

STANISŁAW WĘGLARCZYK  
INSTYTUT INŻYNIERII I GOSPODARKI WODNEJ  
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

### STOCHASTYCZNY MODEL BEZWYMIAROWEGO OPADU PUNKTOWEGO

**Streszczenie.** Zaproponowano prosty model oparty na 10-elementowej reprezentacji bezwymiarowej krzywej sumowej opadu, utworzonej przez podział bezwymiarowego czasu trwania opadu na 10 równych części. Na tej podstawie utworzono przeskalowane przyrosty opadu  $Z_1, Z_2, \dots, Z_9, (Z_{10}=1)$ , z których poprzez transformację  $Y = \ln Z/(1-Z)$  utworzono ciąg  $Y_1, Y_2, \dots, Y_9$  będący z założenia niejednorodnym ciągiem Markowa pierwszego rzędu. Bezwarunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y_1$ , jak również warunkowe rozkłady zmiennych  $Y_2, \dots, Y_9$  są z założenia normalne. Tak utworzony 26-parametrowy model dobrze odzwierciedla rzeczywiste opady. Okazało się, że bez dużej straty dokładności modelu można zredukować ilość jego parametrów do 6. Na przykładzie 3 stacji pomiarowych stwierdzono stosunkowo małą zmienność przestrzenną parametrów modelu.

#### 1. Wstęp

W czasie ostatniego dwudziestolecia wraz z rozwojem modeli hydrologicznych istotnego znaczenia nabrał problem rozkładu czasowego opadu. Jest on bowiem ważny dla takich praktycznych zagadnień, jak transformacja opad-odpływ, wymiarowanie systemów kanalizacyjnych, transport zanieczyszczeń, infiltracja i wiele innych. Wymagania konkretnego zagadnienia i złożoność natury opadu powodują, że znalezienie odpowiedniego i jednocześnie możliwie ogólnego modelu opadu jest problemem dotychczas nie rozwiązany w stopniu zadowalającym. Potwierdza to duża ilość istniejących modeli, np. [1,5,6,7,9,10,12,13].

Podejściem dość często spotykanym (m.in. [4,5,12]) jest przedstawienie pojedynczego opadu w postaci bezwymiarowej przez standaryzację do jedności jego wysokości i czasu trwania, co daje "czysty" kształt poszczególnego opadu. Dalsza analiza, oparta na zbiorze opadów bezwymiarowych, prowadziła u tych autorów do konstrukcji średniego hietogramu oraz tzw. 10 % i 90 % hietogramów, przy założeniu braku zależności wewnątrz opadu. Założenie to, zwłaszcza dla krótkich przedziałów dyskretyzacji i krótkich czasów trwania opadu, jest zbyt uproszczeniem [2,7], toteż niektórzy autorzy, jak np. [7,13], wodelują zależność wewnątrzopadową na ogół przez przyjęcie markowości założonej reprezentacji opadu.

W niniejszej pracy, operując się na koncepcji przeskalowanych przyrostów opadu [12], utworzono 9-wymiarową reprezentację opadu, którą przetransformowano na nowy proces stochastyczny będący z założenia pro-

tym ciągiem Markowa o normalnych rozkładach prawdopodobieństwa. Na przykładzie trzech ciągów danych z trzech stacji opadowych badane są własności tego procesu, weryfikowane jest powyższe założenie oraz jakość powstającego generatora przebiegu opadu bezwymiarowego.

## 2. Model

Niech za Todorovicem i Yevjevichem, [11] zdarzenie opadowe będzie zdefiniowane jako "ciągły opad pomiędzy dwoma niedeszczowymi przedziałami, nawet jeśli całkowita ilość opadu i czas jego trwania będą bardzo małe". Niech dalej liczba

zdarzeń opadowych będzie równa  $N$  a  $i$ -ty opad ( $i=1,2, \dots, N$ ) będzie miał następujące charakterystyki:

- 1) wysokość całkowitą  $H_i$ , (mm),
- 2) czas trwania  $T_i$ , (min),
- 3) krzywą sumową  $h_i(t)$ , (mm), określoną w przedziale czasu  $\langle 0, t \rangle$ ,  $t \leq T_i$ ;  $0 \leq h_i(t) \leq H_i$ .

