ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria : AUTOMATYKA z. 89 Nr kol. 916

STANISŁAW WĘGLARCZYK
INSTYTUT INŻYNIERII I GOSPODARKI WODNEJ
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

SYMULACYJNY MODEL CZASOPRZESTRZENNEGO PRZEBIEGU OPADU

Streszczenie. Przedstawiono czasoprzestrzenny model opadu przesuwającego się z zadaną prędkością nad zadanym obszarem. Model zachowuje czasową strukturę opadu rzeczywistego w każdym punkcie obszaru. Własności przestrzenne uwzględniono przez założenie eksponencjalnej funkcji korelacyjnej pomiędzy całkowitymi wysokościami opadów punktowych. Model umożliwia generowanie z zadanym krokiem czasowym albo przyrostów wysokości opadu w zadanych punktach, albo przyrostów uśrednionych na prostokątnych podobszarach dyskretyzacji zadanego obszaru.

1. Wstęp

Coraz intensywniejszy rozwój matematycznych modeli procesów hydrologicznych i systemów wodno-gospodarczych wymaga danych o coraz wyższej jakości. Jest bowiem rzeczą zrozumiałą, że użycie modelu o wysokiej jakości z danymi jakościowo gorszymi prowadzić może do mylących konkluzji [7], co nie zawsze jest w wystarczającym stopniu brane pod uwagę. Dotyczy to szczególnie modeli o parametrach rozłożonych, które żądają na wejściu wartości opadu w zadanych punktach. Istniejąca sieć pomiarowa opadów z reguły nie spełnia tych wymagań czy to ze względu na jakość dostarczanych danych, ich rozdzielczość czasowo-przestrzenną, czy też z powodu zbyt krótkich i niesynchronicznych ciągów pomiarowych. Z tego powodu istnieje wciąż pilna i niezaspokojona potrzeba tworzenia modeli opadu, które zachowując pewne rzeczywiste charakterystyki opadu, byłyby zdolne spełnić wymagania stawiane przez główny model, do którego wejściem jest opad.

Przedstawiona poniżej propozycja modelu czasoprzestrzennego przebiegu opadu nad zadanym obszarem jest pracą wykonaną w ramach programu CPBP Nr 03.09. "Metody analizy i użytkowania zasobów wodnych". Model zachowuje czasową korelację wewnątrzopadową we wszystkich żądanych punktach pola opadu. Przestrzenny związek wysokości opadu jest uwzględniony poprzez przestrzenną ciągłą funkcję korelacyjną całkowitych wysokości opadu w punktach pola.

2. Teoria

Pomimo pewnego determinizmu w procesach generujących opad deszczu [2], jest on (jako efekt tych procesów) zjawiskiem silnie losowym, toteż jego

analiza, poza najczęściej spotykanym podejściem "punktowym", jest rozpatrywana albo w kategoriach wielozmiennych modeli opadu (multivariate rainfall models, [3]), które rozważają opad jednocześnie w wielu punktach, albo wielowymiarowych modeli opadów (multidimensional rainfall models, [3]), czyli pól losowych [6], które opisują zjawisko we wszystkich punktach zadanego obszaru. W pracy przyjęto to drugie podejście.

2.1. Korelacja i widmo pola losowego

Załóżmy, że przestrzenne własności opadu dadzą się opisać przez izotropowe stacjonarne w szerszym sensie pole losowe [4,6] . Oznacza to, że funkcja korelacji tego pola zależy tylko od odległości pomiędzy dwoma ustalonymi, ale poza tym dowolnymi punktami obszaru. Postać tej funkcji musi być założona i najpowszechniejsza [1,3,4,6] jej forma wyraża się wzorem:

$$r(d) = \exp(-ad), \tag{1}$$

gdzie d jest odległością pomiędzy dwoma punktami pola, a współczynnik $a > 0$ - stałą empiryczną zależną w ogólności od typu rozpatrywanego zagadnienia.

