ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ELEKTRYKA z. 88 Nr kol. 779

Bernard BARON

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

SCHEMAT ZASTĘPCZY IMPEDANCJI CEWKI O RDZENIU W KSZTAŁCIE WYDRĄŻONEGO WALCA PRZEWODZĄCEGO

Streszczenie: W pracy przeprowadzono analizę pola magnetycznego wewnątrz rdzenia przewodzącego cewki o kształcie wydrążonego walca. Uwzględniając zjawisko indukowania się prądów wirowych w rdzeniu, obliczono impedancję operatorową cewki, która stała się podstawą opracowania algorytmu syntezy schematu zastępczego tej cewki.

1. Wstęp

Znajomość zmian impedancji cewki zawierającej w swoim obwodzie magnetycznym materiał przewodzący ($\gamma \neq 0$) ma duże znaczenie techniczne. Dla większości tego typu układów podano wzory i metody pozwalające określić w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym zmiany rezystancji R i indukcyjności L w funkcji częstotliwości. W przypadku analizy tego typu układów w stanie nieustalonym parametry R i L są zmienne w czasie i uzależnione od wymuszenia. Problem określenia zmian impedancji np. dla pełnego i wydrążonego przewodu walcowego został rozwiązany w pracy [4] przez wprowadzenie schematu zastępczego będącego modelem impedancji układu. W pracach [7 i 8] zastosowano również metodę modelowania impedancji układu do określenia impedancji żłobka i linii dwuprzewodowej.

Schemat zastępczy impedancji cewki z umieszczoną wewnątrz kulą przewodzącą określono w pracy [5]. W przedstawionej pracy przeprowadzono syntezę modelu typu RL odpowiadającego zmianom impedancji cewki z rdzeniem w kształcie wydrążonego walca przewodzącego. Zmiany tej impedancji związane są z indukowaniem się prądów wirowych wewnątrz rdzenia cewki.

2. Pole magnetyczne w wydrążonym walcu przewodzącym

Niech dany jest wydrążony walec przewodzący o konduktywności γ, przenikalności magnetycznej μ i wymiarach geometrycznych podanych na rys. 1.

Ponadto zakłada się, że na powierzchni wydrążonego walca przewodzącego zadany jest wektor gęstości prądu powierzchniowego $\mathbf{i}$ w postaci:

$$\mathbf{i}(r,z,t) = \begin{cases} \frac{wi(t)}{2\pi r_1}\mathbf{k}_z & \text{dla } (-\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}) \wedge (r = r_1) \\ -\frac{wi(t)}{2\pi r_2}\mathbf{k}_z & \text{dla } (-\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}) \wedge (r = r_2) \\ \frac{wi(t)}{2\pi r}\mathbf{k}_r & \text{dla } (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \wedge (z = \frac{l}{2}) \\ -\frac{wi(t)}{2\pi r}\mathbf{k}_r & \text{dla } (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \wedge (z = -\frac{l}{2}), \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:

w - liczba zwojów cewki nawiniętych równomiernie na rdzeniu o kształcie wydrążonego walca,

i(t) - wartość chwilowa prądu cewki.

Przyjęcie warunków brzegowych w postaci (1) odpowiada pewnej idealizacji cewki rzeczywistej o w zwojach nawiniętych równomiernie, zwój obok zwoju, na rdzeniu o kształcie wydrążonego walca. Ponieważ zgodnie z założeniem (1) na powierzchni rdzenia nie ma składowej $\mathbf{i}_\varphi$ wektora gęstości prądu powierzchniowego, dlatego też w rzeczywistej cewce powinny być nawinięte dwie warstwy o tym samym kierunku nawinięcia, np. w prawo, przy czym druga warstwa powinna być układana od końca do początku nawinięcia pierwszej warstwy. W nawiniętej w ten sposób cewce strumień magnetyczny rozproszenia poza rdzeń o kształcie walca wydrążonego jest bardzo mały, co jest adekwatne z założeniem (1) a tym samym z warunkiem $\mathbf{i}_\varphi = 0$.

Istnienie prądów powierzchowych (1) powoduje indukowanie się w rdzeniu przewodzącym prądu o gęstości wektorowej posiadającej również te same składowe j_z i j_r

$$\mathbf{j}(r,z,t) = j_r(r,z,t)\mathbf{k}_r + j_z(r,z,t)\mathbf{k}_z (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \wedge (-\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}) \tag{2}$$

Wektorowi gęstości prądu w postaci (2) odpowiada więc potencjał wektorowy $\mathbf{A}(r,z,t)$ posiadający również tylko dwie składowe

$$\mathbf{A}(r,z,t) = A_r(r,z,t)\mathbf{k}_r + A_z(r,z,t)\mathbf{k}_z \tag{3}$$

Zgodnie ze wzorem (3) $A_\varphi = 0$, $\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$, a więc na mocy wzoru

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(r,z,t) = \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathbf{k}_\varphi = \mu H_\varphi(r,z,t)\mathbf{k}_\varphi \tag{4}$$

