

RYSZARD KLEMPOUS  
JERZY KOTOWSKI  
MIECZYSLAW KULISZEWSKI

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKA WROCLAWSKA

#### GRADIENTOWE PROCEDURY IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW SIECI WODOCIĄGOWYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodę identyfikacji oporności hydraulicznych odcinków sieci wodociągowej. Identyfikacji dokonuje się na podstawie danych pomiarowych z obiektu rzeczywistego. Algorytm obliczeniowy jest gradientową procedurą optymalizacji. Pokazano analityczną metodę wyznaczania jacobianu przekształcenia określającego związek pomiędzy wektorem oporności a wektorem przepływów. Przedstawiono również opis programu obliczeniowego, wyniki badań testowych oraz plan dalszych prac w tym zakresie.

#### 1. WSTĘP

Dokładna znajomość parametrów sieci wodociągowych, a w szczególności oporności poszczególnych odcinków rurociągów, jest niezbędna przy formułowaniu i rozwiązywaniu zadań optymalnego sterowania jej pracą, wykrywaniu awarii itp. Teoretyczne zależności służące do wyznaczania tych wartości mają charakter przybliżony, nie uwzględniający szeregu dodatkowych czynników, takich jak wpływ punktów pomiarowych, zasuw regulacyjnych itp. Jednocześnie w wielu sieciach przemysłowych, na przykład rozprzadzania wód poflotacyjnych, oporności hydrauliczne zmieniają się w czasie z powodu zmian współczynnika chropowatości związanych z osadzaniem się zanieczyszczeń.

Proponuje się więc przeprowadzanie okresowej identyfikacji tych parametrów wykorzystującej pomiary przepływów i ciśnień w systemie. W pracy zostanie przedstawiony opis takiej procedury identyfikacyjnej opartej na znajomości gradientu kryterium jakości identyfikacji [4].

#### 2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA IDENTYFIKACJI

Rozważa się sieć wodociągową o "n" łukach oraz "w" węzłach. Przyjmuje się również, że teren, na którym znajduje się identyfikowany obiekt, jest płaski lub też, że znane są z wystarczającą dokładnością wysokości położenia wszystkich węzłów.

Niech  $K \in R^n$  będzie wektorem poszukiwanych oporności łuków sieci a "m" liczbą pomiarów przeprowadzonych na potrzeby identyfikacji.

Niech  $\delta^j \in R^m$ ;  $j = \overline{1, m}$  będzie wektorem poborów wody przez odbiorców zmierzonych w trakcie  $j$ -tego pomiaru. W trakcie przeprowadzania każdego eksperymentu identyfikacyjnego mierzone są wartości ciśnień  $\bar{x}^j$  w  $p+1$  punktach sieci oraz wartości przepływów  $\bar{y}^j$  w "r" rurociągach. Zadanie identyfikacji formułuje się następująco: wyznaczyć takie  $k \in R^n$ , dla którego

$$Q(k) = Q_1(k) + Q_2(k) \rightarrow \min \quad /1/$$

gdzie:

$$Q_1(k) = \sum_{j=1}^m \left\| y^j(k) - \bar{y}^j \right\|_r^2 \quad /2/$$

$$Q_2(k) = \sum_{j=1}^m \left\| Ex^j(k) - \bar{x}_0^j \right\|_p^2 \quad /3/$$

$\left\| \cdot \right\|_r$  i  $\left\| \cdot \right\|_p$  są normami euklidesowymi odpowiednio w przestrzeniach  $R^r$  i  $R^p$ .

We wzorze /3/  $\bar{x}_0^j$  oznacza wektor spadków ciśnień pomiędzy wybranym węzłem odniesienia a pozostałymi "p" węzłami. Wektor ten oblicza się na podstawie pomiarów ciśnień w  $j$ -tym eksperymencie. E jest macierzą o elementach 0, 1, -1 tak dobraną aby kolejne elementy wektora  $Ex^j(k)$  były równe sumarycznemu spadkowi ciśnienia na drodze łączącej węzeł odniesienia z węzłami, w których dokonuje się pomiarów ciśnień. Wektory  $y^j(k), x^j(k) \in R^n$  oznaczają przepływy i spadki ciśnień w łukach sieci uzyskane w wyniku symulacji modelu sieci dla założonego wektora oporności "k" oraz wektora poborów wody przez odbiorców  $\delta^j$ .