Teraz dla ustalonego i określmy bezwymiarowy czas  $t^*$

$$t^* = \frac{t}{T_i}, \quad t^* \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1)$$

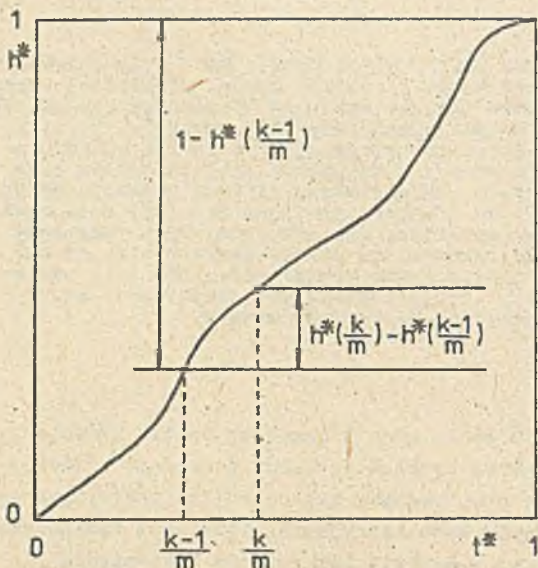
oraz bezwymiarową wysokość opadu  $h_1^*$  w chwili  $t^*$ :

$$h_1^*(t^*) = \begin{cases} \frac{h_i(t^* \cdot T_i)}{H_i} & 0 \leq t^* \leq 1 \\ 0 & t^* < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Aby zbadać proces  $h^*(t^*)$  będziemy badać jego reprezentację  $h^*(t_k^*)$  utworzoną przez próbkowanie procesu  $h^*(t^*)$  w  $m+1$  równocześnie punktach  $t_k^* = k/m$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  i zdefiniujemy przeskalowane przyrosty opadu

$$z_1\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{h_1^*\left(\frac{k}{m}\right) - h_1^*\left(\frac{k-1}{m}\right)}{1 - h_1^*\left(\frac{k-1}{m}\right)} \quad (3)$$

$$(k = 0, 1, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, N)$$



Rys. 1. Ilustracja koncepcji przeskalowanych przyrostów opadu

Sposób tworzenia przeskalowanych przyrostów jest zilustrowany na rys. 1. Ze wzoru (3) wynika, że  $z_1(0) = 0$ ,  $z_1(1) = 1$  oraz  $0 \leq z_1(k/m) \leq 1$ .

Bardzo łatwo można udowodnić, że związek odwrotny do (3), wyrażający  $h^*$  w zależności od  $z$  ma postać:

$$h_1^*\left(\frac{k}{m}\right) = 1 - \prod_{j=1}^k \left[1 - z_1\left(\frac{j}{m}\right)\right] \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

W wyniku operacji przeskalowania powstał  $(m-1)$ -wymiarowy zbiór zmiennych losowych  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-1}\}$ , który jest podstawą do utworzenia pochodnego procesu stochastycznego przetransformowanych przeskalowanych przyrostów opadu  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}\}$ , gdzie

$$Y_k = \ln \frac{z_k}{1-z_k} \quad (5)$$

Zakładamy, że ciąg ten jest niejednorodnym ciągiem Markowa pierwszego rzędu [8] o normalnych rozkładach prawdopodobieństwa

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) = f_1(y_1) \prod_{k=2}^{m-1} f_{k,k-1}(y_k | y_{k-1}), \quad (6)$$

gdzie

$$f_1(y_1) \hat{=} \text{Nrm}(\mu_1, \sigma_1) \quad (7a)$$

$$f_{k,k-1}(y_k | y_{k-1}) \hat{=} \text{Nrm}(\mu_{k,k-1}, \sigma_{k,k-1}, \rho_{k,k-1}) \quad (7b)$$

oraz ([3]):

$$\mu_{k,k-1} = \mu_k + \frac{\rho_{k,k-1} \sigma_k}{\sigma_{k-1}} (y_{k-1} - \mu_{k-1}) \quad (8a)$$