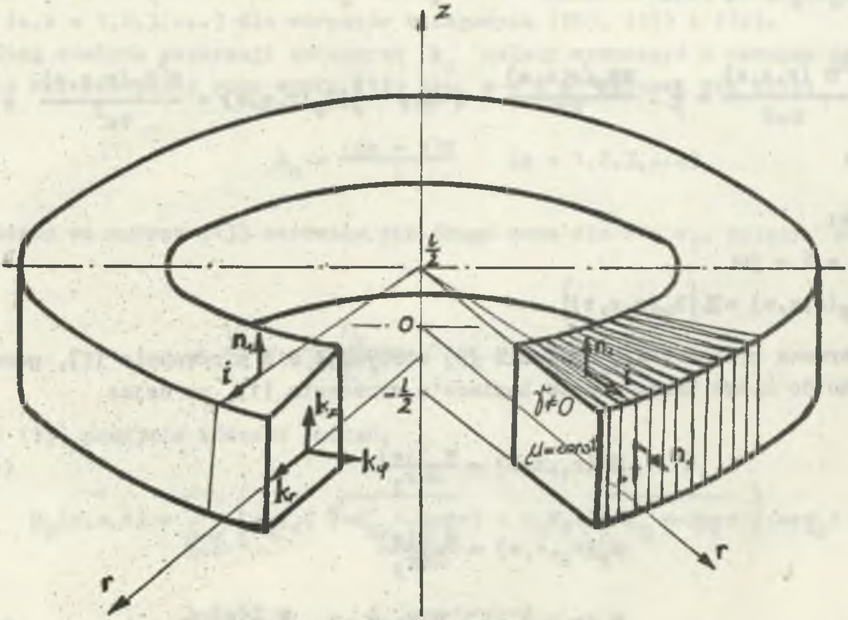
pole magnetyczne posiada tylko składową $H_\varphi(r,z,t)$.

Cyrkulacja wektora $\mathbf{H}(r,z,t)$ po okręgu C_r o dowolnym promieniu r w przyjętym walcowym układzie współrzędnych wynosi:

$$\oint_{C_r} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = 2\pi r H_\varphi(r,z,t) \tag{5}$$

Jeżeli okrąg C_r leży poza rozpatrywanym rdzeniem (tj. $r > r_2$ lub $r < r_1$), to nie istnieje różny od zera strumień wektora gęstości prądu przepływający przez dowolną powierzchnię rozpiętą na konturze C_r. Oznacza to, że na mocy prawa przepływu oraz relacji (5) pole magnetyczne na zewnątrz rdzenia w kształcie wydrążonego walca jest równe zeru. Fakt ten wykorzystany będzie do sformułowania warunków brzegowych dla pola magnetycznego wewnątrz wydrążonego walca przewodzącego.

Jak wiadomo [10], przy przejściu przez powierzchnię o zadanym prądzie powierzchniowym składowa styczna wektora natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}$



Rys. 1. Cewka o rdzeniu w kształcie wydrążonego walca

doznaje skoku o wartości $\mathbf{i} \times \mathbf{n}$, gdzie $\mathbf{n}$ - wektor jednostkowy normalny do powierzchni przewodzącej prąd (rys. 1).

$$H_{t_1} = H_{t_2} + \mathbf{i} \times \mathbf{n} \tag{6}$$

Ponieważ na zewnątrz rdzenia pole magnetyczne jest zerowe ($H_{t_2} = 0$), warunek brzegowy dla pola magnetycznego wewnątrz rdzenia przyjmuje postać:

$$H_{t_1} = \mathbf{i} \times \mathbf{n} \tag{7}$$

Pole magnetyczne wewnątrz wydrążonego walca przewodzącego o konduktywności γ i stałej przenikalności magnetycznej μ, posiadające w rozpatrywanym przypadku tylko składową H_φ, spełnia w układzie współrzędnych walcowych następujące równanie [10]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} = \mu\gamma \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \tag{8}$$

Mając na uwadze określenie impedancji operatorowej rozpatrywanej cewki należy zadziałać na lewą i prawą stronę równania (8) operatorem Laplace'a $\mathcal{L}\{\}$. Otrzymuje się wówczas:

$$\frac{\partial^2 H(r,z,s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi(r,z,s)}{\partial r} + \left(-s\mu\gamma - \frac{1}{r}\right) H_\varphi(r,z,s) + \frac{\partial^2 H_\varphi(r,z,s)}{\partial z^2} = 0, \tag{9}$$

gdzie:

$s = \sigma + j\omega$

$H_\varphi(r,z,s) = \mathcal{L}\left\{H_\varphi(r,z,t)\right\}$

Warunek brzegowy dla równania (9) otrzymuje się z równania (7), podstawiając do niego transformatę Laplace'a wyrażenia (1), co daje:

$$H_\varphi(r_1,z,s) = \frac{w\, I(s)}{2\pi r_1} \tag{10}$$

$$H_\varphi(r_2,z,s) = \frac{w\, I(s)}{2\pi r_2}$$

$$H_\varphi\left(r,-\frac{1}{2},s\right) = H_\varphi\left(r,\frac{1}{2},s\right) = \frac{w\, I(s)}{2\pi r} \tag{12}$$

gdzie:

I(s) - transformata Laplac'a prądu i(t).