$\left\| \cdot \right\|_r$  w kryterium /2/ można wyrazić w wygodnej postaci

$$\left\| v \right\|_r^2 = v^T R v \quad /4/$$

gdzie R jest macierzą diagonalną  $n \times n$  o wartościach na głównej przekątnej 0 lub 1;  $r_{11} = 1$  jeżeli dokonywano pomiaru przepływu w  $i$ -tym łuku sieci.

### 3. MODEL MATEMATYCZNY SIECI WODOCIĄGOWEJ

Pełny układ równań pozwalających wyznaczyć wektory przepływów i spadków ciśnień  $y, x \in R^n$  na, dla sieci położonej na płaskim terenie, postać

$$Ay = \delta \quad /5/$$

$$Bx = 0 \quad /6/$$

$$x_1 = k_1 y_1^2 \cdot \operatorname{sgn} y_1 \quad i = \overline{1, n}. \quad /7/$$

Układy równań /5/ i /6/ są formalnym zapisem I i II prawa Kirchhoffa.

A jest macierzą incydencji a B macierzą oczkową. Wzór /7/ określa związek pomiędzy spadkiem ciśnienia w pojedynczym łuku a strumieniem i jest znany pod nazwą prawa Bernoulli'ego [2,3]. Wprowadzając oznaczenie

$$K(k, y) = \operatorname{diag}\{k_1 y_1 \cdot \operatorname{sgn} y_1; i = \overline{1, n}\} \quad /8/$$

można zapisać /7/ jako

$$x = K(k, y)y. \quad /9/$$

Podstawiając /9/ do /6/ uzyskuje się ostatecznie model symulacyjny sieci wodociągowej w postaci

$$Ay = b' \quad /10/$$

$$BK(k, y)y = 0. \quad /11/$$

Zapis /9/ będzie bardzo wygodny do dalszych rozważań. W szczególności, gdy  $y = y(t)$ , można zauważyć, że zachodzi

$$\dot{x} = 2 \cdot K(k, y)\dot{y}. \quad /12/$$

W pracy [2] pokazano, że rozwiązanie układu równań /10/ - /11/ jest równoważne rozwiązaniu statycznego zadania optymalizacji wypukłej

$$f(y) = \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \rightarrow \min \quad /13/$$

$$Ay = b \quad /14/$$

gdzie:

$$f_i(y_i) = x_i y_i = k_i y_i^3 \cdot \text{sgn } y_i. \quad /15/$$

Problem /13/ - /14/ można sprowadzić do zadania optymalizacji statycznej bez ograniczeń

$$g(z) \rightarrow \min \quad /16/$$

takiego, że [2]

$$\frac{\partial g}{\partial z} = B \frac{\partial f}{\partial y} = 3Bx = 3BK(k, y)y \quad /17/$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = BK(k, y)B^T \quad /18/$$

charakteryzującego się znacznie mniejszą liczbą zmiennych niż problem wejściowy.

#### 4. WYZNACZANIE JAKOBIANU

Podstawiając /4/ do /2/ oraz /9/ do /3/ uzyskuje się wygodne postacie funkcji kryterialnych

$$Q_1(k) = \sum_{j=1}^m (y^j(k) - \tilde{y}^j)^T R(y^j(k) - \tilde{y}^j) \quad /19/$$

$$Q_2(k) = \sum_{j=1}^m \left\| EBK(k, y^j(k))y^j(k) - \tilde{x}_0^j \right\|_p^2. \quad /20/$$