W teorii pól losowych oprócz funkcji korelacyjnej bardzo ważną rolę odgrywa pojęcie widma (spektrum) procesu, gdyż obie te wielkości są ze sobą związane transformatą Fouriera (twierdzenie Chinczyna) [4,5,6] . W ogólnym przypadku dla dwuwymiarowego izotropowego pola losowego można związek ten opisać równaniem:

$$r(\Delta \underline{u}) = E\left\{\cos(\Delta \underline{u}\cdot \underline{W})\right\}, \tag{2}$$

gdzie $\Delta \underline{u} = (\Delta x, \Delta y)$ jest wektorem łączącym dwa dowolne punkty pola, zaś E jest operatorem uśredniania w przestrzeni dwuwymiarowej zmiennej losowej $\underline{W}$. Wyrażenie $\Delta \underline{u}\cdot \underline{W}$ oznacza zwykły iloczyn skalarny wektorów. Zmienna $\underline{W}$ może być opisana dystrybuantą spektralną $F(\underline{w})$ lub spektralną funkcją gęstości $f(\underline{w})$. W przypadku izotropowym wektor $\underline{W}$ jest także izotropowy i może być przedstawiony jako iloczyn dwu niezależnych zmiennych losowych:

$$\underline{W} = \hat{\underline{W}} W \tag{3}$$

$\hat{\underline{W}}$ jest tutaj jednostkowym wektorem (wersorem) losowym, a $W = |\underline{W}|$. Ponieważ izotropowość pociąga za sobą również relację

$$r(\Delta \underline{u}) = r(d) \quad , \quad d = |\Delta \underline{u}| \tag{4}$$

to równanie (2) przyjmie teraz postać:

$$r(d) = E\left\{\cos(\Delta \underline{u}\cdot \hat{\underline{W}} W)\right\} \tag{5}$$

Dystrybuanta spektralna zmiennej W, F(w), nosi nazwę radialnej dystrybuanty spektralnej i dla założonej postaci (1) funkcji korelacyjnej ma postać [4] :

$$F(w) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (w/a)^2}} \quad , \quad w \geqslant 0 \tag{6}$$

Własności losowe izotropowego wersora $\hat{\underline{W}}$ są bardzo proste - jest on równomiernie rozłożony na okręgu jednostkowym. W związku z tym można go sparametryzować następująco:

$$\hat{\underline{W}} = (\cos\emptyset, \sin\emptyset), \tag{7}$$

gdzie $\emptyset$ jest losowym kątem o rozkładzie równomiernym na przedziale $(0, 2\pi)$.

2.2. Generator pola losowego

Podstawą utworzenia generatora pola losowego o zadanej strukturze korelacyjnej jest proces

$$\epsilon(t) = \sqrt{2}\cos(Wt + \theta), \tag{8}$$

gdzie t jest parametrem, W - zmienną losową o dystrybuancie (spektralnej) F(w), a θ - zmienną losową o rozkładzie równomiernym na przedziale $(0, 2\pi)$. Zmienne W i θ są niezależne. Wartość średnia tego procesu jest zerem, wariancja - jedynką, a funkcja korelacji jest analogiczna do (5) i równa $E\left\{\cos W\Delta t\right\}$ [4,5] . Proces ten nie jest jednak ergodyczny, dlatego w pracy [4] zmodyfikowano (8) do postaci:

$$\epsilon(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N} \cos(W_i t + \theta_i) \tag{9}$$

Zmienne W_i i θ_i podlegają tym samym rozkładom jak W i θ w (8). Proces jest teraz asymptotycznie ergodyczny i, dodatkowo, asymptotycznie gaussowski.

Własności powyższe są zachowane również w przypadku pola losowego

$$\epsilon(\underline{u}) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N} \cos(\underline{u} \cdot \hat{\underline{W}}_i W_i + \theta_i), \tag{10}$$

gdzie $\underline{u} = (x,y)$, $\hat{\underline{W}}_i$ jest wersorem równorozłożonym na jednostkowym okręgu, W_i ma radialną dystrybuantę spektralną F(w) odpowiadającą izotropowej funkcji korelacji r(d), a θ_i jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym na $(0, 2\pi)$. Bardzo istotną rzeczą tutaj jest fakt, że wszystkie powyższe zmienne, tj. $\hat{\underline{W}}_i$, W_i i θ_i są wzajemnie niezależne.