$$\sigma_{k,k-1}^2 = \sigma_k^2 (1 - \rho_{k,k-1}^2) \quad (8b)$$

Symbol  $\text{Nrm}(\mu, \sigma)$  oznacza tutaj funkcję gęstości jednowymiarowego rozkładu normalnego ze średnią  $\mu$  i wariancją  $\sigma^2$ , a  $\text{Nrm}(\mu, \sigma, \rho)$  - funkcję gęstości jednowymiarowego warunkowego rozkładu normalnego o średniej warunkowej  $\mu$ , warunkowej wariancji  $\sigma^2$  i współczynniku korelacji  $\rho$ . Wzory (6), (7) i (8) pozwalają w łatwy sposób generować realizacje procesu  $Y$  (np. [14]), a poprzez transformację odwrotną do (5) i wzór (4) - tworzyć zbiór kolejnych wartości bezwymiarowej krzywej sumowej opadu.

### 3. Dane

Zdarzenia opadowe wzięte do analizy pochodziły z zapisów pluwiograficznych zanotowanych w trzech stacjach meteorologicznych w Krakowie: w Ogrodzie Botanicznym (lata 1961-1975), Balicach (1966-1975) oraz Woli Justowskiej (1968-1975). Wszystkie dane pochodziły z okresu 1.V.-30.IX. i dotyczyły opadów o średnim natężeniu większym od 0.1 mm/min. Każdy opad był dyskretyzowany z rozdzielczością czasową lepszą niż 5 minut i wysokością lepszą niż 0.1 mm wysokości opadu. W sumie otrzymano 140 zdarzeń opadowych dla Ogródu Botanicznego, 84 - dla Balic i 65 - dla Woli Justowskiej. Czasy trwania opadu zawierały się w przedziale  $\langle 6, 186 \rangle$  minut, wysokości całkowite - w przedziale  $\langle 1.3, 66.2 \rangle$  mm. Maksymalne średnie natężenie miało wartość 1.01 mm/min.

### 4. Analiza i ocena modelu

Wszystkie opady z każdej stacji standaryzowano i następnie dla założonego  $m = 10$  tworzono przeskalowane przyrosty  $z_1(k/10)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ , które za pomocą (5) transformowano na wartości  $y_1(k/10)$ . Powstał w ten sposób ciąg zmiennych losowych  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_9\}$ , dla którego policzono estymaty parametrów rozkładu (6), tj.  $\mu_k = m_k$ ,  $\sigma_k = s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) i  $\rho_{k,k-1} = r_{k,k-1}$  ( $k = 2, 3, \dots, 9$ ). Przykładowe wartości tych estymat, jako funkcje  $k$ , wraz z 95 % przedziałami ufności, są pokazane na rys. 2 (stacja Ogród Botaniczny). Jakość dopasowania modelu do wartości rzeczywistych była testowana dla jednowymiarowych rozkładów brzegowych  $f_k(y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$  testem  $\chi^2$ , który na ogół na poziomie istotności 5% (w niektórych przypadkach - 1%) nie dawał podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności tych rozkładów. Testowano również istotność współczynnika korelacji  $\rho_{k,k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, 9$  [15] i dla większości przypadków na poziomie istotności 1% (a dla pozostałych przypadków - 5%) można było przyjąć, że jest on różny od zera.