Uwzględniając symetrię pola magnetycznego wewnątrz rdzenia (w przyjętym układzie współrzędnych walcowych - rys. 1 $H_\varphi(r,z,s) = H_\varphi(r,-z,s)$) oraz stosując metodę rozdzielenia zmiennych dla dwóch różnych ciągów λ_n i ϑ_n stałych separacji zmiennych otrzymuje się następującą postać całki ogólnej równania (9) (np. [6], [10]).

$$H_\varphi(r,z,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r\right) + b_n N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r\right)\right]\cos\lambda_n z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k J_1(\vartheta_k r) + d_k N_1(\vartheta_k r)\right]\mathrm{ch}\left(\sqrt{\vartheta_k^2 + s\mu\gamma}\,z\right), \tag{13}$$

gdzie:

J_1 - zwyczajna funkcja Bessela rzędu pierwszego,

N_1 - zwyczajna funkcja Neumanna rzędu pierwszego.

Konstrukcja całki ogólnej (13) równania (9) pozwala wyznaczyć ciągi stałych separacji zmiennych λ_n i ϑ_k oraz stałych całkowania a_n, b_n, c_k, d_k (n,k = 1,2,3,...) dla warunków brzegowych (10), (11) i (12).

Ciąg stałych separacji zmiennych λ_n należy wyznaczyć z warunku zerowania się pierwszej sumy wzoru (13) dla $z = \pm \frac{l}{2}$. Warunek ten daje:

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l} \qquad (n = 1,2,3,\dots) \tag{14}$$

Ażeby we wzorze (13) zerowała się druga suma dla $r = r_1$, należy przyjąć

$$c_k = \frac{f_k}{J_1(\vartheta_k r_1)}; \qquad d_k = -\frac{f_k}{N_1(\vartheta_k r_1)}.$$

Wzór (13) przyjmie wówczas postać:

$$H_\varphi(r,z,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r\right) + b_n N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r\right)\right]\cos\lambda_n z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} f_k Z_1(\vartheta_k r)\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\vartheta_k^2 + s\mu\gamma}\,z\right), \tag{15}$$

gdzie

$$Z_1(\nu_k r) = \frac{J_1(\nu_k r)}{J_1(\nu_k r_1)} - \frac{N_1(\nu_k r)}{N_1(\nu_k r_1)} \tag{16}$$

Ciąg stałych separacji zmiennych ν_k należy dobrać w ten sposób, ażeby zerowała się druga suma wzoru (15) dla $r = r_2$, tjm:

$$Z_1(\nu_k r) = 0 \qquad (k = 1,2,3,...) \tag{17}$$

Przyjmująo oznaczenia $\xi = \frac{r_2}{r_1} > 1$, $\nu_k r_1 = x_k$ oraz uwzględniając definicję (16) wraz z warunkiem (17) można zapisać:

$$\frac{J_1(\xi x_k)}{J_1(x_k)} - \frac{N_1(\xi x_k)}{N_1(x_k)} = 0 \tag{18}$$

Znajomość ciągu liczb rzeczywistych $\{x_k\}$ będących rozwiązaniem równania (18) pozwala wyznaczyć ciąg stałych separacji zmiennych $\nu_k = \frac{x_k}{r_1}$. Ciąg takich liczb $\{x_k\}$ istnieje, gdyż funkcje zwyczajne Bessela i Neumanna mają dla argumentów rzeczywistych przebiegi oscylacyjne [1].

Tabela 1

Miejsca zerowe x_m wyrażenia $Z_1(x_m) = \frac{J_1(\xi x_m)}{J_1(x_m)} - \frac{N_1(\xi x_m)}{N_1(x_m)}$ dla $\xi = 1,5$

m	1	2	3	4	5	6
x_m	6,3215	12,5863	18,8629	25,1426	31,4238	37,7056

Wyżej dobrane ciągi separacji zmiennych pozwalają oddzielnie wyznaczyć stałe całkowania a_n i b_b oraz f_k we wzorze (15) z warunków brzegowych (10), (11) i (12). Istotnie, uwzględniając we wzorze (15) warunek brzegowy (10) otrzymuje się:

$$H_\varphi(r,z,s) = \frac{w\,I(s)}{2\pi r_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1\right) + b_n N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1\right)\right]\cos\lambda_n z =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\lambda_n z \tag{19}$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l}$$

Współczynnik g_n można otrzymać z rozwinięcia na szereg Fouriera funkcji stałej ze względu na zmienną z $\frac{w\,I(s)}{2\pi r}$ w przedziale $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$

$$g_n = \frac{w\,I(s)}{2\pi r_1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}4}{(2n-1)\pi} \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{20}$$

Uwzględniając dla dowolnego n wzór (20) we wzorze (19) otrzymuje się:

$$a_n J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1\right) + b_n N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1\right) = \frac{w\,I(s)}{2\pi r_1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}4}{(2n-1)\pi} \tag{21}$$

Postępując analogicznie z warunkiem brzegowym (11) otrzymuje się:

$$a_n J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_2\right) + b_n N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_2\right) = \frac{w\,I(s)}{2\pi r_2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}4}{(2n-1)\pi} \tag{22}$$

Rozwiązując układ równań (21) i (22) ze względu na stałe a_n i b_n otrzymuje się:

$$a_n = \frac{2w\,I(s)(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{r_2 N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2\right) - r_1 N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1\right)}{r_1 r_2\left[J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1\right)N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2\right)-J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2\right)N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1\right)\right]} \tag{23}$$

$$b_n = \frac{2w\,I(s)(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{r_1 J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1\right) - r_2 J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2\right)}{r_1 r_2\left[J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1\right)N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2\right)-J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2\right)N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1\right)\right]} \tag{24}$$

