ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ELEKTRYKA z. 88 Nr kol. 779

Andrzej DRYGAJŁO

Instytut Elektroniki
Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE ORTOGONALNYCH FUNKCJI TRÓJWARTOŚCIOWYCH DO ANALIZY WIDMOWEJ SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono uogólnioną metodę generowania zupełnych układów ortogonalnych funkcji trójwartościowych. Ukazano możliwości zastosowania ich jako funkcji bazowych do widmowego przetwarzania sygnałów dyskretnych, a w szczególności do analizy sygnałów w wybranych podprzedziałach określoności przy wykorzystaniu algorytmów szybkich transformacji względem tych funkcji.

1. Wprowadzenie

Problemem, który stał się w ostatnich latach szczególnie aktualny, jest zmniejszenie liczby operacji arytmetycznych, niezbędnych dla realizacji algorytmów analizy widmowej, a więc czasu pracy maszyny cyfrowej i ponoszonych kosztów. Studiując prace poświęcone przetwarzaniu sygnałów dyskretnych można zauważyć, że dwuwartościowe funkcje Walsha oraz trójwartościowe funkcje Haara, przed innymi po zespolonych funkcjach wykładniczych, wchodzą obecnie do praktyki analizy widmowej sygnałów. Dzięki swym właściwościom są one szczególnie dogodne do realizacji przetwarzania metodami cyfrowymi.

Od połowy lat siedemdziesiątych zainteresowano się możliwością tworzenia układów ortogonalnych funkcji trójwartościowych, stanowiących hybrydową wersję funkcji Walsha i Haara. Dotychczas opublikowane na ten temat prace nie wyczerpują tego zagadnienia.

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania stanowią próbę zebrania, usystematyzowania i uogólnienia wyników badań z zakresu generowania dyskretnych ortogonalnych funkcji przyjmujących jedynie wartości 1, -1 i 0 w przedziale określoności, jako funkcji bazowych w widmowej analizie sygnałów. Próba ta dotyczy otrzymania ogólnej metody wyznaczania układów zupełnych dyskretnych ortogonalnych funkcji trójwartościowych i ujednolicenia postaci wzorów służących do generowania tych funkcji w różnych uporządkowaniach. Uogólnienie obejmuje znane dotychczas układy ortogonalnych funkcji trójwartościowych, takich jak: uogólnione funkcje Haara [1] (w tym funkcje Haara [2] i zmodyfikowane funkcje Walsha-Hadamarda [3]), funkcje

Hadamarda-Haara [4], funkcje Her [5], funkcje S_H [6] i rozszerza je o nowe dotychczas nie publikowane.

2. Dyskretne ortogonalne funkcje trójwartościowe

Istnieją różne sposoby zapisu dyskretnych ortogonalnych funkcji trójwartościowych. Funkcje te nie posiadają jednorodnej definicji matematycznej, a różnorodne określenia powstawały w toku rozwoju zainteresowania nimi. Dogodne przedstawienie dyskretnych funkcji ortogonalnych dla potrzeb analizy widmowej sygnałów daje ujęcie macierzowe [7]. Zbiór N pierwszych funkcji podaje macierz o wymiarach $N \times N$, w której m-ty wiersz zawiera wartości m-tej dysktetnej funkcji ortogonalnej w punktach $n = 0,1,2,\ldots,$ $N-1$, gdzie $N = 2^p$; $p = 0,1,2,\ldots$. Tak zbudowana macierz stanowi macierz transformującą w zapisie dyskretnej transformacji względem danego układu funkcji ortogonalnych.

Elementy macierzy transformujących zawierających dyskretne ortogonalne funkcje trójwartościowe mogą być zdefiniowane przy wykorzystaniu binarnego zapisu argumentu n oraz wskaźnika m kolejnej funkcji układu.

