ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: GÓRNICTWO z. 107 Nr kol. 661

MAREK KWAŚNIEWSKI, STANISŁAW OLEKSY

PODSTAWY TEORETYCZNE OZNACZANIA STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI OŚRODKA TRANSWERSALNIE IZOTROPOWEGO NA PRÓBKACH WALCOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono zasady wyznaczania stałych sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego na próbkach walcowych. Wskazano, że wszystkie (E_1, ν_1, E_2, ν_2, G_2) techniczne stałe sprężystości można wyznaczyć za pomocą prób ściskania trzech próbek walcowych odpowiednio zorientowanych do płaszczyzn uwarstwienia.

Podano także podstawy teoretyczne wyznaczania modułu sprężystości poprzecznej G_2 przy pomocy próby skręcania próbki walcowej o osi podłużnej prostopadłej do uwarstwienia.

W zakończeniu wskazano dodatkowo na możliwość zmniejszenia liczby próbek walcowych potrzebnych do wyznaczenia stałych sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego jaką stwarza przybliżony wzór (25) Batugina i Nirenburg (1972) wyrażający moduł G_2 w funkcji E_1, E_2 i ν_2.

1. Wprowadzenie

Dla geomechaniki górniczej przedmiotem szczególnego zainteresowania jest - jako towarzyszący złożom najbardziej powszechnie eksploatowanych kopalin użytecznych - masyw skalny o budowie warstwowej. Same skały budujące górotwór są często również (Borecki, Kwaśniewski, Oleksy, Koć, 1975; Borecki, Kwaśniewski Nguyen-viet-Hung, Oleksy, Czilchaagijn Tegszsajchan, Pacha, 1978), ośrodkami uwarstwionymi. Dla ośrodków takich najczęściej przyjmowanym modelem jest model ośrodka transwersalnie izotropowego o równianiach stanu (z uogólnionego prawa Hooke'a) - por. Lechnickij (1950, 1977), Ambarcumian (1974), Sarkisjan (1976):

$$\varepsilon_x = a_{11}\,\sigma_x + a_{12}\,\sigma_y + a_{13}\,\sigma_z, \quad \gamma_{yz} = a_{44}\,\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\,\sigma_x + a_{11}\,\sigma_y + a_{13}\,\sigma_z, \quad \gamma_{xz} = a_{44}\,\tau_{xz} \qquad (1)$$

$$\varepsilon_z = a_{13}\,(\sigma_x + \sigma_y) + a_{33}\,\sigma_z, \quad \gamma_{xy} = 2\,(a_{11} - a_{12})\,\tau_{xy}$$

lub inaczej

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_y - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_2}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1}\sigma_y - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_2}\tau_{xz} \tag{2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2}\sigma_z - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_1}\tau_{xy}$$

gdzie:

E_1, E_2, ν_1, ν_2, G_2 - pięć niezależnych stałych sprężystości (technicznych) ośrodka transwersalnie izotropowego,

przy czym:

E_1 - współczynnik sprężystości podłużnej przy obciążeniu działającym w kierunku równoległym do płaszczyzny izotropii ($E_1 = E\parallel$)

E_2 - współczynnik sprężystości podłużnej przy obciążeniu działającym w kierunku prostopadłym do płaszczyzny izotropii ($E_2 = E\perp$)

ν_1 - współczynnik Poissona charakteryzujący odkształcenia w płaszczyźnie izotropii przy obciążeniu działającym w kierunku równoległym do tej płaszczyzny ($\nu_1 = \nu\parallel,\parallel$)

ν_2 - współczynnik Poissona charakteryzujący odkształcenia w płaszczyźnie izotropii przy obciążeniu działającym w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny ($\nu_2 = \nu\parallel,\perp$)

G_2 - współczynnik sprężystości postaciowej przy ścinaniu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii

oraz $G_1 = \dfrac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ - współczynnik sprężystości postaciowej przy ścinaniu w płaszczyźnie izotropii.