2.3. Generator obszarami uśrednionego pola losowego

W przypadku, kiedy rozważany obszar jest dyskretyzowany dla potrzeb modelu o parametrach rozłożonych, np. modelu opad-odpływ, wtedy zamiast punktowych wartości opadu, żądane są wartości opadu uśrednione na podobszarach dyskretyzacji. Uwzględniono ten fakt w pracy [3], zakładając, że końce wektora łączącego punkty należące do różnych podobszarów mają rozkłady niezależne i równomierne na swoich podobszarach. Jak dalej wykazano, prowadzi to do zmiany wariancji procesu i zwiększenia korelacji pomiędzy uśrednionymi opadami. Wzór (10) przyjmuje teraz postać:

$$\epsilon(\underline{u}) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_A(W_i \hat{\underline{W}}_i) \left[\cos(\underline{u} \cdot \hat{\underline{W}}_i) W_i + \theta_i\right] \tag{11}$$

gdzie współczynnik $\lambda_A(\underline{s})$, $\underline{s} = (s_x, s_y)$ zależy od kształtu i wielkości podobszarów i dla prostokąta o wymiarach $l_x \times l_y$ ma postać:

$$\lambda_A(\underline{s}) = \frac{4}{l_x l_y s_x s_y} \sin\left(\frac{1}{2} s_x l_x\right) \sin\left(\frac{1}{2} s_y l_y\right) \tag{12}$$

3. Model

Proponowany model czasoprzestrzennego przebiegu opadu oparty jest w swojej czasowej części na pracy [8], w której opisano 6-parametrowy model pozwalający generować zdyskretyzowane krzywe sumowe opadu punktowego, $h_k^* = h^*(t_k)$, $0 \leq t_k \leq 1$, $0 \leq h^*(t_k) \leq 1$, $k = 1,2,\ldots,m$, gdzie m jest ilością przedziałów dyskretyzujących bezwymiarowy czas t^*, $0 \leq t^* \leq 1$. Działanie tego submodelu można opisać następującym algorytmem:

$$y_1 = m_1 + \epsilon_1 s_1 \tag{13a}$$

$$y_k = m_k + \frac{r_{k,k-1} s_k}{s_{k-1}} (y_{k-1} - m_{k-1}) + \epsilon_k s_k \sqrt{1 - r_{k,k-1}^2} \tag{13b}$$

$$(k = 2,3,\ldots,m-1)$$

$$z_k = \frac{1}{1 + \exp(-y_k)}, \quad k = 1,2,\ldots,m-1, \quad (z_m = 1) \tag{14}$$

$$h_k^* = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - z_i), \quad k = 1,2,\ldots,m \tag{15}$$

Symbol ϵ_i, $i = 1,2,\ldots,m-1$ oznacza liczby losowe ze standaryzowanego

rozkładu normalnego Nrm(0,1), a średnie m_k, odchylenia standardowe s_k, $k = 1,2,\ldots,m-1$ oraz współczynniki korelacji $r_{k,k-1}$, $k = 2,3,\ldots,m-1$ są liczone wzorami:

$$m_k = a_m \ln k + b_m \tag{16a}$$

$$s_k = a_s k + b_s \tag{16b}$$

$$r_{k,k-1} = a_r k^2 + b_r \tag{16c}$$

Uruchomienie generatora wymaga tylko znajomości parametrów a_i, b_i, $i = m, s, r$ we wzorach (16), a następnie zastosowania wzorów (13) - (15), aby w wyniku otrzymać ciąg bezwymiarowych wartości krzywej sumowej h_k^*, $k = 1, 2,\ldots,m$.

Własności przestrzenne pola opadu są uwzględnione przez założenie korelacji o postaci (1) pomiędzy całkowitymi wysokościami opadu. Pozwala to wykorzystać równość (10) lub (11) i wygenerować pole całkowitych wysokości opadu $H(\underline{u})$:

$$H(\underline{u}) = m_H + \epsilon(\underline{u})\, s_H, \tag{17}$$

gdzie m_H i s_H są założonymi wartościami odpowiednio średniej całkowitej wysokości opadu na danym obszarze i jej odchylenia standardowego.

