Ewa SOWA-SADOWSKA

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

MOCE W UKŁADACH TROJFAZOWYCH O PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

Streszczenie. Przedstawiono sposób oszacowania podstawowych mocy układu 3-fazowego oraz wartości skutecznych przebiegów wykorzystując funkcje korelacyjne układu. Wyprowadzono związki dla funkcji korelacyjnych korespondujące z podstawowymi równaniami mocy. Pokazano relacje dla funkcji korelacyjnych układu 3-fazowego w przypadku znikania mocy deformacji K.

Rozważane są układy trójfazowe o przebiegach napięcia i prądu dowolnych, lecz o skończonej mocy. Układy te scharakteryzujemy dwoma wektorami:

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} U_a(t) \\ U_b(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{I}(t) = \begin{bmatrix} I_a(t) \\ I_b(t) \\ I_c(t) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

których składowe reprezentują funkcje symboliczne stowarzyszone z przebiegami rzeczywistymi napięć i prądów fazowych, tzn.:

$$\begin{aligned} U_k(t) &= u_k(t) - jH\left\{u_k(t)\right\} \\ I_k(t) &= i_k(t) - jH\left\{i_k(t)\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

k = a, b, c.

Dla wektorów tych określimy funkcje autokorelacji napięcia i prądu zdefiniowane jako:

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T \mathbf{U}^T(t)\mathbf{U}^*(t-\tau)dt \\ \Phi_{ii}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T \mathbf{I}^T(t)\mathbf{I}^*(t-\tau)dt, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

$U^T(t)$, $I^T(t)$ – są transponowanymi macierzami odpowiednio $U(t)$, $I(t)$,

$U^*(t)$, $I^*(t)$ – są macierzami o elementach sprzężonych względem elementów macierzy $U(t)$, $I(t)$,

T – jest czasem obserwacji przebiegów napięć i prądów.

Zachodzi:

$$\Phi_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \left[U_a(t), U_b(t), U_c(t)\right] \begin{bmatrix} U_a^*(t-\tau) \\ U_b^*(t-\tau) \\ U_c^*(t-\tau) \end{bmatrix} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \left[U_a(t)U_a^*(t-\tau) + U_b(t)U_b^*(t-\tau) + \right.$$

$$\left. + U_c(t)U_c^*(t-\tau)\right] dt = \Phi_{uu}^a(\tau) + \Phi_{uu}^b(\tau) + \Phi_{uu}^c(\tau) =$$

$$= \sum_{k=a,b,c} \Phi_{uu}^k(\tau), \tag{4}$$

przy czym

$$\Phi_{uu}^k(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T U_k(t)U_k^*(t-\tau)dt$$

$k = a, b, c$

jest symboliczną funkcją stowarzyszoną z przebiegiem rzeczywistej funkcji autokorelacji $\varphi_{uu}^k(t)$ napięcia fazowego, tzn.:

$$\Phi_{uu}^k(t) = \varphi_{uu}^k(t) - jH\left\{\varphi_{uu}^k(t)\right\} \tag{5}$$

oraz

$$\varphi_{uu}^k(t) = \mathrm{Re}\left\{\Phi_{uu}^k(t)\right\}$$

$$\left(\varphi_{uu}^k(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k(t)u_k(t-\tau)dt\right).$$

Ponieważ dla $\tau = 0$:

$$\Phi_{uu}^{k}(0) = \varphi_{uu}^{k}(0) = U_k^2, \tag{6}$$

gdzie:

U_k - jest wartością skuteczną napięcia fazowego k-tej fazy, więc

$$\Phi_{uu}(0) = \sum_{k=a,b,c} U_k^2 = U_m^2 \tag{7}$$

U_m - jest wartością skuteczną napięcia kolektywnego dla układu trójfazowego.