W celu wyznaczenia stałych całkowania f_k we wzorze (15) należy skorzystać z warunku brzegowego (12). Otrzymuje się wówczas:

$$H_\varphi(r, \pm \frac{1}{2}, s) = \frac{w\, I(s)}{2\pi r} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \operatorname{ch}\left(\sqrt{\vartheta_k^2 + s\mu\gamma}\, \frac{1}{2}\right) Z_1(\vartheta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z_1(\vartheta_k r) \tag{25}$$

Jak wiadomo [9], funkcje $Z_1(\vartheta_k r)$ są ortogonalne w przedziale (r_1, r_2) z wagą $w(r) = r$, tj. zachodzi dla $k \neq l$ związek:

$$\int_{r_1}^{r_2} r Z_1(\vartheta_k r) Z_1(\vartheta_l r)\, dr = 0 \tag{26}$$

Można więc rozwinąć funkcję $\frac{w\, I(s)}{2\pi r}$ ze względu na r w przedziale (r_1, r_2) w szereg funkcji Bessela $Z_1(\vartheta_k r)$, przy czym współczynniki b_k tego szeregu (25) wyrażają się wzorem [9]:

$$b_k = \frac{1}{M_k} \int_{r_1}^{r_2} r\, \frac{w\, I(s)}{2\pi r}\, Z_1(\vartheta_k r)\, dr, \tag{27}$$

gdzie

$$M_k = \frac{r_2^2}{2}\left\{\left[Z_1(\vartheta_k r_2)\right]^2 - Z_0(\vartheta_k r_2) Z_2(\vartheta_k r_2)\right\} - \frac{r_1^2}{2}\left\{\left[Z_1(\vartheta_k r_1)\right]^2 - Z_0(\vartheta_k r_1) Z_2(\vartheta_k r_1)\right\} \tag{28}$$

Funkcje $Z_0(\vartheta_k r)$ i $Z_2(\vartheta_k r)$ występujące we wzorze (28) zgodnie z definicją (16) mają postać:

$$Z_0(\vartheta_k r) = \frac{J_0(\vartheta_k r)}{J_1(\vartheta_k r_1)} - \frac{N_0(\vartheta_k r)}{N_1(\vartheta_k r_1)} \tag{29}$$

$$Z_2(\vartheta_k r) = \frac{J_2(\vartheta_k r)}{J_1(\vartheta_k r_1)} - \frac{N_2(\vartheta_k r)}{N_1(\vartheta_k r_1)} \tag{30}$$

Jak wiadomo (np. [9]), między uogólnionymi funkcjami Bessela zachodzi związek:

$$Z_o(\vartheta_k r) + Z_2(\vartheta_k r) = \frac{2}{\vartheta_k r} Z_1(\vartheta_k r), \tag{31}$$

z którego wynika, że dla $r = r_2$

$$Z_o(\vartheta_k r_2) = - Z_2(\vartheta_k r_2) \tag{32}$$

Dla uogólnionych funkcji Bessela całkowanie (27) daje wynik (np. [9])

$$\int_{r_1}^{r_2} Z_1(\vartheta_k r)dr = \frac{1}{\vartheta_k}\left[Z_o(\vartheta_k r_1) - Z_o(\vartheta_k r_2)\right] \tag{33}$$

Uwzględniając wzory (33), (32), (28 i (17) we wzorze (27) otrzymuje się:

$$h_k = \frac{w\,I(s)}{\pi\vartheta_k} \cdot \frac{Z_o(\vartheta_k r_1) - Z_o(\vartheta_k r_2)}{r_2^2\left[Z_o(\vartheta_k r_2)\right]^2 - r_1^2\left[Z_o(\vartheta_k r_1)\right]^2} \tag{34}$$

Na mocy wzorów (25) i (34) stałe całkowania f_k występujące we wzorze (15) wynoszą ostatecznie:

$$f_k = \frac{w\,I(s)}{\pi\vartheta_k} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}(\sqrt{\vartheta_k^2 + s\mu\gamma}\,\frac{l}{2})} \cdot \frac{Z_o(\vartheta_k r_1) - Z_o(\vartheta_k r)}{r_2^2\left[Z_o(\vartheta_k r_2)\right]^2 - r_1^2\left[Z_o(\vartheta_k r_1)\right]^2} \tag{35}$$

Uwzględniając stałe całkowania (23), (24) i (35) we wzorze (15) otrzymuje się następujący wzór na pole magnetyczne wewnątrz wydrążonego walca przewodzącego cewki

$$H_\varphi(r,z,s) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2w\,I(s)}{(2n-1)\pi^2} \cdot \frac{\left[r_2 N_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_2) - r_1 N_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1)\right] J_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r) + \ldots}{r_1 r_2\left[J_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1) N_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_2) - \right.}$$

$$\ldots \frac{+ \left[r_1 J_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1) - r_2 J_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_2)\right] N_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r)}{\left. - J_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_2) N_1(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu\gamma}\,r_1)\right]} \cos\lambda_n z \; +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w\,I(s)}{\pi\vartheta_k}\cdot\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\vartheta_k^2+s\mu\gamma}\,z)}{\operatorname{ch}(\sqrt{\vartheta_k^2+s\mu\gamma}\,\frac{l}{2})}\cdot\frac{\left[Z_o(\vartheta_k r)-Z_o(\vartheta_k r_2)\right]Z_1(\vartheta_k r)}{r_2^2\left[Z_o(\vartheta_k r_2)\right]^2-r_1^2\left[Z_o(\vartheta_k r_1)\right]^2} \tag{36}$$

Wzór (36) będzie podstawą określenia impedancji operatorowej rozpatrywanej cewki.

