ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ELEKTRYKA z. 88 Nr kol. 779

Maciej SIWCZYŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

SYNTEZA DWUWYMIAROWYCH FILTRÓW CYFROWYCH METODĄ PRZEKSZTAŁCEŃ SPEKTRALNYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę przekształcenia transmitancji jednowymiarowego filtru cyfrowego lub analogowego w transmitancję filtru dwuwymiarowego za pomocą tzw. przekształcenia spektralnego. Podano cztery twierdzenia, z których wynika, jak należy dobierać przekształcenie spektralne, aby z danego filtru jednowymiarowego uzyskać filtr dwuwymiarowy o pożądanych właściwościach częstotliwościowych. Przekształcenia spektralne mogą znaleźć zastosowanie podczas pośredniej syntezy filtrów dwuwymiarowych.

1. Wstęp

Dwuwymiarowy filtr cyfrowy (2FC) jest uogólnieniem jednowymiarowego filtru cyfrowego (1FC) na ciągi dwuindeksowe. W tym artykule będą rozpatrywane filtry niskich częstotliwości (NCz) i wysokich częstotliwości (WCz). 2FC przekształca dwuindeksowy ciąg wejściowy $i(n_1,n_2)$ w dwuindeksowy ciąg wyjściowy $o(n_1,n_2)$ według wzoru:

$$o(n_1,n_2) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h(m_1,m_2)i(n_1-m_1,n_2-m_2), \tag{1}$$

gdzie $h(m_1,m_2)$ jest odpowiedzią impulsową filtru. Wyrażenie (1) opisuje w ogólnym przypadku filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (NOI). Filtr cyfrowy o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI) rzędu (N_1,N_2) opisany jest wzorem:

$$o(n_1,n_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} h(m_1,m_2)i(n_1-m_1,n_2-m_2) \tag{2}$$

Filtry NOI realizowane są w formie rekursywnej, to znaczy opisane są równaniem rekurencyjnym:

$$\sum_{m_1=0}^{M_1}\sum_{m_2=0}^{M_2} a_{m_1m_2}o(n_1-m_1,n_2-m_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1}\sum_{m_2=0}^{N_2} b_{m_1m_2}i(n_1-m_1,n_2-m_2) \tag{3}$$

Transmitancja 2FC jest $\hat{h}$. Jest to przekształcenie Z odpowiedzi impulsowej b. Transmitancja 2FC NOI jest funkcją wymierną:

$$\hat{h}(z_1,z_2) = \frac{\sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} b_{n_1n_2}z_1^{-n_1}z_2^{-n_2}}{\sum_{n_1=0}^{M_1}\sum_{n_2=0}^{M_2} a_{n_1n_2}z_1^{-n_1}z_2^{-n_2}} = \frac{p(z_1,z_2)}{q(z_1-z_2)} \tag{4}$$

a transmitancja 2FC SOI wielomianem:

$$\hat{h}(z_1,z_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} h(n_1,n_2)z_1^{-n_1}z_2^{-n_2} \tag{5}$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności 2FC jest:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} |h(n_1,n_2)| < \infty.$$

Transmitancja (4) jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $q(z_1,z_2) \neq 0$ w obszarze $\{(z_1,z_2) : |z_1| \geqslant 1, |z_2| \geqslant 1\}$. Filtry SOI zawsze są stabilne.

Charakterystyką częstotliwościową 2FC nazywa się funkcję:

$$\hat{h}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = A(\omega_1,\omega_2)e^{j\varphi(\omega_1,\omega_2)} \tag{6}$$

Amplituda A i faza φ filtru spełniają odpowiednio warunki symetrii i antysymetrii centralnej

$$\begin{aligned} A(-\omega_1,-\omega_2) &= A(\omega_1,\omega_2) \\ \varphi(-\omega_1,-\omega_2) &= -\varphi(\omega_1,\omega_2) \end{aligned} \tag{7}$$

Synteza filtru NOI polega na określeniu współczynników wielomianów p i q transmitancji (4) w taki sposób, aby amplituda filtru $A(\omega_1,\omega_2)$ była bliska zadanej funkcji. Synteza filtrów SOI dąży do określenia poszczególnych wartości odpowiedzi impulsowej $h(n_1,n_2)$ tak, aby amplituda $A(\omega_1,\omega_2)$ aproksymowała zadaną funkcję.