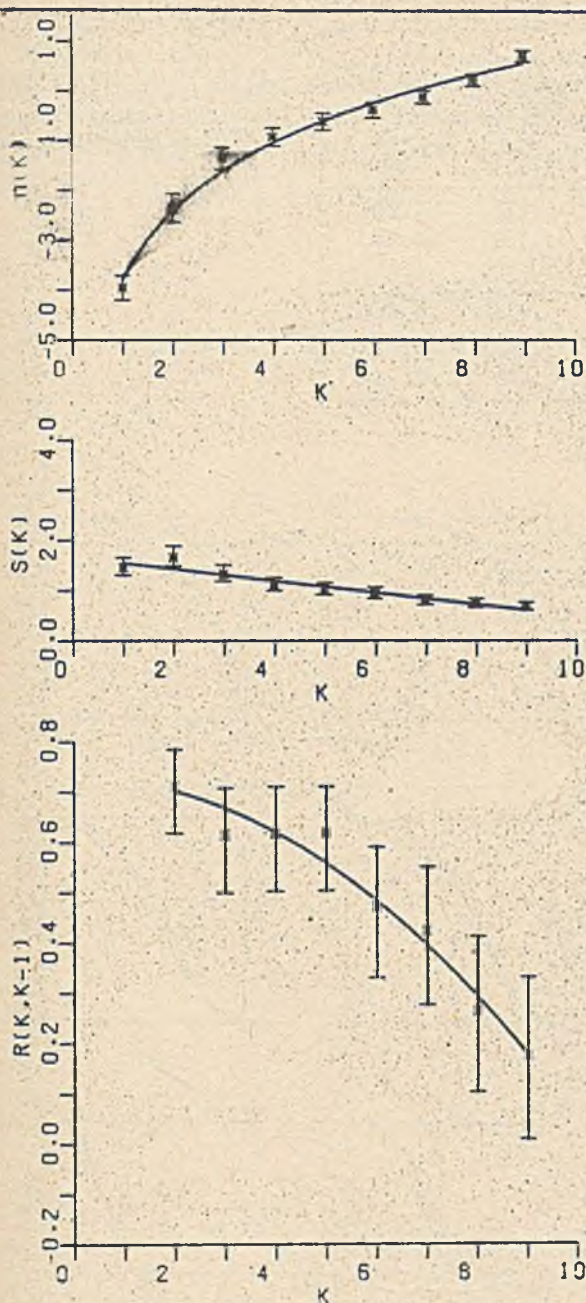
Na rys. 2 widać wyraźną regularność obliczonych estymat  $m_k$ ,  $s_k$  i  $r_{k,k-1}$  jako funkcji  $k$ . Umożliwiło to redukcję ilości parametrów modelu z 26 do 6 poprzez przyjęcie następujących funkcji aproksymujących:

$$m_k = a_m \ln k + b_m \quad (9a)$$

$$s_k = a_s k + b_s \quad (9b)$$

$$r_{k,k-1} = a_r k^2 + b_r \quad (9c)$$

Policzone metodą najmniejszych kwadratów wartości współczynników  $a$  i  $b$  są umieszczone w tabeli 1, a powstałe w ten sposób zależności są dla Ogródu Botanicznego wykreślone na rys. 2. Widać bardzo dobrą zgodność równań (9) z estymowanymi wartościami momentów. Zastosowany podobnie jak dla 26-pars-



Rys. 2. Estymowane parametry modelu (gwiazdki) wraz z 95% przedziałami ufności i dopasowanymi krzywymi (9) dla Ogródu Botanicznego.

metrowego modelu test  $\chi^2$  wykazał, że użycie równań (9) (z parametrami z tabeli 1) dających trochę zmienione wartości  $m_k$ ,  $s_k$  i  $r_{k,k-1}$  nie powoduje dużego pogorszenia jakości modelu, z tym, że w pewnych przypadkach poziom istotności testu musiał być obniżony do 1%.