3. Impedancja operatorowa cewki i jej własności

Znajomość pola magnetycznego $H_\varphi(r,z,s)$ wewnątrz rdzenia przewodzącego cewki pozwala określić całkowity strumień magnetyczny skojarzony z w zwojami tej cewki

$$w\Phi(s)=\mu w\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_{r_1}^{r_2}H_\varphi(r,z,s)\,dz\,dr \tag{37}$$

Impedancję operatorową cewki zdefiniować można następująco:

$$\mathcal{Z}(s)=R_o+w\,\frac{s\,\Phi(s)}{I(s)}=R_o+\mathcal{Z}_1(s), \tag{38}$$

gdzie:

R_o – rezystancja cewki dla prądu stałego.

Uwzględniając wyniki całkowania (37) funkcji (36) otrzymuje się zgodnie ze wzorem (38) następujący wzór:

$$\mathcal{Z}_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu w^2 4ls}{(2n-1)^2\pi^3\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}}\ldots$$

$$\ldots\frac{\left[r_2N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)-r_1N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)\right]\left[J_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)-J_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)\right]+}{r_1r_2\left[J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)-\right.}\ldots$$

$$\ldots\frac{+\left[r_1J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)-r_2J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)\right]\left[N_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)-N_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)\right]}{-J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)\Big]}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu w^2 2s}{\pi\vartheta_k^2\sqrt{\vartheta_k^2+s\mu\gamma}}\cdot\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\vartheta_k^2+s\mu\gamma}\,\frac{1}{2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{\vartheta_k^2+s\mu\gamma}\,\frac{1}{2})}\cdot\frac{\left[Z_o(\vartheta_k r_1)-Z_o(\vartheta_k r_2)\right]^2}{r_2^2\left[Z_o(\vartheta_k r_2)\right]^2-r_1^2\left[Z_o(\vartheta_k r_1)\right]^2} \tag{39}$$

W dalszym ciągu zbadane będą własności funkcji $\mathcal{Z}_1(s)$; tj. położenie jej biegunów oraz pozostałości tej funkcji w biegunach. W pierwszej kolejności zbadany będzie n-ty składnik pierwszej sumy wzoru (39)

$$\mathcal{Z}_n^{(1)}(s)=\frac{\mu w^2 4ls}{(2n-1)^2\pi^3\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}}\ldots$$

$$\ldots\frac{\left[r_2N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)-r_1N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)\right]\left[J_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)-J_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)\right]+}{r_1r_2\Big[J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)-}\ldots$$

$$\ldots\frac{+\left[r_1J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)-r_2J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)\right]\left[N_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)-N_o(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)\right]}{-J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)\Big]} \tag{40}$$

Jak wynika z konstrukcji funkcji (40), warunkiem koniecznym istnienia jej biegunów jest zerowanie się mianownika tej funkcji, tj.

$$\mathfrak{M}_n^{(1)}(s)=$$

$$=\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\left[J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)-J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_2)N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\,r_1)\right]=0 \tag{41}$$

Zerowanie się funkcji (41) dla $s = -\lambda_n^2 \frac{1}{\mu\gamma}$ odpowiada biegunom funkcji (40), gdyż jak można wykazać

$$\lim_{s \to -\lambda_n^2 \frac{1}{\mu\gamma}} \mathcal{L}_n^{(1)}(s) \neq \infty \tag{42}$$

Wynika z tego, że biegunom funkcji (40) mogą odpowiadać tylko zera funkcji (43)

$$\mathcal{M}_n^{(2)}(s) = J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r_1\right)N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r_2\right) - J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r_2\right)N_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r_1\right) \tag{43}$$

Jeżeli s nie jest liczbą rzeczywistą, to funkcje $J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r)$ i $N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r)$ nie posiadają zer. Jeżeli $(-\lambda_n^2-s\mu\gamma)$ jest liczbą ujemną, to funkcje $J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r)$ i $N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r)$ również nie posiadają zer [1]. Jeżeli natomiast $(-\lambda_n^2-s\mu\gamma)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią, a więc s jest rzeczywiste i ujemne, to funkcue $J_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r)$ i $N_1(\sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma}\, r)$ dla tych argumentów s mają przebiegi oscylacyjne o nieskończonej liczbie zer. Na ujemnej półosi rzeczywistej dla tych wartości s, dla których $s < -\frac{1}{\mu\gamma}\lambda_n^2$, wyrażenie

$$\vartheta = \sqrt{-\lambda_n^2-s\mu\gamma} \tag{44}$$

jest rzeczywiste dodatnie. Dlatego też zera funkcji (43) odpowiadają takiemu ciągowi dodatniemu ϑ_m, dla którego zachodzi równanie:

$$J_1(\vartheta_m r_1)N_1(\vartheta_m r_2) - J_1(\vartheta_m r_2)N_1(\vartheta_m r_1) = 0 \tag{45}$$