Często podczas syntezy FC wygodnie jest posługiwać się pojęciem filtru analogowego (FA). Tutaj będą stosowane pojęcia jednowymiarowe (1FA) i dwuwymiarowego (2FA) filtru analogowego. (2FA) przetwarza funkcję wejściową $I(t_1,t_2)$ dwóch zmiennych rzeczywistych w funkcję wyjściową $O(t_1,t_2)$ dwóch zmiennych rzeczywistych według równania różniczkowego:

$$\sum_{n_1=0}^{M_1}\sum_{n_2=0}^{M_2} a_{n_1n_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}O(t_1,t_2)}{\partial^{n_1}t_1\partial^{n_2}t_2}=\sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} b_{n_1n_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}I(t_1,t_2)}{\partial^{n_1}t_1\,\partial^{n_2}t_2} \tag{8}$$

Stosując podwójne przekształcenie Laplace'a $(\cdot)^{\wedge}$ do równania (8) otrzymuje się transmitancję 2FA:

$$\hat{H}(s_1,s_2)=\frac{\sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} b_{n_1n_2}s_1^{n_1}s_2^{n_2}}{\sum_{n_1=0}^{M_1}\sum_{n_2=0}^{M_2} a_{n_1n_2}s_1^{n_1}s_2^{n_2}}=\frac{P(s_1,s_2)}{Q(s_1,s_2)} \tag{9}$$

Charakterystyką częstotliwościową 2FA jest funkcja:

$$\hat{H}(j\omega_1,j\omega_2)=\left[\hat{H}(s_1,s_2)\right]_{\substack{s_1=j\omega_1\\ s_2=j\omega_2}} \tag{10}$$

Warto nadmienić, że w dziedzinie filtrów analogowych nie ma pojęcia filtru SOI.

Warunkiem stabilności transmitancji (9) jest : $Q(s_1,s_2)\neq 0$ w obszarze $\left\{(s_1,s_2) : \mathrm{Re}\, s_1 \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\, s_2 \geqslant 0\right\}$.

Odwzorowania FA → FC dokonuje się za pomocą przekształcenia biliniowego

$$s_i=\frac{2}{T_i}\cdot\frac{1-z_i^{-1}}{1+z_i^{-1}},\quad i=1,2, \tag{11}$$

gdzie T_i jest okresem próbkowania.

Metody syntezy filtrów jednowymiarowych są szeroko rozpracowywane, np. w pracach [6, 8]. W tym artykule zostaną podane twierdzenia, które za pomocą tzw. przekształceń spektralnych umożliwią syntezę 2FC, wychodząc od zaprojektowanego uprzednio 1FC lub 1FA. Wspomniane twierdzenia są rozszerzeniem pewnych twierdzeń, które można znaleźć w pracach [1, 4, 5, 7].

2. Przekształcenia typu 1FC → 2FC

Metodę przekształceń spektralnych można scharakteryzować w następujący sposób. Niech $\hat{h}_1(z)$ będzie zadaną transmitancją 1FC, otrzymaną na drodze syntezy jednowymiarowej, a $\hat{h}_2(z_1,z_2)$ transmitancją 2FC, którą otrzymuje się z transmitancji h_1 za pomocą przekształcenia spektralnego $z = G(z_1,z_2)$ według wzoru:

$$\hat{h}_2(z_1,z_2) = \hat{h}_1\left[G(z_1,z_2)\right] \tag{12}$$

Każde przekształcenie spektralne musi spełniać dwa zasadnicze wymagania. Pierwszym wymaganiem jest zapewnienie stabilności nowo utworzonego filtru dwuwymiarowego.

W celu sformułowania warunków stabilności wygodnie jest posługiwać się następującymi zbiorami:

$$P = \left\{ s : \operatorname{Re} s \geq 0 \right\}, \qquad \text{(prawa domknięta półpłaszczyzna)}$$

$$D = \left\{ z : |z| \geq 1 \right\}, \qquad \text{(domknięte zewnętrze koła jednostkowego)}$$

$$P^2 = \left\{ (s_1,s_2) : \operatorname{Re} s_1 \geq 0, \ \operatorname{Re} s_2 \geq 0 \right\},$$

$$D^2 = \left\{ (z_1,z_2) : |z_1| \geq 1, \ |z_2| \geq 1 \right\}.$$

Niech $\hat{h}_1(z)$ będzie transmitancją stabilnego 1FC. Jeżeli przekształcenie $z = G(z_1,z_2)$ odwzorowuje $D^2 \to D$ (tj. jeżeli $G(D^2) \subset D$), to dwuwymiarowy filtr $\hat{h}_2$ określony wzorem (12) będzie stabilny.

Drugim wymaganiem nakładanym na przekształcenie spektralne jest odpowiednia transformacja jednowymiarowej charakterystyki amplitudowej filtru w dwuwymiarową. Za prototypowe uznaje się przekształcenie 1FCNCz 2FCNCz lub 1FCWCz → 2FCWCz, o których powiada się, że zachowują typ filtru. W tym paragrafie podane zostaną dwa ogólne twierdzenia, które precyzują własności rozmaitych przekształceń spektralnych. Twierdzenia te pozwalają też konstruować takie przekształcenia, a zatem mogą stanowić podstawę metody syntezy 2FC.