W wyniku rozważań obejmujących studia porównawcze prac [1] ÷ [6] zaproponowano następujący wzór definiujący elementy macierzy transformujących, zawierających dyskretne ortogonalne funkcje trójwartościowe przyjmujące wartości 1,-1 i 0 w przedziale określoności:

$$d(m,n) = \begin{cases} \prod_{i=l_j+1}^{p-1} \delta_{m_i n_i} \prod_{i=0}^{l_j} (-1)^{m_i n_i} & \text{dla } m(k_j, l_j) \\ \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{m_i n_i} & \text{dla pozostałych } m \end{cases}$$

gdzie:

- $d(m,n)$ – element macierzy transformującej w m-tym wierszu i n-tej kolumnie,
- m_i, n_i – współczynniki binarnego rozwinięcia liczb m i n,
- k_j – wskaźnik pozycji najmłodszego niezerowego współczynnika rozwinięcia binarnego liczby m,
- l_j – wskaźnik pozycji współczynnika rozwinięcia binarnego liczby m uzależniony od k_j,
- $\delta_{m_i n_i}$ – symbol Kroneckera.

Dla definiowanego układu dyskretnych ortogonalnych funkcji trójwartościowych należy podać następujące ciągi wskaźników pozycji współczynników binarnego rozwinięcia liczby m:

$$\{k_j\} = \{k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{p-2}\}$$
$$\{l_j\} = \{l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{p-2}\}$$

gdzie: $\{k_j\} = 0$ lub $\{0,1\}$ lub ... $\{0,1,2,\ldots,p-2\}$,

$l_j = k_j, \ldots, k_{p-2}$; $l_j \leq l_{j+1}$.

Przykład

Dla N = 8 elementy macierzy transformujących zawierających różne układy dyskretnych ortogonalnych funkcji trójwartościowych otrzymane według definicji (1) przyjmują wartości:

$\{k_j\} = \{0\}$, $\{l_j\} = \{1\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0\,0\,0 \\ \boxed{0}\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \\ \boxed{0}\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ \boxed{1}\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ \boxed{1}\,1\,1 \\ m_2 m_1 m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\{k_j\} = \{0\}$, $\{l_j\} = \{0\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0\,0\,0 \\ \boxed{0\,0}\,1 \\ 0\,1\,0 \\ \boxed{0\,1}\,1 \\ 1\,0\,0 \\ \boxed{1\,0}\,1 \\ 1\,1\,0 \\ \boxed{1\,1}\,1 \\ m_2 m_1 m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\{k_j\} = \{0,1\} \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{array}$$

$$\{l_j\} = \{1,1\}$$

$$\begin{array}{c} 0\,0\,0 \\ \boxed{0}\,0\,1 \\ \boxed{0}\,1\,0 \\ \boxed{0}\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ \boxed{1}\,0\,1 \\ \boxed{1}\,1\,0 \\ \boxed{1}\,1\,1 \\ m_2 m_1 m_0 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{k_j\} = \{0,1\} \qquad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{array}$$

$$\{l_j\} = \{0,1\}$$

$$\begin{array}{c} 0\,0\,0 \\ \boxed{0\,0}\,1 \\ \boxed{0}\,1\,0 \\ \boxed{0\,1}\,1 \\ 1\,0\,0 \\ \boxed{1\,0}\,1 \\ \boxed{1}\,1\,0 \\ \boxed{1\,1}\,1 \\ m_2 m_1 m_0 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Współczynniki binarnego rozwinięcia liczby m, zakreślone prostokątem, decydują o przyjęciu przez elementy wiersza macierzy wartości 0, a współczynniki zakreślone owalem o przyjęciu przez pozostałe elementy wiersza macierzy wartości 1 lub -1. Za pomocą współczynników nie zakreślonych obliczane są wartości elementów macierzy według drugiej części wzoru (1).

3. Właściwości dyskretnych ortogonalnych funkcji trójwartościowych

Dyskretne funkcje trójwartościowe zdefiniowane za pomocą wzoru (1) tworzą układy ortogonalne i zupełne [8]. Oznacza to, że

$$\sum_{n=0}^{N-1} d(m,n)d(k,n) = 0 \quad \text{gdy} \quad m \neq k, \tag{2}$$

a każda funkcja dyskretna $\{f(n)\}$, dla której spełniony jest warunek:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n)d(m,n) = 0, \tag{3}$$

dla wszystkich $m = 0,1,2,\ldots,N-1$ jest równa 0 dla $n = 0,1,\ldots,N-1$.