Jak wykazano w punkcie 2 pracy (wzory (16), (17) i (18)), istnieje nieskończony ciąg wartości ϑ_m, dla których zachodzi równanie (45). Wynika z tego, że zera funkcji (43) występują dla takich $s = s_{nm}^{(1)}$, które zgodnie ze wzorem (44) wynoszą

$$s_{nm}^{(1)} = -\frac{1}{\mu\gamma}\left(\lambda_n^2 + \vartheta_m^2\right) \qquad (n,m = 1,2,3,\dots) \tag{46}$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l}; \qquad \vartheta_m = \frac{x_m}{r_1}$$

$\nu_m r_1 = x_m$ – ciąg zer funkcji (18) a tym samym funkcji (45) dla ustalonego $\xi = \frac{r_2}{r_1}$.

Wzór (46) określa położenie biegunów funkcji (40). Pozostałości funkcji $\frac{1}{s}\mathcal{Z}_n^{(1)}(s)$ w tych biegunach wyrażają się wzorem:

$$\alpha_{nm}^{(1)} = \operatorname*{Res}_{s=s_{nm}^{(1)}}\left[\frac{1}{s}\mathcal{Z}_n^{(1)}(s)\right] = \frac{8w^2}{(2n-1)^2\pi^3 r_1 \gamma\xi\eta}\,\frac{\left[\xi J_1(\xi x_m) - J_1(x_m)\right]\left[Z_0(x_m) - Z_0(\xi x_m)\right]}{\xi Z_0(x_m) J_1(x_m) - Z_0(x_m) J_1(x_m)} \tag{47}$$

gdzie

$$\xi = \frac{r_2}{r_1}; \qquad \eta = \frac{r_1}{l}$$

W celu otrzymania pełnej informacji o funkcji operatorowej $\mathcal{Z}_1(s)$ należy zbadać dowolny k-ty składnik drugiej sumy wzoru (39)

$$\mathcal{Z}_k^{(2)}(s) = \frac{\mu w^2 2s}{\pi\nu_k}\,\frac{\left[Z_0(\nu_k r_1) - Z_0(\nu_k r_2)\right]^2}{r_2^2\left[Z_0(\nu_k r_2)\right]^2 - r_1^2\left[Z_0(\nu_k r_1)\right]^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\nu_k^2 + s\mu\gamma}\,\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\nu_k^2 + s\mu\gamma}\,\operatorname{ch}\left(\sqrt{\nu_k^2 + s\mu\gamma}\,\frac{l}{2}\right)} \tag{48}$$

Jak wynika z konstrukcji funkcji (48) warunkiem koniecznym istnienia jej biegunów jest zerowanie się mianownika tej funkcji, tj.

$$\mathcal{N}_k^{(1)}(s) = \sqrt{\nu_k^2 + s\mu\gamma}\,\operatorname{ch}\left(\sqrt{\nu_k^2 + s\mu\gamma}\,\frac{l}{2}\right) \tag{49}$$

Zerowanie się funkcji (49) dla $s = -\frac{1}{\mu\gamma}\nu_k^2$ nie odpowiada biegunom funkcji (48), gdyż jak można wykazać

$$\lim_{s \to -\frac{1}{\mu\gamma}\nu_k^2} \mathcal{Z}_k^{(2)}(s) \neq \infty \tag{50}$$

Biegunom funkcji (48) odpowiadają więc tylko zera funkcji

$$\mathcal{N}_k^{(2)}(s) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{\nu_k^2 + s\mu\gamma}\,\frac{l}{2}\right) = \cos\left(\sqrt{-\nu_k^2 - s\mu\gamma}\,\frac{l}{2}\right) \tag{51}$$

Widać więc, że zerowanie się funkcji (51) występuje dla takich s rzeczywistych ujemnych, dla których

$$\sqrt{-\nu_k^2 - s\mu\gamma}\,\frac{l}{2} = \frac{(2i-1)\pi}{2} \tag{52}$$

Z równania (52) wynika

$$s_{ki}^{(2)} = -\frac{1}{\mu\gamma}(\nu_k^2 + \lambda_i^2), \tag{53}$$

gdzie

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{l} \qquad (i = 1,2,3,\ldots)$$

W celu zbadania zachowania się funkcji (48) w otoczeniu biegunów (53) należy określić jej pozostałości w tych biegunach. Wynoszą one

$$\alpha_{ki}^{(2)} = \operatorname*{Res}_{s=s_{ki}^{(2)}}\left[\frac{1}{s}\mathcal{X}_k^2(s)\right] = \frac{8w^2}{\pi x_k^2 \gamma r_1}\,\frac{\eta\left[Z_o(x_k) - Z_o(\xi x_k)\right]^2}{\xi^2\left[Z_o(\xi x_k)\right]^2 - \left[Z_o(x_k)\right]^2}, \tag{54}$$

gdzie

$\xi = \frac{r_2}{r_1}$; $\eta = \frac{r_1}{l}$

x_k – ciąg liczb spełniających równanie (18) dla ustalonego ξ.