Niech $\vec{\omega} = (\omega_1,\omega_2)$ oznacza częstotliwość dwuwymiarową, a $\|\vec{\omega}\|$ jej normę. Stosowane będą trzy podstawowe normy:

$$\|\vec{\omega}_1\| = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}$$

$$\|\vec{\omega}_2\| = |\omega_1| + |\omega_2|$$

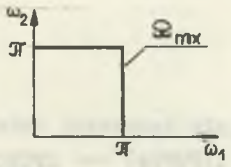
$$\|\vec{\omega}_3\| = \max(|\omega_1|, |\omega_2|).$$

Symbol $\vec{0}$ oznaczać będzie parę (0,0), a Δ będzie zbiorem:

$$\Delta = \left\{ (\omega_1, \omega_2) : 0 \leq \omega_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \omega_2 \leq \pi \right\}$$

Przez Ω_{mx} oznaczany będzie następujący zbiór:

$$\Omega_{mx} = \left\{ \vec{\omega} : \omega \in \Delta, \ \|\vec{\omega}\| = \text{maksimum} \right\}.$$



Rys. 1

Zbiór Ω_{mx} zależy od przyjętej normy. Dla norm $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ $\Omega_{mx} = \left\{ (\pi; \pi) \right\}$, jest więc punktem dla normy $\|\cdot\|_3$ $\Omega_{mx} = \left\{ \vec{\omega} \in \Delta : \omega_1 = \pi \text{ lub } \omega_2 = \pi \right\}$. Zbiór ten naszkicowano na rysunku 1.

Z równości

$$\hat{h}_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \hat{h}_1\left[G(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\right] = \hat{h}_1(e^{j\omega})$$

wynika, że musi istnieć częstotliwość jednowymiarowa $\omega \geq 0$ taka, że:

$$e^{j\omega} = G(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = e^{j\Gamma(\omega_1, \omega_2)},$$

gdzie Γ jest funkcją fazową przekształcenia G. Stąd otrzymuje się:

$$\omega = \Gamma(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{j} \ln\left[G(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\right]. \tag{13}$$

Zatem funkcja G dla $\omega_1 \in [0, \pi]$, $\omega_2 \in [0, \pi]$ musi spełniać warunek:

$$\left|G(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\right| = 1,$$

ma więc wszechprzepustową charakterystykę amplitudową.

Z teorii jednowymiarowych filtrów cyfrowych [8] wynika, że kwadrat amplitudy filtru jest funkcją wymierną zmiennej $\cos\omega$, zatem

$$\left|\hat{h}_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\right|^2 = \left|\hat{h}_1(e^{j\omega})\right|^2 = \left|\hat{h}_1(e^{j\Gamma(\omega_1,\omega_2)})\right|^2 = R(\cos\omega) =$$

$$= R\left[\cos\Gamma(\omega_1,\omega_2)\right], \tag{14}$$

gdzie R jest funkcją wymierną. Z analizy wyrażenia (14) wynikają dwa twierdzenia.

Twierdzenie 1

Przekształcenie $z = G(z_1,z_2)$ zachowuje typ filtru wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) funkcja $\Gamma(\omega_1,\omega_2)$ jest ciągła i nieujemna na Δ

2) $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \Delta$ i $\|\vec{\omega}_1\| \geq \|\vec{\omega}_2\| \Rightarrow \Gamma(\vec{\omega}_1) \geq \Gamma(\vec{\omega}_2)$,

3) $\Gamma(\vec{0}) = 0$, $\Gamma(\Omega_{mx}) = \pi$.

Twierdzenie 2

Przekształcenie $z = G(z_1,z_2)$ odwzorowuje 1FCNCz (1FCWCz) — 2FCWCz (2FCNCz) wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) funkcja Γ jest ciągła i nieujemna na Δ,

2) $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2 \in \Delta$ i $\|\vec{\omega}_1\| \geq \|\vec{\omega}_2\| \Rightarrow \Gamma(\vec{\omega}_1) \leq \Gamma(\vec{\omega}_2)$,

3) $\Gamma(0) = \pi$, $\Gamma(\Omega_{mx}) = 0$.

Funkcja wszechprzepustowa

$$G(z_1,z_2) = \varepsilon z_1^{Q_1} z_2^{Q_2} \prod_{i=1}^{M} \frac{\sum_{m_1=0}^{N_i} \sum_{n_2=0}^{M_i} a_i(n_1,n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}}{\sum_{n_1=0}^{N_i} \sum_{n_2=0}^{M_i} a_i(n_1,n_2) z_1^{n_1} z_2^{n_2}}, \tag{15}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, spełnia warunki przekształcenia spektralnego, jeżeli tylko odpowiednio dobierze się wartości współczynników $a_i(n_1,n_2)$ i wykładników Q_1, Q_2. Ze wzoru (15) otrzymuje się funkcję fazową:

$$\Gamma(\omega_1,\omega_2) = \frac{1-\varepsilon}{2}\pi + Q_1\omega_1 + Q_2\omega_2 -$$

$$= 2\sum_{i=1}^{M} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sum_{n_1=0}^{N_i}\sum_{n_2=0}^{M_i} a_i(n_1,n_2)\sin(n_1\,{}_1 + n_2\,{}_2)}{\sum_{n_1=0}^{N_i}\sum_{n_2=0}^{M_i} a_i(n_1,n_2)\cos(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)} \tag{16}$$

Na ogół trudno dobrać współczynniki we wzorze (15) tak, aby funkcja (16) spełniała warunki twierdzenia 1 lub 2. Dlatego poniżej zostanie zaproponowana inna metoda konstrukcji funkcji (15).

