b_K}$ – pochodne cząstkowe funkcji d,

$m_{a_P}, m_{a_K}, m_{b_P}, m_{b_K}$ – średnie błędy pomiaru długości a_P, a_K, b_P, b_K.

Pochodne cząstkowe występujące we wzorze (2.3) ustalono różniczkując wyrażenie (2.2) względem odpowiednich elementów liniowych.

Różniczkując funkcję (2.2) względem b_P i wprowadzając oznaczenia przyjęte na rys. 2, pochodne $\frac{\partial d}{\partial b_P}$ przyjmie postać

$$\frac{\partial d}{\partial b_P} = -\frac{b_P}{cd}\left[\frac{1}{h_P}(h_K - h_P)(c - l_P) + l_K - l_P\right]$$

i po dalszych przekształceniach

$$\frac{\partial d}{\partial b_P} = -\frac{b_P}{cd\ b_P \sin\alpha_P}\left[c\ b_K \sin\alpha_K + b_P\ b_K' \sin(\alpha_P-\alpha_K) - c b_P \sin\alpha_P\right]$$

$$\frac{\partial d}{\partial b_P} = -\frac{b_P}{d\ S\Delta_{APB}}\left(S\Delta_{AKB} + S\Delta_{APK} - S\Delta_{APB}\right),$$

gdzie:

$S\Delta_{APB}$, $S\Delta_{AKB}$, $S\Delta_{APK}$ oznaczają powierzchnie odpowiednich trójkątów.

Uwzględniając, że

$$S\Delta_{AKB} + S\Delta_{APK} - S\Delta_{APB} = S\Delta_{BPK}$$

otrzymano ostatecznie

$$\frac{\partial d}{\partial b_P} = -\frac{b_P \cdot S\Delta_{BPK}}{d \cdot S\Delta_{APB}}$$

W podobny sposób określono wzory dla pozostałych pochodnych, otrzymując:

$$\frac{\partial d}{\partial a_P} = \frac{a_P \cdot S\Delta_{APK}}{d \cdot S\Delta_{APB}}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial d}{\partial a_K} = -\frac{a_K \cdot S\Delta_{APK}}{d \cdot S\Delta_{AKB}}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial d}{\partial b_P} = -\frac{b_P \cdot S\Delta_{BPK}}{d \cdot S\Delta_{APB}}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial d}{\partial b_K} = \frac{b_K \cdot S\Delta_{BPK}}{d \cdot S\Delta_{AKB}}. \tag{2.7}$$

Podstawiając wyrażenia (2.4) - (2.7) do zależności (2.3) ustalono wzór na średni błąd długości odcinka wyznaczonego metodą wcięć liniowych:

$$m_d^2 = \frac{1}{d^2}\begin{pmatrix} m_{a_P}^2 \\ m_{a_K}^2 \\ m_{b_P}^2 \\ m_{b_K}^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dfrac{a_P^2 \cdot S^2\Delta_{APK}}{S^2\Delta_{APB}} \\ \dfrac{a_K^2 \cdot S^2\Delta_{APK}}{S^2\Delta_{AKB}} \\ \dfrac{b_P^2 \cdot S^2\Delta_{BPK}}{S^2\Delta_{APB}} \\ \dfrac{b_K^2 \cdot S^2\Delta_{BPK}}{S^2\Delta_{AKB}} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Jeżeli pomiar długości wykonywany jest z jednakową dokładnością, czyli

$$m_{a_P} = m_{a_K} = m_{b_P} = m_{b_K} = m_o,$$

to wzór (2.8) przyjmie postać:

$$m_d^2 = \frac{m_o^2}{d^2} \left[\begin{array}{c} \dfrac{a_P^2 \cdot S^2\Delta_{APK}}{S^2\Delta_{APB}} \\[2ex] \dfrac{a_K^2 \cdot S^2\Delta_{APK}}{S^2\Delta_{AKB}} \\[2ex] \dfrac{b_P^2 \cdot S^2\Delta_{BPK}}{S^2\Delta_{APB}} \\[2ex] \dfrac{b_K^2 \cdot S^2\Delta_{BPK}}{S^2\Delta_{AKB}} \end{array} \right] \tag{2.9}$$

Występujące we wzorach (2.8) (2.9) powierzchnie trójkątów można obliczyć ze wzorów