Algorytm generowania czasoprzestrzennego pola opadu obejmuje następujące kroki. Dla każdego żądanego punktu $\underline{u}$

1) wygenerować wzorami (13) - (15) czasowy bezwymiarowy rozkład h_k^*, $k = 1,2,\ldots,m$;
2) dla ustalonej liczby $N > 50$ [1] wygenerować liczbę losową $\epsilon(\underline{u})$ (wzór (10) lub (11)), czyli dla każdego i, $i = 1,2,\ldots,N$:
   a) wylosować z przedziału $(0,2\pi)$ liczby ϕ_i i θ_i,
   b) z przedziału (0,1) wylosować liczbę losową F_i i znaleźć za pomocą wzoru (18) liczbę losową w_i spełniającą równanie (6):

$$w_i = a\sqrt{(1 - F_i)^{-2} - 1} \tag{18}$$

   c) dla znalezionych liczb losowych θ_i, w_i oraz $\hat{\underline{w}}_i = (\cos\phi_i, \sin\phi_i)$ policzyć wartość wyrażenia stojącego za znakiem sumy w (10) lub (11);
3) obliczyć wzorem (17) całkowitą wysokość opadu $H(\underline{u})$ w punkcie $\underline{u}$;
4) mając zadany czas trwania opadu T w punkcie $\underline{u}$, wartość $H(\underline{u})$ oraz rozkład h_k^*, obliczyć krzywą sumową opadu w danym punkcie

$$h_{\underline{u}}(t_k) = h_{\underline{u}}(t_k^* \cdot T) = H(\underline{u}) \cdot h^*(t_k^*) \qquad (k = 1,2,\ldots,m) \tag{19}$$

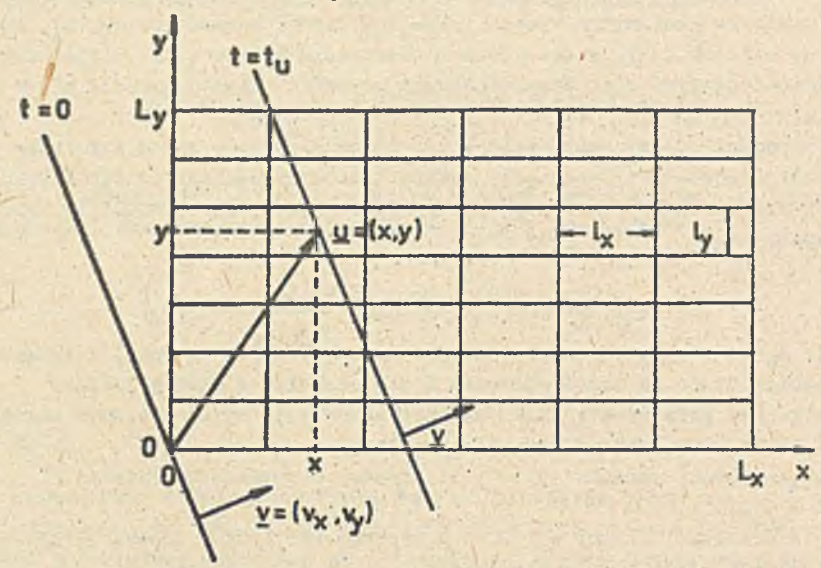
Krzywą tę można przedstawić w postaci ciągłej, np. poprzez interpolację liniową łamanej $h_{\underline{u}}(t_k)$ pomiędzy punktami t_k. Wtedy dla $t_k \leq t \leq t_{k+1}$,

$k = 0,1,2,\ldots,m-1 \quad (h_0 = 0)$

$$h_{\underline{u}}(t) = h_k + \frac{h_{k+1} - h_k}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k) \tag{20}$$

Dla $t \leqslant 0$ $h_{\underline{u}}(t) = 0$, natomiast jeśli $t \geqslant t_m = T$, to $h_{\underline{u}}(t) = H(\underline{u})$.