Niech B oznacza przekształcenie biliniowe postaci:

$$s = B(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = B^{-1}(s) = \frac{1 + s}{1 - s}$$

Łatwo przekonać się, że przekształcenie B ma następujące własności:

$$B(D) \subset P, \qquad B^{-1}(P) \subset D, \tag{17}$$

$$B(e^{j\omega}) = j\operatorname{tg}\frac{\omega}{2},$$

$$B^{-1}(j\Omega) = \frac{1 + j\Omega}{1 - j} = e^{j2\operatorname{arc\,tg}\Omega} \tag{18}$$

$$B(\partial D) = \partial P, \quad B^{-1}(\partial P) = \partial D, \tag{19}$$

gdzie ∂D i ∂P oznaczają odpowiednio okrąg jednostkowy i oś urojoną. Nietrudno wykazać, że przekształcenie

$$z = G(z_1,z_2) = B^{-1}\left[aB(z_1) + bB(z_2)\right], \tag{20}$$

gdzie a i $b > 0$, jest wszechprzepustowe ze względu na własność (19), a ponadto odwzorowuje $D^2 \to D$. Istotnie z wyrażeń (17) wynika, że

$$G(D^2) = B^{-1}\left[aB(D) + bB(D)\right] \subset B^{-1}(aP + bP) = B^{-1}(P) \subset D,$$

a zatem przekształcenie (20) gwarantuje stabilność filtru dwuwymiarowego. Z własności (18) wynika wzór na funkcję fazową przekształcenia (20):

$$\Gamma(\omega_1,\omega_2) = 2\operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2} + b \operatorname{tg}\frac{\omega_2}{2}) \tag{31}$$

Funkcja (21) spełnia warunki twierdzenia 1 i dlatego przekszałcenie (20) zachowuje typ filtru. Jawną postacią tego przekształcenia jest:

$$G(z_1,z_2) = \frac{(1+c)z_1z_2 + (1+d)z_1 + (1-d)z_2 + (1-c)}{(1-c)z_1z_2 + (1-d)z_1 + (1+d)z_2 + (1+c)}, \tag{20}$$

gdzie stałe c i d spełniają warunki $c+d > 0$ i $c-d > 0$.

Analogicznie można skonstruować proste przekształcenie

$$1FCNCz(1FCWCz) \longrightarrow 2FCWCz(1FCNCz).$$

Przekształcenie

$$G(z_1,z_2) = B^{-1}\left[\frac{a}{B(z_1)} + \frac{b}{B(z_2)}\right], \tag{22}$$

gdzie $a,b > 0$, ma następującą własność:

$$G(D^2) = B^{-1}\left[\frac{a}{B(D)} + \frac{b}{B(D)}\right] \subset B^{-1}\left(\frac{a}{P} + \frac{b}{P}\right) = B^{-1}(aP + bP) =$$

$$= B^{-1}(P) \subset D,$$

a więc gwarantuje stabilność filtru dwuwymiarowego. Stosując wzory (18) otrzymuje się funkcję fazową przekształcenia (22)

$$\Gamma(\omega_1,\omega_2) = 2\operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{ctg}\frac{\omega_1}{2} + b \operatorname{ctg}\frac{\omega_2}{2}) \tag{23}$$

Funkcja (23) spełnia warunki twierdzenia 2, czyli przekształcenie (22) odwzorowuje $1FCNCz(1FCWCz) \longrightarrow 2FCWCz(2FCNCz)$. Jego jawną postacią jest:

$$G(z_1,z_2) = \frac{(1+c)z_1z_2 - (1-d)z_1 - (1-d)z_2 + (1-c)}{(1-c)z_1z_2 - (1-d)z_1 - (1+d)z_2 + (1+c)} \tag{22}$$

gdzie stałe c, d spełniają warunki: $c+d > 0$, $c-d > 0$.

3. Przekształcenia filtrów 1SOI — 2SOI

Z teorii jednowymiarowych filtrów z liniową fazą [6, 8] wiadomo, że 1FCSOI o transmitancji

$$\hat{h}_1(z) = \sum_{n=0}^{2N} h_1(n) z^{-n}$$

ma liniową fazę, jeżeli odpowiedź impulsowa spełnia warunek symetrii:

$$h_1(2N - n) = h_1(n)$$

Wówczas amplituda filtru dana jest zależnością:

$$A_1(\omega) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_1(n)\cos n\omega = \sum_{n=0}^{N} \alpha_1(n) T_n(\cos\omega) = \sum_{n=0}^{N} a_1(n)(\cos\omega)^n, \quad (24)$$

gdzie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ jest wielomianem Czebyszewa.