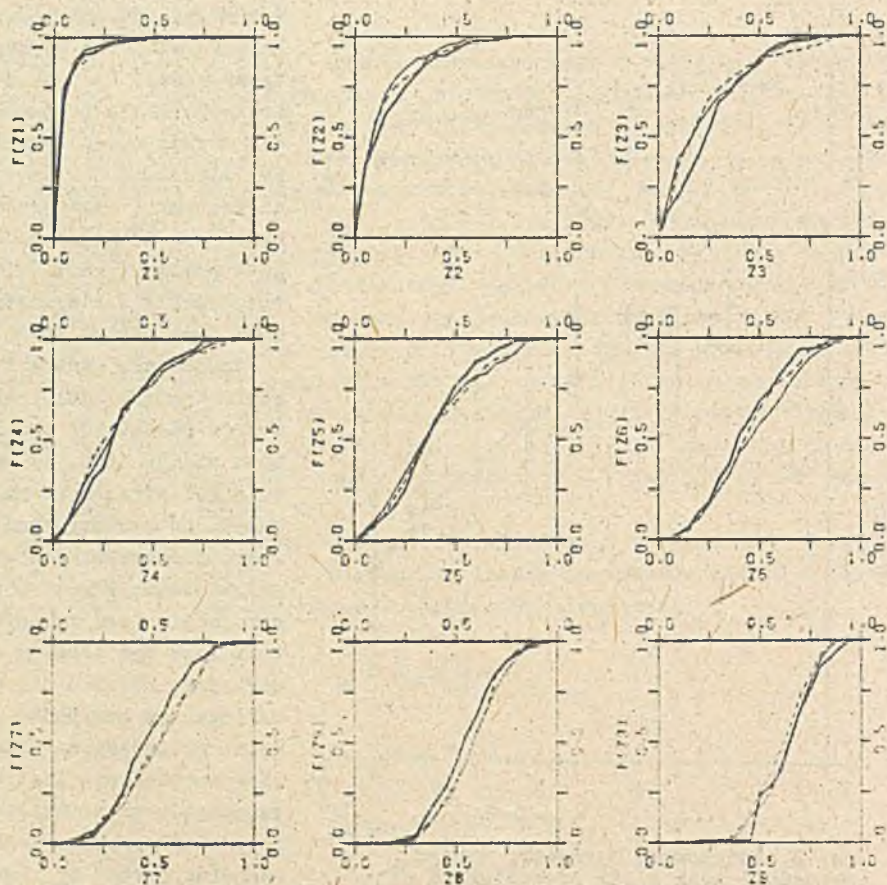
Innym sposobem weryfikacji modelu było porównanie empirycznych dystrybuant z dystrybuantami wygenerowanymi przez 6-parametrowy model. Rysunek 3 ilustruje takie porównanie dla stacji Ogród Botaniczny. Liczebności ciągów empirycznych i wygenerowanych były identyczne. Zgodność pomiędzy wartościami rzeczywistymi i syntetycznymi jest bardzo dobra.

Porównanie wartości odpowiadających sobie parametrów równań (9) dla różnych stacji (tab. 1) sugeruje ich stosunkowo małą zmienność przestrzenną. Jest to uzasadnione faktem podobieństwa warunków generujących opad rzeczywisty i może być słuszne dla większego obszaru niż w analizowanym przypadku. Jednakże posiadany materiał obserwacyjny nie jest wystarczający do stwierdzenia czy, a zwłaszcza w jakim stopniu, parametry równań (9) są niezmiennie w przestrzeni.

Niezależnie od powyższego ograniczenia dokonano przestrzennego uśred-

i	NS	$a_1$	$b_1$	$r_1$
m	1	1.976	-3.796	.994
	2	1.306	-2.791	.983
	3	1.667	-3.523	.988
s	1	-0.1185	1.673	-0.957
	2	-0.0680	1.325	-0.874
	3	-0.1151	1.630	-0.954
r	1	-0.00682	.729	-0.983
	2	-0.00646	.746	-0.977
	3	-0.00362	.681	-0.844

Tabela 1. Estymowane wartości parametrów równań (9). Współczynnik korelacji  $r_1$  jest tutaj wskaźnikiem jakości dopasowania. NS jest numerem stacji: 1 - Ogród Botaniczny, 2 - Balice, 3 - Wola Justowska.



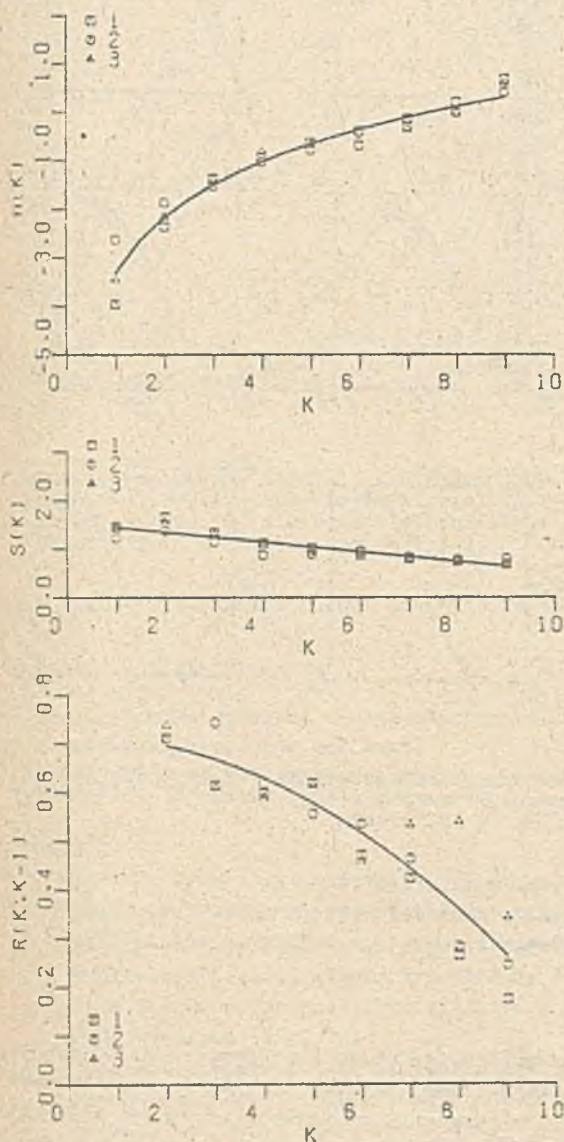
Kys. 3. Empiryczne (linie pogrubsze) i wygenerowane modelem 6-parametrowym dystrybuanty brzegowe (Ogród Botaniczny).