Uporządkowanie funkcji w układzie funkcji ortogonalnych ma istotne znaczenie dla przetwarzania widmowego; decyduje ono bowiem o kształcie widma sygnału w stopniu podobnym jak zmiana funkcji bazowych [9]. Od niego jest także uzależniona techniczna realizacja przetwarzania. Dyskretne funkcje przyjmujące wartości 1, -1 i 0 w przedziale określoności zdefiniowane w niniejszej pracy za pomocą wzoru (1) mogą być przedstawione w każdym z uporządkowań znanych dla funkcji Walsha i Haara.

Macierz transformująca, zawierająca dyskretne funkcje trójwartościowe w uporządkowaniu naturalnym, posiada elementy, które mogą być otrzymane bezpośrednio za pomocą wzoru (1).

Macierz transformującą, zawierającą dyskretne funkcje trójwartościowe w uporządkowaniu diadycznym, można otrzymać korzystając ze wzoru (1) po dokonaniu tzw. inwersji binarnej m.

Dyskretne funkcje trójwartościowe mogą być również uporządkowane jak funkcje Haara. W tym przypadku elementy macierzy transformującej otrzymuje się na podstawie definicji (1) po inwersji binarnej m i uporządkowaniu liczb w grupach diadycznych zgodnie z narastającą ich wartością.

Funkcje te mogą być także uporządkowane sekwencyjnie, jak funkcje Walsha; wtedy elementy macierzy transformującej otrzymuje się na podstawie wzoru (1) po przekodowaniu postaci binarnej m w kod Graya i po inwersji binarnej.

4. Dyskretne transformacje względem ortogonalnych funkcji trójwartościowych

Wykorzystując macierzową postać układów dyskretnych ortogonalnych funkcji trójwartościowych jako macierzy transformujących, można sformułować definicje dyskretnych transformacji względem tych funkcji w postaci następujących równań macierzowych:

$$\underline{X}_D = \frac{1}{N} \underline{D}_N \underline{x}, \tag{4}$$

$$\underline{x} = N\underline{D}^{-1} \underline{X}_D, \tag{5}$$

gdzie:

$\underline{X}_D$ - wektor dyskretnego widma o elementach $X_D(m)$,

$\underline{x}$ - wektor dyskretnego sygnału o elementach $x(n)$,

$\underline{D}_N$ - ortogonalna macierz transformująca o wymiarach $N \times N$ i elementach $d(m,n)$,

$\underline{D}_N^{-1}$ - macierz odwrotna do macierzy $\underline{D}_N$.

Wzory (4) i (5) określają parę dyskretnych transformat względem ortogonalnego układu funkcji trójwartościowych; $\underline{X}_D$ jest prostą dyskretną transformatą, a $\underline{x}$ odwrotną dyskretną transformatą.

Praktyczna przydatność dyskretnych transformacji względem funkcji ortogonalnych dla potrzeb analizy widmowej sygnałów jest uwarunkowana możliwością budowy skutecznych algorytmów obliczeniowych do wyznaczania prostych i odwrotnych transformat. Zaproponowany sposób wyznaczania zupełnych układów ortogonalnych funkcji trójwartościowych jako funkcji bazowych w postaci macierzy transformujących pozwala nie tylko na poprawne sformułowanie podstaw widmowego przetwarzania sygnałów dyskretnych względem tych układów, lecz stanowi również podstawę metody szybkich transformacji, opartej na faktoryzacji macierzy transformujących. Opracowana [8] metoda szybkich transformacji względem różnych układów ortogonalnych funkcji trójwartościowych zdefiniowanych za pomocą wzoru (1) jest jednolita i wynika bezpośrednio ze sposobu wyznaczania tych układów. Pozwala również na opracowanie uniwersalnego algorytmu szybkich transformacji względem wszystkich układów funkcji bazowych otrzymanych w niniejszej pracy. Z uwagi na to, że zdefiniowane funkcje (1) przyjmują wartości 1, -1 i 0 w przedziale określoności, transformacja sygnału dyskretnego danego w punktach $n = 0,1,2,\ldots,N-1$, gdzie $N = 2^p$, $p = 0,1,2,\ldots$ do przestrzeni danego układu funkcji trójwartościowych wymaga jedynie wykonania od $N\log_2 N - N/2$ do $2(N-1)$ operacji dodawania i odejmowania na liczbach rzeczywistych, przy wykorzystaniu algorytmów szybkich transformacji.