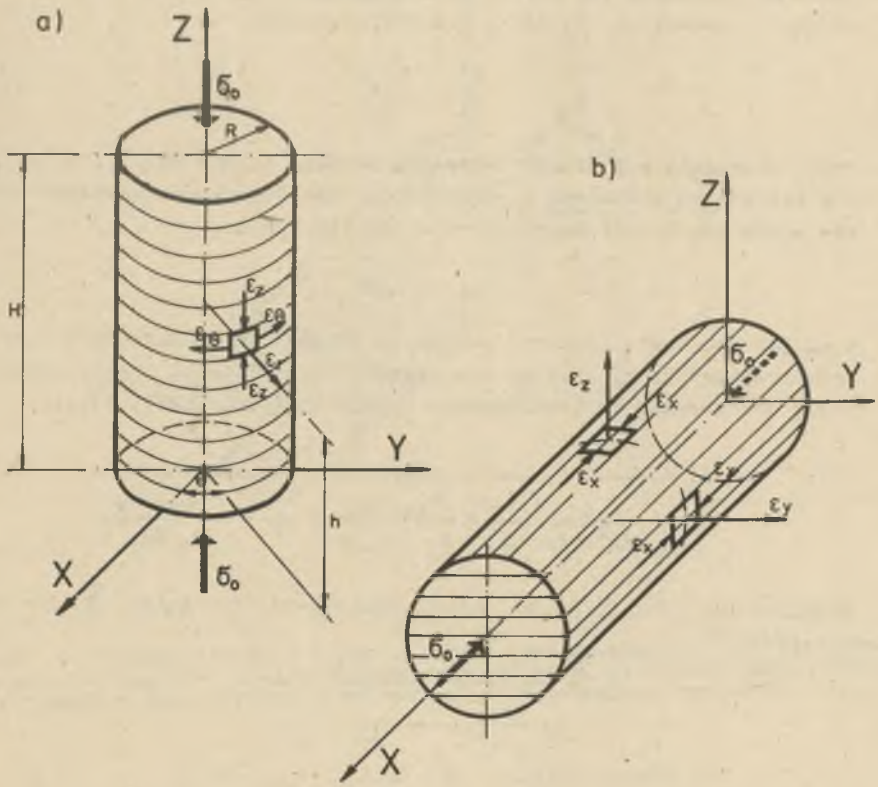
Wyznaczenie stałych sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego wykonuje się z reguły na próbkach foremnych prostopadłościennych lub walcowych.

Poniżej przedstawiona zostanie metodyka wyznaczania na próbkach walcowych. Zasady wyznaczania na próbkach prostopadłościennych można znaleźć w pracach m.in. Ganeva (1963, 1970) Cheneverta i Gatlina (1965), Pinto (1969, 1970).

2. Wyznaczenie stałych sprężystości w próbie ściskania

Jak wynika niemal bezpośrednio z podanych wyżej definicji parametrów sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego, w celu wyznaczenia wartości tych parametrów przy ściskaniu próbek walcowych, należy przeprowadzić następujące eksperymenty:

A. Próbę ściskania w kierunku prostopadłym do płaszczyzn uwarstwienia(rys. 1a); dokonując pomiarów odkształceń podłużnych ε_z i poprzecznych $\varepsilon_r(\varepsilon_\Theta)$ wyznacza się stałe:



Rys. 1. Próbki walcowe z materiału transwersalnie izotropowego
a) próbka zorientowana prostopadle do płaszczyzny izotropii, b) próbka zorientowana równolegle do płaszczyzny izotropii

$$E_2 = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} \tag{3}$$

$$\nu_2 = \frac{|\varepsilon_r|}{\varepsilon_z} = \frac{|\varepsilon_\Theta|}{\varepsilon_z} \tag{4}$$

B. Próbę ściskania w kierunku równoległym do płaszczyzn uwarstwienia(rys. 1b); dokonując pomiarów odkształceń podłużnych ε_x i poprzecznych ε_y wyznacza się stałe:

$$E_1 = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \tag{5}$$

$$\nu_1 = \frac{|\varepsilon_y|}{\varepsilon_x} \tag{6}$$

Wykonując dodatkowo pomiar odkształceń poprzecznych ε_z można skontrolować na podstawie tej próby wyznaczoną uprzednio z (3) i (4) wartość stosunku parametrów ν_2 do E_2, zachodzi bowiem

$$\frac{\nu_2}{E_2} = \frac{|\varepsilon_z|}{\sigma_x} \tag{7}$$

C. Próbę ściskania w kierunku tworzącym dowolny (różny od 0° i od 90°)kąt α z kierunkiem normalnym do płaszczyzn uwarstwienia; dokonując pomiarów odkształceń podłużnych ε_α wyznacza się stałą

$$E_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \tag{8}$$

i na jej podstawie (oraz na podstawie parametrów wyznaczonych w dwu poprzednich próbkach) oblicza się wartość piątej stałej sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego z formuły (Lechnickij, 1962):

$$G_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{E_\alpha \sin^2\alpha \cos^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{E_1 \sin^2\alpha} + \dfrac{2\nu_1}{E_1} - \dfrac{\sin^2\alpha}{E_2 \cos^2\alpha}} \tag{9}$$