nienia parametrów  $m_k$ ,  $s_k$  i  $r_{k,k-1}$  przez dopasowanie krzywych (9) do łącznych (z 3 stacji) zbiorów odpowiadających sobie parametrów. Ilustruje to rys. 4, gdzie dobrze widać małą zmienność przestrzenną  $m_k$  (poza  $m_1$ ) oraz  $s_k$ . Rozrzut wartości  $r_{k,k-1}$  jest zdecydowanie większy, jednakże, oprócz

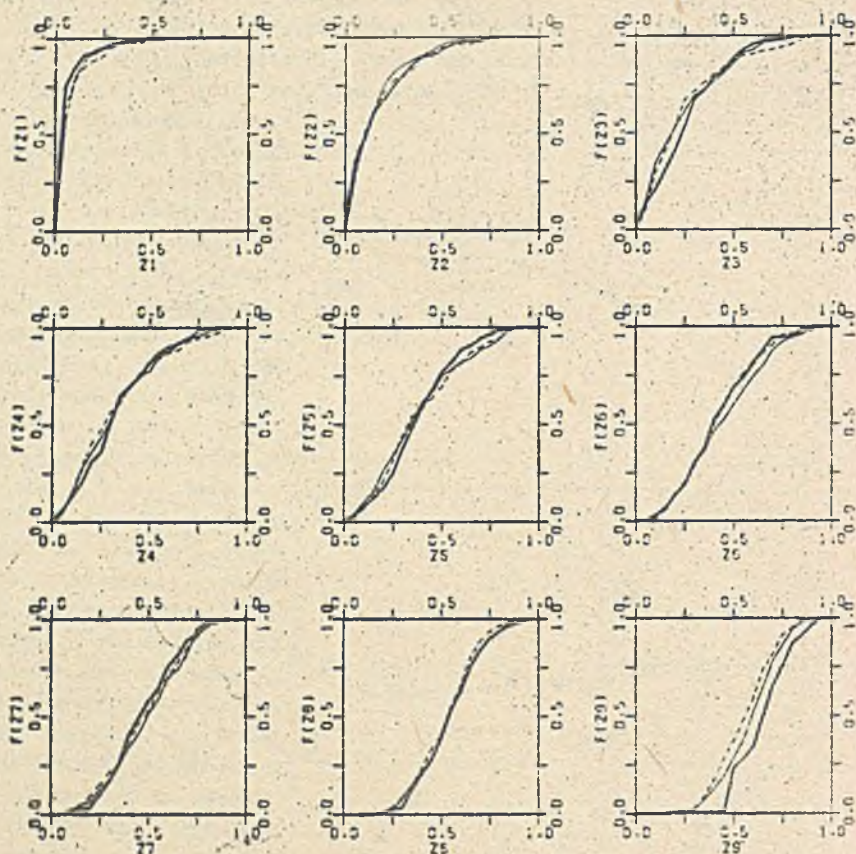
$k = 8$ , również niewielki. Uzasadnia to zastosowaną aproksymację (linie ciągłe na rys. 4).