Twierdzenie to po rozszerzeniu na filtry dwuwymiarowe ma następującą postać [9]: 2FCSOI o transmitancji

$$\hat{h}_2(z_1 z_2) = \sum_{n_1=0}^{2N_1} \sum_{n_2=0}^{2N_2} h_2(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (25)$$

ma liniową fazę, jeżeli odpowiedź impulsowa spełnia warunek symetrii kwadrantowej:

$$h_2(2N_1 - n_1, n_2) = h_2(n_1, n_2)$$

$$h_2(n_1, 2N_2 - n_2) = h_2(n_1, n_2)$$

Wówczas amplituda filtru dana jest zależnością:

$$A_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} a_2(n_1, n_2)\cos(n_1\omega_1)\cos(n_2\omega_2), \quad (26)$$

gdzie współczynniki $a_2(n_1,n_2)$ związane są z odpowiednią impulsową filtru za pomocą wzorów:

$$
\begin{aligned}
&h_2(n_1,n_2) = \tfrac{1}{4}\, a_2(N_1-n_1,\ N_2-n_2), && n_1 = 0,\dots,N_1-1,\quad n_2 = 0,\dots,N_2-1,\\
&h_2(n_1,N_2) = \tfrac{1}{2}\, a_2(N_1-n_1,0), && n_1 = 0,\dots,N_1-1,\\
&h_2(N_1,n_2) = \tfrac{1}{2}\, a_2(0,\ N_2-n_2), && n_2 = 0,\dots,N_2-1,\\
&h_2(N_1,N_2) = a_2(0,0).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Jeżeli uprzednio dokonano syntezy filtru jednowymiarowego, to współczynniki $a_1(n)$ wielomianu (24) są znane.

Przekształcenie spektralne w postaci:

$$\cos\omega = \tilde{F}(\cos\omega_1,\ \cos\omega_2) = \sum_{n_1=0}^{M_1}\sum_{n_2=0}^{M_2} c(n_1,n_2)(\cos\omega_1)^{n_1}(\cos\omega_2)^{n_2} \tag{28}$$

wprowadzone do wzoru (24) daje amplitudę filtru dwuwymiarowego

$$A_2(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n=0}^{N} a_1(n)\left[\sum_{n_1=0}^{M_1}\sum_{n_2=0}^{M_2} c(n_1,n_2)(\cos\omega_1)^{n_1}(\cos\omega_2)^{n_2}\right]^n =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} b_2(n_1,n_2)(\cos\omega_1)^{n_1}(\cos\omega_2)^{n_2}, \tag{29}$$

gdzie $N_1 = NM_1$, $N_2 = NM_2$. W celu ustalenia sposobu doboru współczynników $c(n_1,n_2)$ w przekształceniu (28) wygodnie jest podstawić $\lambda = \cos\omega$, $\lambda_1 = \cos\omega_1$, $\lambda_2 = \cos\omega_2$ i przez Δ' oznaczyć obszar $\Delta' = [-1,1] \times [-1,1]$.

Stosując twierdzenie 1 do przekształcenia (28), które teraz ma postać:

$$\lambda = \tilde{F}(\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{n_1=0}^{M_1}\sum_{n_2=0}^{M_2} c(n_1,n_2)\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}, \tag{28}$$

nietrudno stwierdzić, że przekształcenie to zachowuje typ filtru wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) funkcja $\tilde{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2)$ jest monotonicznie rosnącą w obszarze Δ' podług każdej zmiennej λ_1, λ_2,

2) $|\tilde{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2)| \leq 1$ dla $(\lambda_1,\lambda_2) \in \Delta'$

$\tilde{\Gamma}(1,1) = 1$

$\tilde{\Gamma}(-1,-1) = -1.$

Stosując z kolei twierdzenie 2 do przekształcenia (28') stwierdza się, że jest ono odwzorowaniem 1FCNCz(1FCWCz) $\longrightarrow$ 2FCWCz(2FCNCz) wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) funkcja $\tilde{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2)$ jest monotonicznie malejąca w obszarze Δ' podług każdej zmiennej λ_1, λ_2,

2) $|\tilde{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2)| \leq 1$ dla $(\lambda_1,\lambda_2) \subset \Delta$