Przykładowo, przy ściskaniu próbki odwierconej pod kątem $\beta = \alpha = 45^\circ$ do uwarstwienia

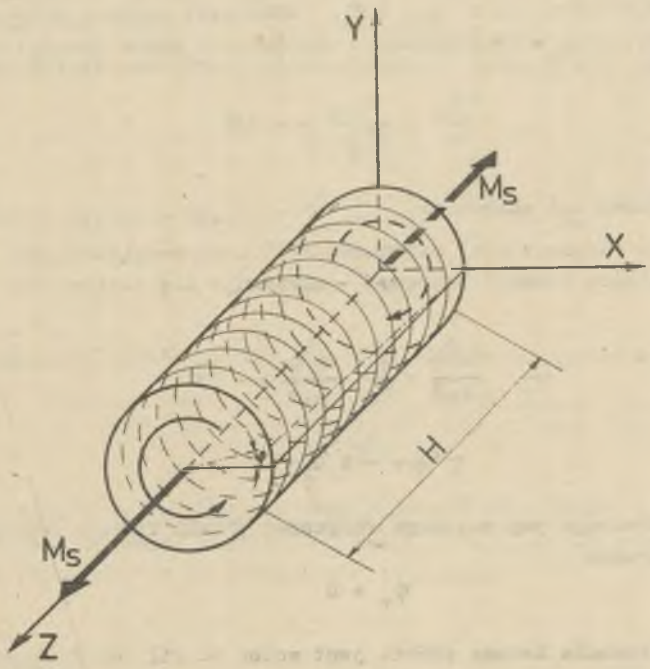
$$G_2 = \frac{1 - 2\nu_1}{\dfrac{4}{E_{\alpha=45^\circ}} - \dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E_2}} \tag{10}$$

3. Wyznaczenie stałej sprężystości G_2 w próbie skręcania

Klasycznym sposobem oznaczania cech odkształcalności postaciowej materiałów jest próba skręcania; przy skręcaniu pręta o przekroju kołowym występuje w nim stan naprężenia zwany czystym ścinaniem.

Poniżej podane zostaną podstawy teoretyczne oznaczania współczynnika sprężystości postaciowej G_2 (modułu sprężystości poprzecznej) w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii materiału transwersalnie

izotropowego z próby skręcania próbki walcowej odwierconej prostopadle do uwarstwienia. Zakładamy, że próbkę taką obciąża się tylko na powierzchniach czołowych momentami skręcającymi M_s, których wektory pokrywają się z osią z (oś próbki - rys. 2). W tym przypadku stan naprężenia w próbce określony jest dwoma składowymi τ_{xz} i τ_{yz} (Sarkisjan, 1976). Składowe te spełniają warunki równowagi, które przy pominięciu sił masowych mają postać:



Rys. 2. Próbka materiału transwersalnie izotropowego poddana działaniu momentu skręcającego w celu wyznaczenia modułu sprężystości postaciowej przy ścinaniu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii (G_2)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Równania (11) będą spełnione jeżeli przyjmie się, że:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{12}$$

gdzie:

ψ - funkcja naprężeń zależna tylko od współrzędnych x i y.

Pod wpływem działających naprężeń τ_{xz} i τ_{yz} materiał próbki doznaje odkształceń, których wielkość określa się z uogólnionego prawa Hooke'a - por. (2):

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G_2} \tau_{xz}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_2} \tau_{yz} \tag{13}$$

Składowe stanu odkształcenia γ_{xz} i γ_{yz} spełniają warunek nierozdzielności wewnętrznej, który w rozpatrywanym zagadnieniu można przedstawić:

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\vartheta \tag{14}$$

gdzie:

ϑ - jednostkowy kąt skręcania.

Wprowadzając do równania (14) zależność (13) oraz uwzględniając warunki (12) dla określenia funkcji naprężeń - otrzymuje się następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{1}{G_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{G_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\vartheta$$

czyli

$$\nabla^2 \psi = -2 G_2 \vartheta \tag{15}$$

Na obwodzie przekroju poprzecznego skręcanej próbki funkcja naprężeń ψ musi spełniać warunek

$$\psi_s = 0 \tag{16}$$

ponieważ powierzchnia boczna próbki jest wolna od sił zewnętrznych. Rozwiązanie równania różniczkowego Poissona (15) przy uwzględnieniu warunku brzegowego (16) ma postać (Walczak, 1973):

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{2} G_2 \vartheta (x^2 + y^2 - r^2) \tag{17}$$

Nieznany jednostkowy kąt skręcania znajduje się z warunku równowagi w płaszczyźnie przekroju poprzecznego skręcanej próbki:

$$2 \iint_P \psi dx\, dy = M_x \tag{18}$$

zaś

$$\vartheta = \frac{M_s}{C_s} \tag{19}$$

gdzie:

C_s - sztywność skręcania.