Wizualna ocena modelu z parametrami uśrednionymi przestrzennie, dokonana na podstawie rys. 5 dla Ogródu Botanicznego i podobnych wykresów dla pozostałych stacji wskazuje na niewielką stratę informacji. Porównując rys. 3 i rys. 5 można stwierdzić, że w niektórych przypadkach dystrybuanty wygenerowane modelem o uśrednionych przestrzennie parametrach są nawet lepsze, niż odpowiednie dystrybuanty wygenerowane modelem o parametrach lokalnych. Jedyne wyraźne odstępstwo ma miejsce dla  $Z_0$  i to tylko dla Ogródu Botanicznego. Może być to uzasadnione łącznym wpływem odchyłek oszacowanych z próby momentów  $m_0$ ,  $r_{08}$  i  $r_{37}$  od ich estymat obliczonych wzorami (9) (rys. 4).

Ostatecznym efektem pracy modelu jest wygenerowanie zdyskretyzowanej bezwymiarowej krzywej sumowej opadu, a więc realizacji procesu  $H^* = \{H_1^*, H_2^*, \dots, H_9^*\}$  ( $H_{10}^* = 1$ ). Na rys. 6 porównano empiryczne dystrybuanty zmiennych  $H_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$  z ich odpowiednikami wygenerowanymi 6-parametrowym



Rys. 4. Przestrzenna zmienność parametrów modelu (1 - Ogród Botaniczny, 2 - Balice, 3 - Wola Justowska). Linie ciągłe oznaczają aproksymacje równaniami (9).



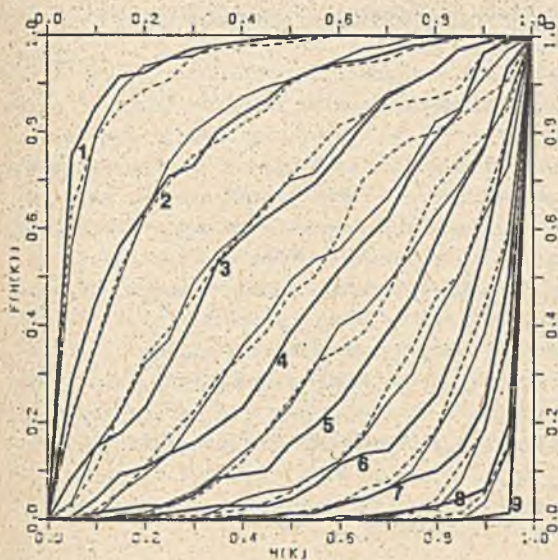
rys. 5. Empiryczne (linie pogrubione) i wygenerowane dystrybuanty brzegowe dla modelu 6-parametrowego (parametry przestrzennie uśrednione, Ogród Botaniczny).

modelem o parametrach uśrednionych przestrzennie. Pomimo wyraźnych odstępstw istnieje nadal dobra zgodność. Należy tu zaznaczyć, że dla pozostałych stacji analogiczne wykresy wykazują dużo mniejsze odchyłki.

### 5. Podsumowanie i wnioski

Zaproponowany model bezwymiarowego opadu punktowego jest dobrym przybliżeniem rzeczywistości. Dzięki swej prostej strukturze typu Markowa i normalności wszystkich rozkładów jest on łatwy w estymacji parametrów i swoim działaniu jako generator przebiegu bezwymiarowego opadu. Estymowane parametry modelu są regularnymi funkcjami zdyskretyzowanego bezwymiarowego czasu, co pozwala na redukcję ilości parametrów modelu z 26 do 6 bez dużej straty dokładności.





Rys. 6. Empiryczne (linie pogrubione) i wygenerowane dystrybuanty zdyskretyzowanej krzywej sumowej  $H^*$  dla Ogrodu Botanicznego (parametry uśrednione przestrzennie).

wego czasu na parametry modelu nie było tutaj badane.

## 6. Uwaga i podziękowanie

Praca została wykonana w ramach programu CPBP Nr 03.09. "Metody analizy i użytkowania zasobów wodnych".

Uciążliwej pracy dyskretyzacji hietogramów dokonał mgr Wiesław Gądek.