Wygenerowany w ten sposób opad przechodzi nad zadanym obszarem ze średnią prędkością $\underline{v} = (v_x, v_y)$ (rys. 1). Jeśli opad rozpoczyna się w mo-



Rys. 1. Schematyzacja obszaru oraz położenia czoła opadu w dwu chwilach czasowych

mencie nasuwania się nad obszar zlewni, to związek pomiędzy (19) a opadem $h_A(\underline{u},t)$ w danym punkcie $\underline{u}$ w chwili t będzie miał postać:

$$h_A(\underline{u},t) = h_{\underline{u}}(t - t_u), \tag{21}$$

gdzie t_u wyraża się wzorem:

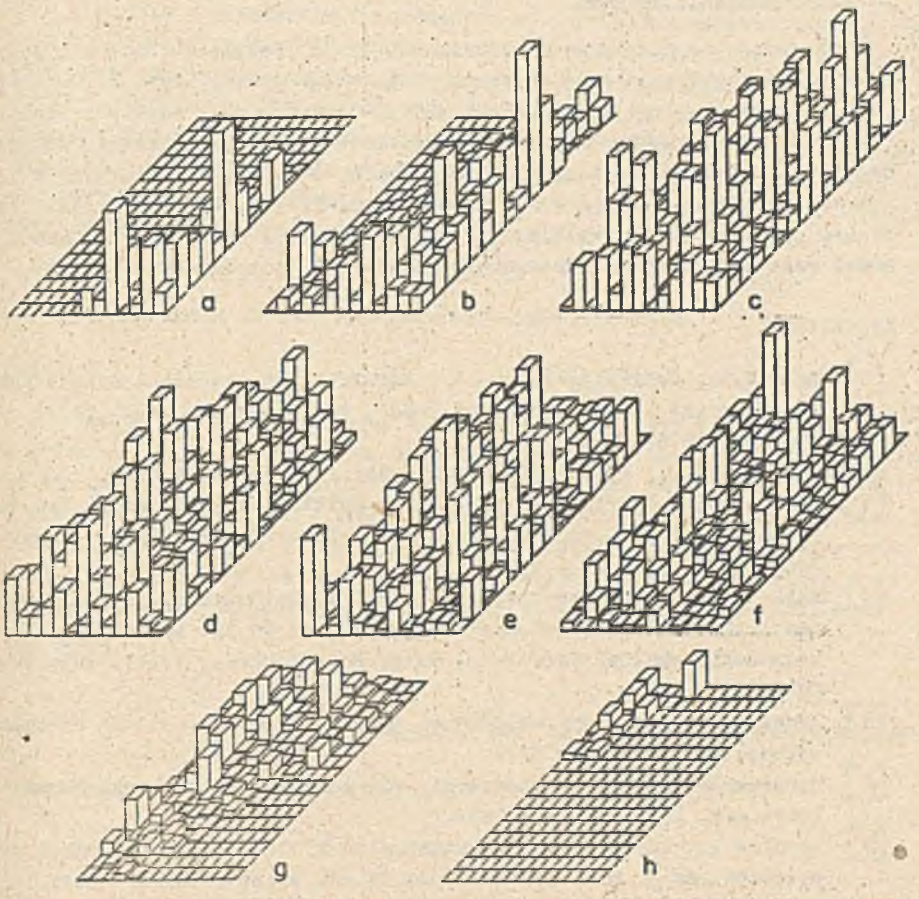
$$t_u = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{v^2} \tag{22}$$

i jest czasem pokonania przez czoło opadu odległości $\underline{u} \cdot \underline{v}/v$ z prędkością $v = |\underline{v}|$. Równania (20), (21) i (22) pozwalają w łatwy sposób dyskretyzować czasowo pole (21) z zadanym krokiem Δt, dając na wyjściu pole przyrostów opadu $\Delta h_A(\underline{u},t)$

$$\Delta h_A(\underline{u},t) = h_A(\underline{u},t) - h_A(\underline{u},t - \Delta t) \tag{23}$$

4. Przykład

Aby zilustrować działanie modelu, przeprowadzono symulację numeryczną na obszarze o wymiarach $L_x = 16$ km, $L_y = 20$ km, zdyskretyzowanego prostokątami $l_x \times l_y = 1.25 \times 1.25$ km. Zadany czas trwania opadu był identyczny