Wykorzystując zależność (18) i (19), sztywność skręcania zapiszemy w postaci:

$$C_s = \frac{2}{\vartheta} \iint_F \psi \, dx \, dy \tag{20}$$

Po wprowadzeniu do równania (20) funkcji (17) i jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$C_s = G_2 \, I_o \tag{21}$$

gdzie:

I_o - biegunowy moment bezwładności pola przekroju poprzecznego próbki względem środka.

Przy uwzględnieniu związku (21) w zależności (19) otrzymujemy

$$\vartheta = \frac{M_s}{G_2 \, I_o} \tag{22}$$

Kąt skręcenia próbki o długości H wynosi $\vartheta H = \varphi$, tj.

$$\varphi = \frac{M_s \, H}{G_2 \, I_o} \tag{23}$$

Z zależności tej określimy G_2, gdyż pozostałe wielkości możliwe są do zmierzenia -

$$G_2 = \frac{M_s \, H}{\varphi \, I_o} \tag{24}$$

W oparciu więc o wyniki badań próbki walcowej odwierconej prostopadle do uwarstwienia i poddanej skręcaniu możemy określić moduł ścinania G_2 w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii.

4. Zakończenie

Z przedstawionych rozważań wynika, że dla oznaczenia kompletu pięciu stałych sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego należy przygotować trzy próbki walcowe:

- jedną wywierconą równolegle do płaszczyzn uwarstwienia (z próby ściskania wyznacza się E_1 i ν_1)
- drugą wywierconą prostopadle do płaszczyzn uwarstwienia (z próby ściskania wyznacza się E_2 i ν_2)
- trzecią wywierconą pod dowolnym kątem $\beta = 90^o - \alpha$ do płaszczyzn uwarstwienia (z próby ściskania wyznacza się E_α, zaś ze wzoru (9) oblicza G_2), lub wywierconą prostopadle do płaszczyzn uwarstwienia(z próby skręcania wyznacza się G_2).

Warto tu zwrócić uwagę na pracę Batugina i Nirenburg (1972), którzy w drodze analizy oznaczonych przez różnych badaczy wartości parametrów sprężystości 47 różnych rodzajów skał transwersalnie izotropowych wykazali, że jakkolwiek stała G_2 jest jednym z pięciu niezależnych parametrów sprężystości to w przypadku rozpatrywanych skał (aleurolity, fyllity, piaskowce, łupki, granity, granodioryty, i in.) zachodzi w istocie związek opisujący wielkość G_2 w funkcji parametrów E_1, E_2 i ν_2:

$$G_2 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + (1 + 2\nu_2) E_2} \tag{25}$$

Różnice pomiędzy wyznaczonymi na próbkach i obliczonymi ze wzoru (25) wartościami modułu G_2 aż w 90 procentach analizowanych przypadków skał nie przekraczały 10%.

Wykorzystując przybliżony wzór Batugina i Nirenburg do określania wielkości G_2, liczbę próbek walcowych potrzebnych do oznaczenia stałych sprężystości ośrodka transwersalnie izotropowego można zredukować do dwu.

LITERATURA

[1] Ambarcumian S.A.: Obszczaja teoria anizotropnych obołoczek. Nauka, Moskwa 1974.

[2] Batugin S.A., Nirenburg R.K.: Pribliżennaja zawisimost mieżdu uprugimi konstantami gornych porod i parametry anizotropii. Fiziko-techniczeskije problemy rozrabotki poleznych iskopajemych, No. 1, 7 - 11, 1972.

[3] Borecki M., Kwaśniewski M., Oleksy S., Koć T.: Anizotropia, niejednorodność i nieciągłość własności wytrzymałościowych, sprężystych i reologicznych skał i górotworu. Opracowanie Instytutu Projektowania, Budowy Kopalń i Ochrony Powierzchni Politechniki Śląskiej 125/3.1.1.1., Gliwice 1975.