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

lub

$$4S = \sqrt{\left| \begin{matrix} a^2 & b^2 & c^2, \\ \text{car } A & \text{car } B & \text{car } C \end{matrix} \right|_2},$$

gdzie:

$$\text{car } A = b^2 + c^2 - a^2,$$
$$\text{car } B = a^2 + c^2 - b^2,$$
$$\text{car } C = a^2 + b^2 - c^2.$$

3. ŚREDNI BŁĄD KIERUNKU ODCINKA

Kierunek δ odcinka PK określa zależność

$$\delta = \varphi - \gamma, \tag{3.1}$$

gdzie: φ oznacza kierunek (azymut) boku osnowy, natomiast γ jest kątem nachylenia odcinka PK do boku osnowy (rys. 2).

Z zależności (3.1) wynika, że średni błąd kierunku M_δ wyrazi się wzorem

$$M_\delta^2 = m^2\varphi + m^2\gamma. \tag{3.2}$$

W powyższym wzorze składnik $m^2\varphi$ przedstawia wpływ błędu azymutu boku osnowy na dokładność kierunku wyznaczanego odcinka. W związku z tym błąd kierunku odcinka z tytułu geometrii konstrukcji tyczącej i niedokładności pomiaru jej elementów jest równy błędowi wyznaczania kąta γ, a zatem

$$m_\delta = m\gamma.$$

Kąta nachylenia odcinka PK do boku osnowy wyraża się wzorem (rys. 2)

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{h_K - h_P}{l_K - l_P}, \tag{3.3}$$

a po uwzględnieniu związków (1.3), (1.5) – wzorem

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{b_K^2 - \frac{1}{4c^2}\left(c^2 + b_K^2 - a_K^2\right)^2} - \sqrt{b_P^2 - \frac{1}{4c^2}\left(c^2 + b_P^2 - a_P^2\right)^2}}{\frac{1}{2c}\left(c^2 + b_K^2 - a_K^2\right) - \frac{1}{2c}\left(c^2 + b_P^2 - a_P^2\right)} \tag{3.4}$$

Zgodnie z prawem przenoszenia się błędów średni błąd tego kąta określa zależność:

$$m_\gamma^2 = m_\delta^2 = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial a_P}\right)^2 m_{a_P}^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial a_K}\right)^2 m_{a_K}^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial b_P}\right)^2 m_{b_P}^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial b_K}\right)^2 m_{b_K}^2 \tag{3.5}$$

Różniczkując wzór (3.4) względem kolejnych elementów liniowych wyznaczono pochodne cząstkowe występujące we wzorze (3.5).

W przypadku pochodnej $\frac{\partial\gamma}{\partial b_P}$ otrzymano związek:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial b_P} = \frac{b_P}{cd^2}\left[h_K - h_P - \frac{1}{h_P}\left(c - l_P\right)\left(l_K - l_P\right)\right],$$

a po przekształceniu – zależność:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial b_P} = \frac{b_P}{cd^2 b_P \sin\alpha_P}\left[cb_P\cos\alpha_P + b_P b_K\cos(\alpha_P - \alpha_K) - cb_K\cos\alpha_K - b_P^2\right].$$

Wykorzystując znane wzory

$$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

powyższą zależność przekształcono do postaci ostatecznej

$$\frac{\partial \eta}{\partial b_P} = \frac{b_P}{4d^2 S_{\Delta APB}} \left(a_K^2 - a_P^2 - d^2\right) \tag{3.6}$$

Podobnie ustalono wzory na pozostałe pochodne:

$$\frac{\partial \eta}{\partial a_P} = \frac{a_P}{4d^2\, S_{\Delta APB}} \left(b_P^2 + d^2 - b_K^2\right) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial a_K} = \frac{a_K}{4d^2\, S_{\Delta AKB}} \left(b_K^2 + d^2 - b_P^2\right) \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial b_K} = \frac{b_K}{4d^2\, S_{\Delta AKB}} \left(a_P^2 - a_K^2 - d^2\right) \tag{3.9}$$