Badając zachowanie się funkcji $\mathcal{X}_n^{(1)}(s)$ i $\mathcal{X}_k^{(2)}(s)$ w nieskończoności można wykazać, że

$$\lim_{s\to-\infty}\left[\frac{1}{s}\mathcal{X}_n^{(1)}(s)\right] = 0 \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{55}$$

$$\lim_{s\to-\infty}\left[\frac{1}{s}\mathcal{X}_k^{(2)}(s)\right] = 0 \qquad (k = 1,2,3,\ldots) \tag{56}$$

Oznacza to, że dla funkcji $\mathcal{X}_1(s)$ określonej wzorem (39)

$$\lim_{s\to-\infty}\left[\frac{1}{s}\mathcal{X}_1(s)\right] = 0 \tag{57}$$

Wyznaczenie pozostałości funkcji $\mathcal{X}_n^{(1)}(s)$ i $\mathcal{X}_k^2(s)$ w jej biegunach oraz zbadanie zachowania się tych funkcji w nieskończoności pozwala na rozwinięcie funkcji $\mathcal{X}_1(s)$ (wzór (39)) na ułamki proste.

4. Synteza schematu zastępczego

Z badań funkcji operatorowych $\mathcal{Z}_n^{(1)}$ i $\mathcal{Z}_k^{(2)}(s)$ wynika, że można je przedstawić w postaci nieskończonych szeregów Fostera [3]

$$\mathcal{Z}_n^{(1)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^{(1)} s}{s + s_{nm}^{(1)}} \tag{58}$$

$$\mathcal{Z}_k^{(1)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ki}^{(2)} s}{s + s_{ki}^{(2)}} \tag{59}$$

gdzie $\alpha_{nm}^{(1)}$, $\alpha_{ki}^{(2)}$, $s_{nm}^{(1)}$, $s_{ki}^{(2)}$ - wyrażają się odpowiednio wzorami (47), (54), (46) i (53).

Ze wzorów (58) i (59) wynika, że impedancja $\mathcal{Z}_1(s)$ określona wzorem (39) może być wyrażona w postaci następującego rozwinięcia Fostera

$$\mathcal{Z}_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^{(1)} s}{s + s_{nm}^{(1)}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ki}^{(2)} s}{s + s_{ki}^{(2)}} \tag{60}$$

Porównując wzory (46) i (53) można zauważyć, że

$$s_{nm}^{(1)} = s_{ki}^{(2)} = s_{nm} \quad \text{dla} \quad (k = m) \wedge (i = n) \tag{61}$$

Zmieniając więc we wzorze (60) kolejność sumowania otrzymuje się:

$$\mathcal{Z}_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm} s}{s + s_{nm}}, \tag{62}$$

gdzie:

$$s_{nm} = -\frac{1}{\mu\gamma}(\lambda_n^2+\nu_m^2) = -\frac{1}{\mu\gamma r_1^2}\left[(2n-1)^2\pi^2\eta^2+x_m^2\right] \tag{63}$$

$$\alpha_{nm} = \alpha_{nm}^{(1)} + \alpha_{nm}^{(2)} =$$

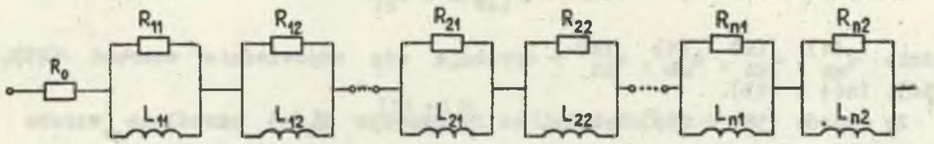
$$= \frac{8w^2}{\pi\gamma r_1}\left[Z_o(x_m) - Z_o(\xi x_m)\right]\left\{\frac{1}{\pi^2(2n-1)^2\xi\eta}\,\frac{\xi J_1(\xi x_m) - J_1(x_m)}{\xi Z_o(\xi x_m)J_1(x_m) - Z_o(x_m)J_1(\xi x_m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_m^2}\cdot\frac{\eta\left[Z_o(x_m) - Z_o(\xi x_m)\right]}{\xi^2\left[Z_o(\xi x_m)\right]^2 - \left[Z_o(x_m)\right]^2}\right\} \tag{64}$$

Jak wiadomo, każdemu składnikowi sumy (62) odpowiada układ elektryczny będący równoległym połączeniem rezystancji R_{nm} z indukcyjnością L_{nm}, przy czym

$$R_{nm} = \alpha_{nm} \tag{65}$$

$$L_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{-s_{nm}} \tag{66}$$



Rys. 2. Schemat zastępczy cewki

Uwzględniając wzory (63) i (64) we wzorach (65) i (66) można otrzymać:

$$R'_{nm} = \frac{\gamma r_1}{w^2} R_{nm} = \frac{8}{\pi}\left[Z_o(x_m) - Z_o(\xi x_m)\right]\left\{\frac{1}{\pi^2(2n-1)^2\xi\eta}\cdot\frac{\xi J_1(\xi x_m) - J_1(x_m)}{\xi Z_o(\xi x_m)J_1(x_m) - Z_o(x_m)J_1(\xi x_m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_m^2}\,\frac{\eta\left[Z_o(x_m) - Z_o(\xi x_m)\right]}{\xi^2\left[Z_o(\xi x_m)\right]^2 - \left[Z_o(x_m)\right]^2}\right\} \tag{67}$$