Można teraz zgodnie z regułami różniczkowania funkcji wielu zmiennych napisać

$$\frac{\partial Q_1}{\partial k} = 2 \cdot \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial y^j(k)}{\partial k} \right]^T \cdot R(y^j(k) - \tilde{y}^j) = \sum_{j=1}^m \tilde{q}_1^j(k) \quad /21/$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2}{\partial k} &= 2 \cdot \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial y^j(k)}{\partial k} \right]^T \cdot K(k, y^j(k)) B^T B^T (EBK(k, y^j(k)) y^j(k) - \tilde{x}_0^j) = \\ &= \sum_{j=1}^m \tilde{q}_2^j(k). \end{aligned} \quad /22/$$

W obu przypadkach wyznaczenie gradientów funkcji  $Q_1(k)$  i  $Q_2(k)$  wymaga znajomości jacobianu przekształcenia  $y = y(k)$ . Zostanie teraz opisana metoda jego wyznaczania.

W metodzie tej zakłada się wpraw, że oporności hydrauliczne "k" zmieniają się zgodnie z wzorem

$$k(t) = k + td \quad /23/$$

gdzie  $d \in \mathbb{R}^n$  jest pewnym wektorem o ustalonych składowych. Zmieniającymi się wartościami parametru  $t \in \mathbb{R}^1$  odpowiadają rozwiązania  $y = y(t)$  układu równań /10/ - /11/:

$$Ay(t) = b \quad /24/$$

$$BK(k + td, y(t)) y(t) = 0. \quad /25/$$

Różniczkując stronami /24/ - /25/ względem zmiennej "t" otrzymuje się zgodnie z /12/

$$A\dot{y} = 0 \quad /26/$$

$$B(K(d, y)y + 2K(k + td, y)\dot{y}) = 0. \quad /27/$$

Po podstawieniu  $t=0$  układ równań /26/ - /27/ można rozwiązać względem  $\dot{y}(0)$  otrzymując

$$\dot{y}(0) = -\frac{1}{2} B^T (BK(k, y) B^T)^{-1} \cdot BK(d, y) y. \quad /28/$$

Ponieważ  $\dot{y}(0)$  jest różniczką Gateaux operatora  $y = y(k)$  zachodzi [5]

$$\dot{y}(0) = \left( \frac{\partial y}{\partial k}, d \right). \quad /29/$$

Dodatkowo, na podstawie /8/

$$K(d, y) \cdot y = K(y, y) d. \quad /30/$$

Stąd otrzymuje się

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial k} \right]^T = -\frac{1}{2} B^T (BK(k, y) B^T)^{-1} \cdot BK(y, y). \quad /31/$$

### 5. ALGORYTM WYZNACZANIA GRADIENTU WSKAŹNIKA JAKOŚCI IDENTYFIKACJI

Mając na uwadze poprzednie rezultaty, algorytm wyznaczania gradientu funkcji  $Q(k)$  w punkcie  $k \in R^n$  można ująć w następującej formie:

#### Krok 1

Podstawić  $j=1$  i  $\frac{\partial Q}{\partial k} = 0$ .

#### Krok 2

Dokonać, zgodnie z /5/ - /7/ lub /16/, symulacji sieci wodociągowej dla  $\sigma = \sigma^j$ .

#### Krok 3

Wyznaczyć jacobian przekształcenia  $\frac{\partial v^j(k)}{\partial k}$  zgodnie z /31/.

#### Krok 4

Wyznaczyć  $q_1^j(k)$  i  $q_2^j(k)$  zgodnie z /21/ i /22/. Dokonać podstawienia

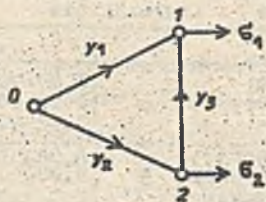
$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{\partial Q}{\partial k} + q_1^j(k) + q_2^j(k) \quad /32/$$

#### Krok 5

Podstawić  $j=j+1$ . Jeżeli  $j > m$  to koniec obliczeń. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 2.

Powyższy schemat postępowania wykorzystano przy opracowywaniu algorytmu rozwiązywania zadania identyfikacji /1/. Wyboru kierunku poprawy dokonywano na bazie algorytmu Fletchera - Reevesa [1]. Przy wyznaczaniu minimum w kierunku poszukiwano się procedurą gradientową z aproksymacją pochodnej kierunkowej funkcją kwadratową.