[4] Borecki M., Kwaśniewski M., Nguyen-viet-Hung, Oleksy S., Czilchaagijn Tegszsajchan, Pacha J.: Określenie anizotropii własności wytrzymałościowych i odkształceniowych skał ROW w oparciu o analizę wyników badań piaskowców, iłowców, mułowców oraz węgli. Sprawozdanie etapowe: Anizotropia własności odkształceniowych i wytrzymałościowych piaskowca rudzkiego JASTRZĘBIE. Opracowanie Instytutu Projektowania, Budowy Kopalń i Ochrony Powierzchni Politechniki Śląskiej 115/3.4, Gliwice 1978.

[5] Chenevert M.E., Gatlin C.: Mechanical anisotropies of laminated sedimentary rocks. Journal of the Society of Petroleum Engineers, Vol. 5, 67-77, 1965.

[6] Ganev I.C.: Übergang von räumlichen zu ebenen und linearen Verhältnissen bei den Elastizitäts-Grundgleichungen des orthogonal-anisotropen (orthotropen) elastischen Körpers und vor der Benutzung der beiden linearen Zustande zur Ermittlung der technischen Konstanten. Bericht über das 5. Ländertreffen des Internationalen Büros für Gebirgsmechanik. Akademie - Verlag, Berlin 1963.

[7] Ganev I.C.: Über ein experimentelles Verfahren zur Ermittlung von Elastizitätskonstanten stetiger orthotroper elastischer Medien unter Annahme der Linearität (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes). Bericht über das 10. Ländertreffen des Internationalen Büros für Gebirgsmechanik, Leipzig 1968, Akademie - Verlag, Berlin, 767-79, 1970.

[8] Lechnickij S.G.: Teoria uprugosti anizotropnowo tieła. Gostechizdat, 1950.

[9] Lechnickij S.G.: Teoria uprugosti anizotropnowo tieła.Nauka (izd.II), Moskwa 1977.

[10] Lechnickij S.G.: Teoreticzeskoje issledowanie napriażenij w uprugom anizotropnom massiwie wblizi podzjemnoj wyrabotki ellipticzeskowo sieczenia. Trudy WNIMI, sb. 45, 155-79, 1962.

[11] Pinto J.L.: O corpo isotrópico transversal e sua aplicação ao estudo das rochas xistosas. LNEC, Lisboa, 1969.

[12] Pinto J.K.: Deformability of schistous rocks. Proceedings of the Second Congress of the ISRM, Beograd, Vol. I, 491-6, 1970.

[13] Sarkisjan W.S.: Niekotoryje zadaczi matematiczeskoj teorii uprugostii anizotropnowo tieła. Izd. Jerewańskowo Uniwersitieta, Jerewań 1976.

[14] Walczak J.: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności, t. II. PWN, Kraków 1973.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ УПРУГОСТЕЙ ТРАНВЕРСИАЛЬНО ИЗОТОПНОГО ЦЕНТРА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

Р е з ю м е

В статье рассматриваются принципы определения постоянных упругостей трансверсиально изотопного центра на цилиндрических образцах. Доказывается что все E_1, ν_1, E_2, ν_2, C_2 техническо постоянные упругости можно определить при помощи испытаний сжатия трёх цилиндрических образцов соответственно расположенных к плоскостям напластвования. Даются тоже теоретические основы определения модуля поперечной упругости C_2 при помощи испытания скручивания цилиндрического образца продольной оси перпендикулярной к напластвовании. В заключении указывается добавочно на возможность уменьшения количества цилиндрических образцов нужных для определения постоянных упругостей трансверсально постоянных упругостей центра какую создает приближенная формула (25) Батугина и Ниренбург (1972) выражающий модуль C_2 в функции E_1, E_2 и ν_2.

THEORETICAL PRINCIPLES FOR DETERMINING ELASTICITY CONSTANTS OF THE TRANSVERSE ISOTROPIC MEDIUM ON THE CYLINDRICAL SAMPLES

S u m m a r y

The paper contains the principles for determinng the elasticity constatnts of the transverse isotropic medium on the cylindrical samples. All the constants of technical elasticity (E_1, ν_2, E_2, ν_2, G_2) can be determi-

ned by the compression tests of the three cylindrical samples adequately oriented to stratification planes. Theoretical principles for determining transverse elasticity module G_2 were given. It is done by compressing a cylidrical sample with a longitudinal perpendicular axis towards the stratification. In the end the paper points to the possibility of reducing the cylindrical samples number needed for determining the elasticity components of the transverse isotropic medium. This possibility is given by the approximate expression (25) of Batugin and Nirenburg (1972)that expresses the module G_2 as a function of E_1, E_2 and ν_2.