Stąd:

$$U_m = \sqrt{\sum_{k=a,b,c} U_k^2} = \sqrt{\Phi_{uu}(0)} =$$

$$= \sqrt{\Phi_{uu}^{a}(0) + \Phi_{uu}^{b}(0) + \Phi_{uu}^{c}(0)} \tag{8}$$

Analogicznie dla funkcji autokorelacji prądu $\Phi_{ii}(t)$ układu trójfazowego zachodzi

$$\Phi_{ii}(\tau) = \sum_{k=a,b,c} \Phi_{ii}^{k}(\tau), \tag{9}$$

gdzie:

$$\Phi_{ii}^{k}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} I_k(t) I_k^{*}(t-\tau)dt$$

$k = a, b, c$

jest symboliczną funkcją stowarzyszoną z przebiegiem rzeczywistej funkcji autokorelacji prądu przewodowego $\varphi_{ii}^{k}(\tau)$.

Ponieważ:

$$\Phi_{ii}^{k}(0) = \varphi_{ii}^{k}(0) = I_k^2, \tag{10}$$

gdzie:

I_k - jest wartością skuteczną prądu przewodowego k-tej fazy, więc

$$\Phi_{ii}^{k}(0) = \sum_{k=a,b,c} I_k^2 = I_m^2 \qquad (11)$$

I_m - jest wartością skuteczną prądu kolektywnego układu trójfazowego.

Stąd:

$$I_m = \sqrt{\sum_{k=a,b,c} I_k^2} = \sqrt{\Phi_{ii}(0)} =$$

$$= \sqrt{\Phi_{ii}^{a}(0) + \Phi_{ii}^{b}(0) + \Phi_{ii}^{c}(0)} \qquad (12)$$

Określimy obecnie funkcję korelacji napięciowo-prądowej $\Phi_{ui}(t)$ dla układu 3-fazowego następująco:

$$\Phi_{ui}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T U^T(t) I^*(t-\tau) dt \qquad (13)$$

Łatwo pokazać, że:

$$\Phi_{ui}(t) = \sum_{k=a,b,c} \Phi_{ui}^{k}(t), \qquad (14)$$

gdzie:

$$\Phi_{ui}^{k}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T U_k(t) I_k^*(t-\tau) dt$$

k = a, b, c

jest symboliczną funkcją stowarzyszoną z przebiegiem rzeczywistej funkcji korelacji wzajemnej $\varphi_{ui}^{k}(t)$ napięcia fazowego i prądu przewodowego.

$$(\varphi_{ui}^{k}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k(t) i_k(t-\tau) dt).$$

Ponieważ dla podstawowych mocy układu zachodzi:

$$\Phi_{ui}^{k}(0) = S_k = P_k + jQ_k, \tag{15}$$

(S_k - jest mocą symboliczną k-tej fazy)

więc:

$$\Phi_{ui}(0) = \sum_{k=a,b,c} \Phi_{ui}^{k}(0) = \sum_{k=a,b,c} S_k = \sum_{k=a,b,c} (P_k + jQ_k) =$$

$$= P + jQ \tag{16}$$

(P,Q - moce czynna i bierna układu trójfazowego).

Zachodzi również:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\Phi_{ui}(0)\right\} = \varphi_{ui}(0) \tag{17}$$

Wykorzystując związki dla podstawowych mocy [3], dla mocy symbolicznej układu 3-fazowego otrzymujemy:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1 + \mathrm{Sgn}\omega)\bar{\Phi}_{ui}(\omega)d\omega \tag{18}$$

($\bar{\Phi}_{ui}(\omega)$ - jest transformacją Fouriera funkcji korelacji napięciowo-prądowej).

Dla mocy modułowej M uzyskujemy:

$$M = U_m I_m = \sqrt{\Phi_{uu}(0)\Phi_{ii}(0)} = \sqrt{\left[\sum_k \Phi_{uu}^{k}(0)\right]\left[\sum \Phi_{ii}^{k}(0)\right]} \tag{19}$$

k = a, b, c.