Rys. 2. Przykładowa symulacja czasoprzestrzennego przebiegu opadu ($m_H = 30$ mm, $\sigma_H = 7.5$ mm, $T = 3$ h, $\Delta t = 0.5$ h)

w każdym punkcie i wynosił $T = 3$ h. Prędkość przesuwania się opadu była stała i wynosiła $\underline{v} = (15,10)$ km, a parametry m_H i σ_H równania (17) były równe odpowiednio 30 mm i 7.5 mm. Założona ilość N harmonik w równaniu (11) wynosiła 100, a wartość parametru m (równania (13) - (15)) była równa 10 [8]. Potrzebne dla wzorów (13) - (15) parametry aproksymat (16) miały następujące wartości: $a_m = 1.6495$, $b_m = -3.3133$, $a_\sigma = -0.1005$, $b_\sigma = 1.5427$, $a_r = -0.00567$, $b_r = 0.7184$. Wartość współczynnika a określającego szybkość rozpadu korelacji (1) była przyjęta za [1] i wynosiła 0.094 1/km.

Wyniki symulacji z podanymi wyżej wartościami parametrów, podane w wartościach przyrostów opadu (23) próbkowanych co $\Delta t = 0.5$ h, są pokazane na rys. 2. Przy założonym wektorze prędkości i punktowym czasie trwania opadu T czas przebywania opadu w zadanym obszarze wynosi 4.37 h.

5. Podsumowanie i wnioski

Zaproponowano czasoprzestrzenny model opadu. Założenia leżące u jego podstaw są realistyczne, a uzyskane przykładowe wyniki (rys. 2) sugerują jego poprawność. Jest on dodatkowo łatwy w komputerowym użyciu i jasny w swoich sformułowaniach. Jednocześnie szersze jego zastosowanie wymaga badań empirycznych, szczególnie jeśli chodzi o funkcję korelacyjną i jej zależność od typu opadu i czasu próbkowania. Przy założonej postaci rozkładów prawdopodobieństwa czasu pomiędzy opadami i czasu trwania opadu, model może być użyty do generowania opadów w dłuższych okresach.

LITERATURA

[1] Bras R.L., Rodríguez-Iturbe I., Rainfall generation: A nonstationary time-varying multidimensional model, Water Resour. Res., 12(3), 450-456, 1976.

[2] Eagleson P.S., Hydrologia dynamiczna, PWN, Warszawa 1978.

[3] Lenton L.L., Rodríguez-Iturbe I., A multidimensional model for the synthesis of processes of areal rainfall averages, Water Resour. Res., 13(3), 605-612, 1977.

[4] Mejía J.M., Rodríguez-Iturbe I., On the synthesis of random field sampling from the spectrum: An application to the generation of hydrologic spatial processes, Water Resour. Res., 10(4), 705-711, 1974.

[5] Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 1972.

[6] Szczepankiewicz E., Zastosowanie pól losowych, Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa 1985.

[7] Waymire E., Gupta V.K., The mathematical structure of rainfall representation 3. Some applications of the point process theory to rainfall processes, Water Resour. Res., 17(5), 1287-1294, 1981.

[8] Węglarczyk S., Stochastyczny model bezwymiarowego opadu punktowego, Materiały V Konferencji "Sterowanie Systemem Wodno-Gospodarczym", 15-17.06.1987, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, 1987.

СИМУЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО- ВРЕМЕННОГО ПРОТЕКАНИЯ ОСАДКОВ

Р е з ю м е

В статье представлена пространственно- временная модель осадков, проходящих над заданной территорией с заданной скоростью. Модель сохраняет временную структуру осадков в каждой точке территории. Пространственные свойства были принятыво внимание через предположение экспоненциальной функции между полными слоями точечных осадков. Модель делает возможным генерировать с заданным временным шагом или приращения слоёв осадков в заданных точках или-же приращения усреднённые на прямоулогьных частных территориях дискретизации заданной территории.

A SIMULATION MODEL OF SPATIAL-TEMPORAL RAINFALL COURSE

Summary

A spatial-temporal model of a rainfall moring over a given area with a given velocity is presented. The model preserves the temporal structure of the rainfall at each point of the area. Spatial characteristics are taken into account by assuming an exponential correlation function of total depths of point rainfall. The model makes possible generating with a given time step either rainfall depth increments at given points or the increments averaged over rectangular subareas of discretization of the area.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Janusz PIOTROWSKI

Wpłynęło do Redakcji 13.06.1987 r.