$\tilde{\Gamma}(1,1) = -1$

$\tilde{\Gamma}(-1,-1) = 1.$

W dalszym ciągu syntezy wzór (29) trzeba doprowadzić do bardziej pożądanej postaci (26). Dokonuje się tego za pomocą związków:

$$(\cos\omega)^n = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} d_{2k}\cos 2k\omega, & \text{dla } n \text{ parzystego} \\ \sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} d_{2k+1}\cos(2k+1)\omega, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases} \tag{30}$$

które łatwo wyprowadzić przedstawiając kolejne potęgi zmiennej x poprzez kombinacje wielomianów Czebyszewa:

$$x^0 = T_0(x)$$

$$x^1 = T_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{1}{2}$$

$$x^3 = \frac{1}{4}T_3(x) + \frac{3}{4}T_1(x)$$

$$x^4 = \frac{1}{8}T_4(x) + \frac{1}{2}(x) + \frac{3}{8}$$

$$x^5 = \frac{1}{16}T_5(x) + \frac{5}{16}T_3(x) + \frac{5}{8}T_1(x)$$

Podstawiając $x = \cos\omega$ otrzymuje się:

$$(\cos\omega)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega$$

$$(\cos\omega)^3 = \frac{3}{4}\cos\omega + \frac{1}{4}\cos 3\omega$$

$$(\cos\omega)^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{1}{8}\cos 4\omega$$

$$(\cos\omega)^5 = \frac{5}{8}\cos\omega + \frac{5}{16}\cos 3\omega + \frac{1}{16}\cos 5\omega$$

Postępując tak dalej można określić wartości współczynników we wzorach (30). Współczynniki te przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Współczynniki wzoru (30)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1		1							
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$						
3		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$					
4	$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$				
5		$\frac{5}{8}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$			
6	$\frac{5}{16}$		$\frac{15}{32}$		$\frac{3}{16}$		$\frac{1}{32}$		
7		$\frac{35}{64}$		$\frac{21}{64}$		$\frac{7}{64}$		$\frac{1}{64}$	
8	$\frac{35}{128}$		$\frac{7}{16}$		$\frac{7}{32}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{128}$

Puste miejsca należy wypełnić zerami.

Wstawiając wreszcie wyrażenia (30) do wzoru (29) otrzymuje się wzór (26) ze współczynnikami $a_2(n_1,n_2)$, a następnie ze wzorów (27) oblicza się poszczególne wartości odpowiedzi impulsowej filtru dwuwymiarowego.

Przykład

Przekształcenie dane wzorem

$$\tilde{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2) = A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\lambda_1\lambda_2 + D, \tag{31}$$

gdzie A, B, C, D są rzeczywistymi stałymi, zwane jest przekształceniem Mc Clellana [4, 5]. Przekształcenie to zachowuje typ filtru, jeżeli spełnione są warunki:

$$\tilde{\Gamma}(1,1) = A + B + C + D = 1,$$
$$\tilde{\Gamma}(-1,-1) = -A - B + C + D = -1$$
$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\lambda_1} = A + C\lambda_2 \geq 0, \quad \text{dla każdego } \lambda_2 \in [-1,1]$$
$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\lambda_2} = B + C\lambda_1 \geq 0, \quad \text{dla każdego } \lambda_1 \in [-1,1],$$

skąd otrzymuje się warunki:

$$A + B = 1$$
$$C + D = 0$$
$$\bigwedge_{\lambda \in [-1,1]} A + \lambda C \geq 0, \quad B + \lambda C \geq 0$$

Przekształcenie (31) odwzorowuje 1FCNCz(1FCWCz) $\longrightarrow$ 2FCWCz(2FCNCz), jeżeli

$$\Gamma(1,1) = A + B + C + D = -1$$
$$\Gamma(-1,-1) = -A - B + C + D = 1$$
$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\lambda_1} = A + C\lambda_2 \leq 0, \quad \text{dla każdego } \lambda_2 \in [-1,1]$$
$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\lambda_2} = B + C\lambda_1 \leq 0, \quad \text{dla każdego } \lambda_1 \in [-1,1],$$

skąd otrzymuje się:

$$A + B = -1$$
$$C + D = 0$$
$$\bigwedge_{\lambda \in [-1,1]} A + \lambda C \leq 0, \quad B + \lambda C \leq 0.$$

Tak więc na przykład w pierwszym przypadku można wybrać:

$A = 0,5;\quad B = 0,5;\quad C = 0,4;\quad D = -0,4;$

a w drugim przypadku:

$A = -0,5;\quad B = -0,5;\quad C = 0,4;\quad D = -0,4.$

4. Przekształcenie typu 2FC → 2FC

Z punktu widzenia zastosowań celowe jest używanie przekształceń spektralnych odwzorowujących dwuwymiarowy filtr cyfrowy w inny cyfrowy filtr dwuwymiarowy. Niech $\hat{h}(z_1,z_2)$ będzie transmitancją 2FC. Za pomocą przekształcenia $G = (G_1,G_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 &= G_1(Z_1,Z_2) \\ z_2 &= G_2(Z_1,Z_2) \end{aligned} \tag{32}$$

odwzorowuje się ten filtr w inny filtr dwuwymiarowy o transmitancji:

$$\hat{h}_G(Z_1,Z_2) = \hat{h}\left[G_1(Z_1,Z_2),\ G_2(Z_1,Z_2)\right].$$

Jeżeli filtr wyjściowy h jest stabilny, to do stabilności filtru h_G wystarczy, aby $G_i(D^2) \subset D$ dla $i = 1,2$. Ponadto dla każdej pary częstotliwości $(\Omega_1, \Omega_2) \in \Delta$ musi istnieć para częstotliwości (ω_1,ω_2) taka, że:

$$e^{j\omega_1} = G_1(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = e^{j\Gamma_1(\Omega_1,\Omega_2)}$$

$$e^{j\omega_2} = G_2(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = e^{j\Gamma_2(\Omega_1,\Omega_2)}$$