Średni błąd kierunku odcinka tyczonego metodą wcięć liniowych wyznaczono podstawiając związki (3.6) - (3.9) do wzoru (3.5):

$$m_\delta^2 = \frac{1}{16d^4} \begin{Bmatrix} m_{a_P}^2 \\ m_{a_K}^2 \\ m_{b_P}^2 \\ m_{b_K}^2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \dfrac{a_P^2}{S^2_{\Delta APB}} \left(b_P^2 + d^2 - b_K^2\right)^2 \\ \dfrac{a_K^2}{S^2_{\Delta AKB}} \left(b_K^2 + d^2 - b_P^2\right)^2 \\ \dfrac{b_P^2}{S^2_{\Delta APB}} \left(a_P^2 + d^2 - a_K^2\right)^2 \\ \dfrac{b_K^2}{S^2_{\Delta AKB}} \left(a_K^2 + d^2 - a_P^2\right)^2 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

Jeżeli $m_{a_P} = m_{a_K} = m_{b_P} = m_{b_K} = m_o$, to zależność (3.10) przyjmie postać:

$$m_{\delta}^2 = \frac{m_o^2}{16d^4} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_P^2}{S^2\Delta_{APB}} (b_P^2 + d^2 - b_K^2)^2 \\ \dfrac{a_K^2}{S^2\Delta_{AKB}} (b_K^2 + d^2 - b_P^2)^2 \\ \dfrac{b_P^2}{S^2\Delta_{APB}} (a_P^2 + d^2 - a_K^2)^2 \\ \dfrac{b_K^2}{S^2\Delta_{AKB}} (a_K^2 + d^2 - a_P^2)^2 \end{array} \right\} \tag{3.11}$$

4. UWAGI KOŃCOWE

Dokładność wyznaczenia elementu e jest określona poprzez graniczny błąd M_{te} według zależności:

$$M_{te} = r \cdot m_e,$$

gdzie:

m_e – średni błąd elementu e,

r – współczynnik zależny od wymaganego prawdopodobieństwa poprawności tyczenia lub pomiaru, od przypadkowości wyboru elementu do wstępnej analizy dokładności oraz od przypadkowości błędów popełnionych przy realizacji lub inwentaryzacji (najczęściej r = 2–4).

Znając wielkość błędu granicznego M_{te} i ustaloną wartość współczynnika r, średni błąd elementu geometrycznego można obliczyć ze wzoru:

$$m_e = \frac{M_{te}}{r}.$$

Na średni błąd wyznaczenia przyjętego elementu ma wpływ niedokładność punktów osnowy oraz niedokładność realizacji lub pomiaru elementów geodezyjnych podczas tyczenia lub inwentaryzacji.
W przypadku braku obserwacji nadliczbowych wpływy błędów osnowy i czynności pomiarowych są względem siebie niezależne, zatem można je zapisać zależnością:

$$m_e^2 = m_{ep}^2 + m_{ef}^2,$$

gdzie:

m_e - średni błąd wyznaczenia typowego elementu e,

m_{ep} - średni błąd elementu e z tytułu niedokładności czynności pomiarowych,

m_{ef} - średni błąd elementu e z tytułu niedokładności wyznaczenia punktów osnowy.

Przedstawione w pracy rozważania miały na celu określenie błędu m_{ep} dla metody wcięć liniowych.

Wzory (2.8) - (2.9) i (3.10) - (3.11) umożliwiają ustalenie wpływu błędów czynności pomiarowych na długość i kierunek odcinka wyznaczonego metodą wcięć liniowych.

LITERATURA

[1] Czaja J., Gmyrek J.: Optymalna koncepcja płaskich osnów oraz pomiarów realizacyjnych lub inwentaryzacyjnych. Geodezja i Kartografia. Rocznik XXV 1976, nr 4.

[2] Hausbrandt S.: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. PPWK Warszawa 1970.

[3] Odlanicki Poczobutt M.: Geodezja. PPWK Warszawa 1974.

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РАЗБИВКИ СПОСОБОМ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ

Р е з ю м е

В работе подан вывод точных формул расчета погрешности длины и направления отрезка, определенного двумя точками, полученными в результате разбивки способом линейной засечки. В формулах принято во внимание влияние погрешности разбивочных измерений без учета влияния погрешности пунктов реализационной сети.

LINES INTERSECTION SETTING OUT ACCURACY ESTIMATION

S u m m a r y

The paper presents the derivation of exact formulas of linear and angular errors of measuring lengths determined by two points set out by means of lines intersection.

The presented formulas account for the errors of setting out measurements, including the influence of errors of the realization network points.