### 6. WYNIKI BADAŃ TESTOWYCH



Rys.1. Schemat sieci wodociągowej

Dla prostego przykładu z rys.1 przeprowadzono szereg testów mających na celu weryfikację zaproponowanej metody identyfikacji. Jakobian przekształcenia  $y = y(k)$  uzyskany na podstawie /31/ wyraża się w tym przypadku wzorem

$$\frac{\partial y}{\partial k} = - \frac{1}{2 \sum_{i=1}^3 k_i y_i \cdot \operatorname{sgn} y_i} \begin{bmatrix} y_1 \cdot \operatorname{sgn} y_1 & -y_1 \cdot \operatorname{sgn} y_1 & -y_1 \cdot \operatorname{sgn} y_1 \\ -y_2 \cdot \operatorname{sgn} y_2 & y_2 \cdot \operatorname{sgn} y_2 & y_2 \cdot \operatorname{sgn} y_2 \\ -y_3 \cdot \operatorname{sgn} y_3 & y_3 \cdot \operatorname{sgn} y_3 & y_3 \cdot \operatorname{sgn} y_3 \end{bmatrix} /33/$$

Ważną uwagą jest, że nawet wieloletnie powtarzanie pomiarów w niektórych łukach dużych sieci i ciśnieniach w nielicznych węzłach często prowadzi do rozwiązań niejednoznacznych, należy baczną uwagę poświęcić prawidłowemu rozlokowaniu punktów pomiarowych. Z tego względu dla sieci z rys.1 przyjęto trzy sposoby zbierania danych pomiarowych

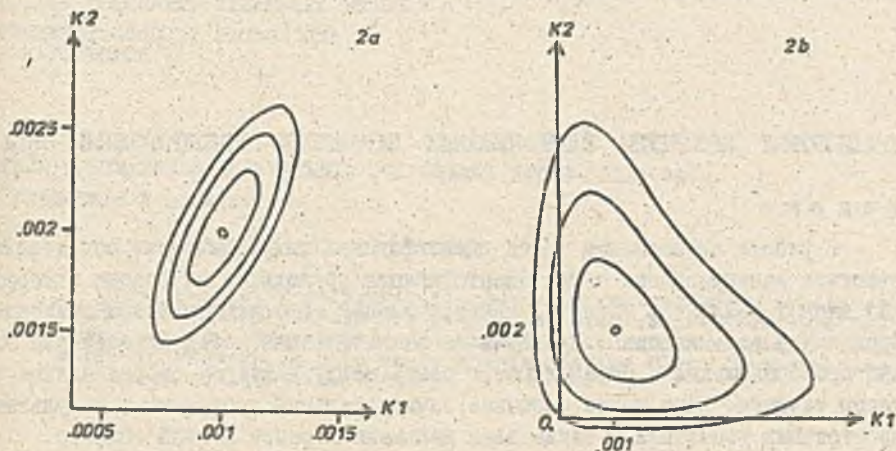
- pomiar przepływu  $y_1$  z jednoczesnym pomiarem spadku ciśnienia w tym łuku dla różnych poborów  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$  /wariant I/,
- pomiar ciśnieni we wszystkich węzłach /wariant II/,
- pomiar jedynie spadku ciśnienia w łuku  $y_1$  /wariant III/.