Z analizy wzoru

$$\hat{h}_G(e^{j\Omega_1}, e^{j\Omega_2}) = \hat{h}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \hat{h}\left[e^{j\Gamma_1(\Omega_1,\Omega_2)},\ e^{j\Gamma_2(\Omega_1,\Omega_2)}\right]$$

wynika, że przekształcenie $G = (G_1,G_2)$ nie zmienia typu filtru wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje G_1, G_2 spełniają warunki twierdzenia 1 oraz że przekształcenie to jest odwzorowaniem 2FCNCz(2FCWCz) → 2FCWCz(2FCNCz) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje G_1 i G_2 spełniają warunki twierdzenia 2.

Przykładem może tu być przekształcenie spektralne odwzorowujące 2FCNCz o symetrii kołowej [9] w 2FCNCz o symetrii eliptycznej. Stosowne przekształcenie analogowe transformujące okrąg na elipsę ma postać:

$$s_1 = \frac{S_1}{\Omega_{10}}, \quad s_2 = \frac{S_2}{\Omega_{20}} \tag{33}$$

Wykorzystując przekształcenie biliniowe

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

zapisuje się wyrażenia (33) w postaci:

$$\frac{1 - z_i^{-1}}{1 + z_i^{-1}} = \frac{S_i}{\Omega_{10}}, \quad i = 1,2$$

skąd:

$$z_i = \frac{1 + \frac{S_i}{\Omega_{10}}}{1 - \frac{S_i}{\Omega_{10}}}, \quad i = 1,2$$

Podstawiając w miejsce S_1 i S_2 odpowiednie przekształcenia biliniowe otrzymuje się poszukiwane transformacje G_1, G_2:

$$z_i = \frac{1 + \frac{1}{\Omega_{10}} \frac{1 - Z_i^{-1}}{1 + Z_i^{-1}}}{1 - \frac{1}{\Omega_{10}} \frac{1 - Z_i^{-1}}{1 + Z_i^{-1}}} = \frac{(\Omega_{10} + 1)Z_i + (\Omega_{10} - 1)}{(\Omega_{10} - 1)Z_i + (\Omega_{10} + 1)} =$$

$$= G_i Z, \quad i = 1,2 \tag{34}$$

Przekształcenie (34) ma rozdzielone zmienne (rozpada się na dwa niezależne przekształcenia jednej zmiennej). Ze wzoru (34) uzyskuje się postać funkcji fazowych

$$\Gamma_i(\Omega_i) = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\Omega_{10}} \operatorname{tg} \frac{i}{2}\right), \quad i = 1,2$$

skąd wynika, że przekształcenie (34) spełniają warunki twierdzenia 1, a więc zachowują typ filtru.

5. Przekształcenia typu 1FA → 2FA → 2FC

Jedna z metod syntezy 1FCNOI bazuje na zaprojektowanym uprzednio filtrze analogowym, który za pomocą przekształceń biliniowych (11) transformuje się w pożądany filtr cyfrowy. Podobnie można postąpić w przypadku filtrów dwuwymiarowych. Zaprojektowany wcześniej 1FA o transmitancji $H_1(s)$ za pomocą przekształcenia $s = G(s_1, s_2)$ transformuje się w 2FA o transmitancji:

$$\hat{H}_2(s_1, s_2) = \hat{H}_1\left[G(s_1, s_2)\right]$$

Następnie filtr H_2 za pomocą przekształceń biliniowych (11) transformuje się w 2FC h_2. Przedstawioną tu metodę syntezy charakteryzuje schemat 1FA → 2FA → 2FC.

Jeżeli filtr H_1 jest stabilny, to filtr H_2 będzie stabilny, gdy $G(P^2) \subset P$.

Z równości

$$\hat{H}_2(j\omega_1, j\omega_2) = \hat{H}_1(j\omega) = H_1\left[G(j\omega_1, j\omega_2)\right]$$

wynika następująca własność funkcji G: dla dowolnych ω_1, ω_2 istnieje częstotliwość ω taka, że

$$j\omega = G(j\omega_1, j\omega_2) = j\Gamma(\omega_1, \omega_2)$$

Stąd:

$$\omega = \Gamma(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{j}\, G(j\omega_1, j\omega_2)$$

Symbolem Λ oznaczany będzie pierwszy kwadrant częstotliwościowy:

$$\Lambda = \left\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \geq 0,\ \ \omega_2 \geq 0\right\} = [0, \infty) \times [0, \infty).$$

Odpowiednikami twierdzeń 1 i 2 są:

Twierdzenie 3

Przekształcenie $s = G(s_1, s_2)$ zachowuje typ filtru wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) funkcja Γ jest ciągła i nieujemna na Λ,

2) $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2 \in \Lambda$ i $\|\vec{\omega}_1\| \geq \|\vec{\omega}_2\| \Rightarrow \Gamma(\vec{\omega}_1) \geq \Gamma(\vec{\omega}_2)$,

3) $\Gamma(0) = 0, \|\vec{\omega}\| \to \infty \quad \Gamma(\vec{\omega}) \to \infty$.