5. Podsumowanie

W pracy sformułowano metodę wyznaczania zupełnych układów ortogonalnych dyskretnych funkcji trójwartościowych jako funkcji bazowych w widmowym przetwarzaniu sygnałów, uzyskując ujednolicenie postaci wzorów służących do generowania tych funkcji w różnych uporządkowaniach. Istniejące rozwiązania ograniczały problem do generowania pojedynczych układów ortogonalnych funkcji trójwartościowych przy dużej różnorodności stosowanych określeń. Przedstawione w pracy ujęcie problemu pozwoliło na uogólnienie obejmujące znane dotychczas układy zupełne ortogonalnych funkcji trójwartościowych i rozszerzające o nowe, dotychczas nie publikowane. Każdy ele-

ment transformaty wyznaczonej względem układu funkcji bazowych nie przyjmujących wartości zerowych w przedziale określoności charakteryzuje analizowany sygnał w całym przedziale określoności. W wielu przypadkach praktyki inżynierskiej wymagana jest informacja o zachowaniu się analizowanego sygnału w wybranych podprzedziałach określoności. Przy rozwiązywaniu tego typu problemów mogą być stosowane układy zupełne ortogonalnych funkcji przyjmujących wartości zerowe w przedziale określoności, zdefiniowane w niniejszej pracy. Zdaniem autora na rozważenie zasługują również możliwości zastosowania przedstawionych funkcji do adekwatnej analizy widmowej sygnałów binarnych i ternarnych, coraz bardziej powszechnych w związku z rozwojem techniki cyfrowej.

LITERATURA

[1] AJZENBERG N.N., RUD'KO V.P., SYSUJEW E.W.: Funkcji i diskretnoje prieobrazowanije Haara. Izw. AN SSSR, Techniczeskaja Kibernietika, no 6, 1975, ss. 86-94.

[2] KACZMARZ S., STEINHAUS H.: Tieoria ortogonalnych riadow. Tłumaczenie z niemieckiego pod redakcją i z dodatkiem Wilenkina N.Ja., Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1958.

[3] AHMED N., RAO K.R.: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin 1975.

[4] RAO K.R., NARASIMHAN M.A., REVULURI K.: Image Data Processing by Hadamard-Haar Transform. IEEE Trans. Comput., vol. C-24, No 9, September 1975, pp. 888-896.

[5] HARMUTH H.F.: Sequency Theory - Foundations and Applications. Academic Press, New York 1977.

[6] LUX P.: A Novel Set of Closed Orthogonal Functions for Picture Coding. AEU, Band 31, Heft 7/8, 1977, ss. 267-274.

[7] ANDREWS H.C.: Computer Techniques in Image Processing. Academic Press, New York 1970.

[8] DRYGAJŁO A.: Zastosowanie szybkich transformacji bazujących na funkcjach schodkowych do przetwarzania sygnałów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1983.

[9] SOBKOWSKI J.W.: Metoda cyfrowa widmowej analizy sygnałów względem funkcji Walsha przy zastosowaniu próbkowania integracyjnego. Rozprawa doktorska. WAT, Warszawa 1976.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji: 14.IV.1983 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРЁХЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе представлен обобщённый метод генерации полных систем ортогональных трёхзначных функций. Указаны возможности применения этих базисных функций в спектральной обработке дискретных сигналов, особенно при анализе сигналов в подинтервалах при использовании алгоритмов быстрого преобразования.

APPLICATION OF THREE-VALUE ORTHOGONAL FUNCTIONS FOR DISCRETE SIGNAL SPECTRAL ANALYSIS

S u m m a r y

In the paper a generalized method of generating complete orthogonal sets of three-value functions is introduced. They are useful as basis functions for discrete signal spectral processing, especially for signal analysis on the subintervals, using the fast transform algorithms.