Dane wejściowe dla problemu uzyskano z zasymulowanej sieci, w której przyjęto  $k_1=0.001$ ,  $k_2=0.002$ ,  $k_3=0.03$ . Dokonano  $m=50$  serii pomiarowych losując potrzeby  $\zeta_1, \zeta_2$  z przedziału  $[0,100]$ . Następnie startując z różnych punktów początkowych poszukiwano procedurą identyfikacyjną wartości tych parametrów. Badano liczbę iteracji, po której algorytm zadaną dokładnością, jednakową dla wszystkich wariantów, znajdował rozwiązanie. Badania przeprowadzono dla różnych wartości  $m$  /10,20,50/. Przykładowe wyniki dla  $m=10$  przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Punkt startowy	WARIANT I		WARIANT II		WARIANT III	
	Rozwiązanie	Liczba iteracji	Rozwiązanie	Liczba iteracji	Rozwiązanie	Liczba iteracji
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
0.001 0.001 0.03	0.001 0.002 0.03	10	0.001 0.0019999 0.03	6	0.0010001 0.0019996 0.0299811	6
0.0015 0.0025 0.03	0.00100007 0.00200002 0.0300005	10	0.00099998 0.00200005 0.029995	5	0.0009999 0.0020001 0.0300121	6
0.0006 0.001 0.025	0.00099995 0.0019998 0.029995	17	0.001003 0.001998 0.029994	21	0.001011 0.001936 0.028072	50

Jednocześnie uruchomiono program wykreślenia poziomice funkcji kryterialnej  $Q(k)$ . Przykładowe poziomice dla wariantu I zilustrowano na rys. 2a. Dla wariantu II poziomice funkcji kryterialnej układają się jak na rys. 2b.



Rys. 2. Przykładowe poziomice funkcji celu.

## 7. WNIOSKI KOŃCOWE

Przeprowadzone testy potwierdzają przydatność opracowanej metody wyznaczania jacobianu przekształcenia  $y = y(k)$  do identyfikacji parametrów sieci wodociągowej. Metoda kierunków sprzężonych Fletchera-Reevesa okazała się szczególnie efektywna w otoczeniu optimum. Liczba iteracji i czas obliczeń zależą w istotny sposób od postaci danych wejściowych a w szczególności od liczby i rozmieszczenia punktów pomiarowych oraz rodzaju mierzonych wartości.

Analiza postaci funkcji kryterialnej wykazuje, że nie jest ona wypukła w oddali od optimum. W związku z tym planuje się w najbliższym czasie poszukiwanie i badanie metod optymalizacji wykorzystujących specyficzne własności tej funkcji.

## 8. LITERATURA

1. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki; Metody obliczeniowe optymalizacji, BNi, Warszawa 1977.
2. R. Klempous, J. Kotowski, J. Nikodem, J. Ułasiewicz; Water Distribution Systems, Proceedings of the IFAC Symposium on Components, Instruments and Techniques for Low Cost Optimization and Applications ICA '86, Valencia, Spain, 1986.
3. R. Klempous, J. Kotowski, J. Ułasiewicz; Algorytm wyznaczania optymalnej strategii współdziałania zbiorników sieciowych z systemem wodociagowym, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Z. 69, 1983.

4. R.Klempous, J.Kotowski, M.Kuliszewski; Sensitivity Analysis of Simulation Problems in Water Distribution Network, European Congress on Simulation, Prague, CS, 1987.
5. D.G.Luenberger; Teoria optymalizacji, ENi, Warszawa 1974.

## ГРАДИЕНТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ

### Резюме

В работе представлен метод идентификации гидравлических сопротивлений участков водопроводной сети. Идентификация проводится на основе измерительных данных реального объекта. Вычислительный алгоритм является градиентной процедурой оптимизации. Представлен аналитический метод определения якобиана преобразования, определяющего связь между вектором сопротивления и вектором течения. Дано также описание вычислительной программы, результаты проверочных испытаний а также план дальнейших работ в этой области.

## A GRADIENT IDENTIFICATION PROCEDURE OF THE HYDRAULIC NETWORK PARAMETERS

### Summary

In the paper a method of hydraulic resistance identification in a hydraulic network is presented. The identification is based on the measurement data received from the real object /system/.

The algorithm is based on the gradient optimization technique. The analytical method of determination of the Jacobi matrix of the transformation of hydraulic resistance vector and flow vector, is shown.

The description of the computer program and our future plans are also presented. Many test problems have been run with this algorithm the results of which are also presented.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Janusz PIOTROWSKI

Wpłynęło do Redakcji 20.06.1987 r.