Twierdzenie 4

Przekształcenie $s = G(s_1, s_2)$ odwzorowuje 1FANCz (1FAWCz) $\longrightarrow$ 2FAWCz (2FANCz) wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) funkcja Γ jest ciągła i nieujemna na Λ,

2) $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \Lambda$ i $\|\vec{\omega}_1\| \geq \|\vec{\omega}_2\| \Rightarrow \Gamma(\vec{\omega}_1) \leq \Gamma(\vec{\omega}_2)$,

3) $\vec{\omega} \to \vec{0} \Rightarrow \Gamma(\vec{\omega}) \to \infty \quad \|\vec{\omega}\| \to \infty \quad \Gamma(\vec{\omega}) \to 0$.

6. Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono metodę syntezy dwuwymiarowych filtrów cyfrowych za pomocą tzw. przekształceń spektralnych. Zgodnie z tą metodą projektuje się najpierw jednowymiarowy filtr cyfrowy lub analogowy jednym z dobrze znanych sposobów. Może to być filtr SOI bądź też Butterwortha, Czebyszewa, Bessela lub eliptyczny. Następnie za pomocą specjalnego podstawienia $Z = G(z_1, z_2)$ zamienia się daną transmitancję jednowymiarową w pożądaną transmitancję dwuwymiarową. Cała istota metody polega na takim doborze funkcji $G(z_1, z_2)$, aby dany typ filtru jednowymiarowego przechodził w odpowiedni typ filtru dwuwymiarowego przy jednoczesnym zapewnieniu stabilności. W pracy podano cztery twierdzenia, na podstawie których można konstruować stosowane funkcje $G(z_1, z_2)$.

Zaletą metody jest jej duża prostota, bowiem projektowanie filtrów jednowymiarowych jest obecnie zagadnieniem dobrze rozpracowanym. Istnieje do tego celu wiele użytecznych algorytmów. Jej wadą jest pewna trudność w dokładnym określeniu kształtu charakterystyk częstotliwościowych filtrów dwuwymiarowych otrzymywanych poprzez przekształcenia spektralne z prototypów jednowymiarowych.

LITERATURA

[1] CHAKRABARTI S., MITRA S.K.: Design of two-dimensional digital filters via spectral transformations. Proc. IEEE June 1977, pp. 905-914.

[2] CROCHIERE R.E., RABINER L.R.: On the properties of frequency transformations for variable cut-off linear phase digital filters. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 684-686, Nov. 1976.

[3] HUANG T.S.: Stability of two-dimensional recursive filters. IEEE Trans. Audio Electroacoust., pp. 158-163, June 1972.

[4] MECKLENBRAUKER W.F.G., MERSEREAU R.M.: Mc Clellan transformations for two-dimensional digital filtering: II-Implementation. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 414-422, July 1976.

[5] MERSEREAU R.M., MECKLENBRAUKER W.F.G., QUATIERI T.F.JR.: Mc Clellan transformations for two-dimensional digital filtering: I-Design. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 405-414, July 1976.

[6] OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ, Warszawa 1979.

[7] PENDERGRASS N.A., MITRA S.K., JURY E.I.: Spectral transformations for two-dimensional digital filters. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 26-35, Jan. 1976.

[8] RABINER L.R., GOLD B.: Theory and applications of digital signal processing. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1975.

[9] SIWCZYŃSKI M.: Synteza dwuwymiarowych filtrów cyfrowych metodą podwójnych szeregów Fouriera. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka, z. 88, 1984.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Marian Bogucki

Wpłynęło do redakcji: 5.V.1983 r.

СИНТЕЗ ДВУХМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Р е з ю м е

В работе представлен метод трансформации переходной функции одномерного цифрового фильтра в двухмерную с помощью комплексной функции двух переменных, которую называют спектральным преобразованием. Сформулированы несколько теорем из которых вытекает метод синтеза спектральных преобразований для получения БИХ и КИХ-фильтров с заданными амплитудными характеристиками.

DESIGN OF TWO DIMENSIONAL DIGITAL FILTERS BY SPECTRAL TRANSFORMATIONS METHOD

S u m m a r y

In the paper the two dimensional transfer function from one dimensional transfer function is obtained using spectral transformations $z = G(z_1, z_2)$. The methods of design of spectral transformations for two dimensional band pass digital filters have been given.