## LITERATURA

- [1] Croley T.E., Eli R.N., Cryer J.D., Ralston Creek hourly precipitation model, Water Resour. Res., 14, 485-490, 1978.
- [2] Eagleson P.S., Hydrologia dynamiczna, PWN, Warszawa 1978.
- [3] Flisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1969.
- [4] Hogg W.D., Distribution of rainfall with time: Design consideration, Paper presented to A.G.U. Chapman Conference on Rainfall Rates, Urbana, Illinois, 1982.
- [5] Kerr R.L., Rachford T.M., Reich B.M., Lee B.H., Plummer K.H., Time distribution of storm rainfall in Pennsylvania, Institute for Research on Land and Water Resources, The Pennsylvania State University, 34 pp. 1974.

Przyjęcie struktury procesu  $Y$  jako prostego ciągu Markowa jest również uzasadnione faktem, iż zwiększenie rzędu procesu Markowa nie musi powodować istotnej poprawy jakości modelu, czego przykładem może być praca [7].

Estymowane parametry dla trzech różnych stacji okazały się być mało zmienne przestrzennie. Umożliwiło to uśrednienie przestrzenne parametrów modelu bez dużej straty dokładności. Problem ten wymaga jednak dalszych badań.

Zagadnienie wpływu liczby  $m$  przedziałów dyskretyzacji bezwymiarowego

- [ 6 ] Knisel W.G.Jr., Snyder W.M., Stochastic time distribution of storm rainfall, Nordic Hydrol., 6, 242-262, 1975.
- [ 7 ] Nguyen V-T-V., Rousselle J., A stochastic model for the time distribution of hourly rainfall depth, Water Resour. Res., 17, 399-409, 1981.
- [ 8 ] Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 1972.
- [ 9 ] Pilgrim D.H., Cordery I., Rainfall temporal patterns for design floods, J.Hydr.Div., ASCE, 101, 81-95, 1975.
- [ 10 ] Raudkivi A.J., Lawgun N., Simulation of rainfall sequences, J.Hydr., 22, 271-294, 1974.
- [ 11 ] Todorovic P., Yevjevich V., Stochastic Process of precipitation, Colorado State University, Fort Collins, Hydrol.Pap. 35, 61 pp, 1969.
- [ 12 ] Tyrrell P.T., Hasfurther V.R., Design rainfall distributions for the State of Wyoming, Dept. of Civil Eng., College of Eng., University of Wyoming, Research Project Technical Completion Report, 37 pp., 1983.
- [ 13 ] Woolhiser D.A., Osborn H.B., A stochastic model of dimensionless thunderstorm rainfall, Water Resour. Res., 21, 511-522, 1985.
- [ 14 ] Zieliński R., Generatory liczb losowych, WNT, Warszawa 1979.
- [ 15 ] Zieliński R., Tablice statystyczne, PWN, Warszawa 1972.

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЕЗРАЗМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОСАДКОВ

### Резюме

В статье представлена простая модель, основанная на 10-ти элементарном представлении безразмерной кумулятивной кривой осадков, построенной путем разделения безразмерной длительности осадков на 10 равных частей. На этой основе построены проградированные приращения осадков, из которых сформирована последовательность преобразованных проградированных приращений осадков, являющаяся простым процессом Маркова. Так построенная 26-параметровая модель хорошо отражает реальные осадки. Удалось, что можно уменьшить количество параметров до шести. На примере трех метеорологических станций констатирована относительно малая пространственная изменчивость параметров модели.

## A STOCHASTIC MODEL OF DIMENSIONLESS POINT RAINFALL

## Summary

A simple model of dimensionless rainfall is proposed, based on 10-element representation of nondimensional accumulated rainfall curve sampled equidistantly over duration standardized to unity. On the basis of this representation the rescaled increments  $Z_1, Z_2, \dots, Z_9$  are made and by the transformation  $Y = \ln Z / (1 - Z)$  a new sequence  $Y_1, Y_2, \dots, Y_9$  is established which is assumed to be a nonhomogeneous Markov series of first order with normal unconditional probability distribution function /pdf/ of  $Y_1$  and normal conditional pdf's for each random variable  $Y_2, Y_3, \dots, Y_9$ . The model with its 26 parameters adequately reflects real rainfalls. It turns out that without much loss adequacy the number of parameters can be reduced to six. With the sample 3 locations a relatively small spatial variability of the model parameters found.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Janusz PIOTROWSKI

Wpłynęło do Redakcji 13.06.1987 r.