$$L'_{nm} = \frac{1}{w^2\mu r_1} L_{nm} = \frac{8}{\pi}\,\frac{Z_o(x_m) - Z_o(\xi x_m)}{(2n-1)^2\pi^2\eta^2 + x_m^2}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2\xi\eta}\cdot\frac{\xi J_1(\xi x_m) - J_o(x_m)}{\xi Z_o(\xi x_m)J_1(x_m) - Z_o(x_m)J_1(\xi x_m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_m^2}\cdot\frac{\eta\left[Z_o(x_m) - Z_o(\xi x_m)\right]}{\xi^2\left[Z_o(\xi x_m)\right]^2 - \left[Z_o(x_m)\right]^2}\right\} \tag{68}$$

Funkcje R'_{nm} i L'_{nm} zależne od dwóch zmiennych $\xi = \frac{r_2}{r_1}$ i $\eta = \frac{r_1}{l}$ pozwalają przy danych μ, γ, w, r_1 określić parametry R_{nm} i L_{nm} występujące w dwójniku przedstawionym na rys. 2. W ten sposób otrzymano ogólny algorytm syntezy schematu zastępczego cewki.

Tabela 2

Rezystancje i indukcyjności względne R'_{nm} L'_{nm}
określone wzorami (67) i (68)
dla parametrów $\eta = 1$, $\xi = 1,5$ oraz $n,m = 1,2,3,4$

R'_{nm}					
m \ n	1	2	3	4	...
1	2,09757	0,60217	0,482538	0,449578	...
2	0,018269	0,0029829	0,00170	0,001423	...
3	1,747208	0,236054	0,115163	0,0818561	...
4	0,0176108	0,00219733	0,000964	0,0006245	...
.	.	.	.	.	...

$L'_{nm}\,10^{-3}$					
m \ n	1	2	3	4	...
1	9,77759	3,28649	1,45847	0,79595	...
2	1,05019	0,083279	0,019989	0,007254	...
3	0,511819	0,141054	0,875659	0,059589	...
4	0,271594	0,0272061	0,0082316	0,00342704	...
.	,	.	.	.	...

5. Zakończenie

W pracy wyprowadzono wzór na impedancje cewki w kształcie wydrążonego walca przewodzącego oraz określono odpowiadający jej równoważny schemat zastępczy.

Dla rdzenia ferromagnetycznego, w przypadku stanu ustalonego sinusoidalnie zmiennego, przyjęcie stałej przenikalności magnetycznej $\mu \neq \mu_0$ wewnątrz wydrążonego walca nie powoduje dla wielu zagadnień przy ograniczonych amplitudach wektora indukcji magnetycznej poważniejszych błędów. Natomiast zastosowanie otrzymanego modelu przy $\mu \neq \mu_0$ do analizy stanów nieustalonych jest dopuszczalne.

LITERATURA

[1] ANTONOWICZ J.: Tablice funkcji. PWN, Warszawa 1969.

[2] GLINKA T.: Analiza równania permeancji szeregowego obwodu magnetycznego ze szczeliną powietrzną przy uwzględnieniu prądów wirowych indukowanych w rdzeniu. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVIII, 1979, z.4.

[3] GUILLEMIN E.A.: Synthesis of passive network, Wiley, New York 1957.

[4] HRYŃCZUK J.: Schematy zastępcze dla impedancji pola elektromagnetycznego, Archiwum Elektrotechniki, t. XII, z. 1, 1963.

[5] LIPIŃSKI W.: Zastępczy schemat impedancji cewki z umieszczoną wewnątrz kulą przewodzącą. Rozprawy Elektrotechniczne, t. XXIV, z. 1, 1978.

[6] MOON P., SPENCER D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[7] SIKORA R., LIPIŃSKI W.: Schemat zastępczy impedancji żłobkowej uwzględniający dwuwymiarowe wypieranie prądu. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, z. 1, 1975.

[8] SIKORA R., LIPIŃSKI W.: Model RL impedancji linii dwuprzewodowej z uwzględnieniem wypierania prądu. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, z. 2, 1975.

[9] SIKORA R., LIPIŃSKI W.: Stała czasowa procesów dyfuzyjnych w walcu o skończonej długości, Pomiary, Automatyka, Kontrola, nr 3, 1975.

[10] SZULKIN P., POGORZELSKI S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji: 16.IV.1983 r.

СХЕМА ПОЛНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ С ПРОВОДЯЩИМ СЕРДЕЧНИКОМ

Р е з ю м е

В статье дан анализ магнитного поля внутри цилиндрического проводящего сердечника катушки.

Учитывая эффект индукций вихревых токов в сердечнике, вычислено операторное сопротивление, которое принято базисом во время разработки алгоритма синтеза схем этой катушки.

EQUIVALENT SCHEME OF IMPEDANCE OF THE INDUCTOR WITH THE CONDUCTED CORE FORMED AS THE HOLLOWED CYLINDER

S u m m a r y

The analysis of magnetic field in side the conducted core formed as the hollowed cylinder is made. The operational impedance of the inductor is appointed taking into consideration eddy currents in the core. That impedance is the base for design algorithm of the equivalent scheme of the inductor.