Dokonajmy rozkładu ortogonalnego prądu układu tak jak w pracach [1], [2]:

$$I(t) = I_w(t) + I_d(t), \tag{20}$$

gdzie:

$$I_w(t) = YU(t), \quad I_d(t) = I(t) - I_w(t)$$

U(t) - jest wektorem odniesienia napięcia,

$$Y = \frac{P - jQ}{U_m^2}$$

i rozważmy następującą funkcję interkorelacji:

$$\Phi_{ii}^{d,i}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T I_d^T(t)I^*(t-\tau)dt \tag{21}$$

Zachodzi:

$$\Phi_{ii}^{d,i}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T I_d^T(t)I^*(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T I_d^T(t)\cdot$$

$$\cdot\left[I_w^*(t-\tau) + I_d^*(t-\tau)\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T I_d^T(t)I_w^*(t-\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T I_d^T(t)I_d^*(t-\tau)dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T \left[I(t) - I_w(t)\right]^T Y^*U^*(t-\tau)dt + \Phi_{ii}^{d}(\tau) =$$

$$= Y^* \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T \left[I^T(t)U^*(t-\tau) - I_w^T(t)U^*(t-\tau)\right]dt +$$

$$+ \Phi_{ii}^{d}(\tau) = Y^*\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T I^T(t)U^*(t-\tau)dt -\right.$$

$$\left.- Y\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T U^T(t)U^*(t-\tau)dt\right\} + \Phi_{ii}^{d}(\tau) \tag{22}$$

Zatem otrzymujemy:

$$\Phi_{ii}^{d,i}(\tau) = Y^*\left\{\Phi_{iu}(\tau) - Y\Phi_{uu}(\tau)\right\} + \Phi_{ii}^{d}(\tau) \tag{23}$$

$\Phi_{iu}(\tau)$ - jest korelacją prądowo-napięciową układu 3-fazowego

$$\Phi_{iu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T I^T(t)U^*(t-\tau)dt$$

$\Phi_{uu}(\tau)$ - jest funkcją autokorelacji napięcia układu zdefiniowaną wg wzoru (3),

$\Phi_{ii}^d(\tau)$ - jest funkcją autokorelacji przebiegów stowarzyszonych z przebiegiem prądów deformacji $I_d(\tau)$.

Z drugiej strony mamy:

$$\Phi_{ii}^{d,i}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T I_d^T(t)I^*(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \Big[I(t) -$$

$$- YU(t)\Big]^T I^*(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T I^T(t)I^*(t-\tau)dt -$$

$$- \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T YU^T(t)I^*(t-\tau)dt =$$

$$= \Phi_{ii}(\tau) - Y\,\Phi_{ui}(\tau) \tag{24}$$

Porównując wyprowadzone zależności (23) i (24) dla funkcji korelacyjnych układu 3-fazowego otrzymujemy następujący związek:

$$\Phi_{ii}(\tau) - Y\Phi_{ui}(\tau) = Y^*\left\{\Phi_{iu}(\tau) - Y\Phi_{uu}(\tau)\right\} + \Phi_{ii}^d(\tau) \tag{25}$$

Dla $\tau = 0$ zachodzi:

$$\Phi_{ii}(0) - Y\Phi_{ui}(0) = Y^*\left\{\Phi_{iu}(0) - Y\Phi_{uu}(0)\right\} + \Phi_{ii}^d(0) \tag{26}$$

lub (ze względu na ortogonalność rozkładu prądu (20)):

$$\Phi_{ii}(0) - Y\Phi_{ui}(0) = \Phi_{ii}^d(0), \tag{27}$$

co oznacza znany związek dla prądów:

$$I_m^2 - Y(P + jQ) = I_{dm}^2 \tag{28}$$

(I_{dm} - wartość skuteczna kolektywna prądu deformacji układu trójfazowego)

i prowadzi do znanego równania dla podstawowych mocy układu 3-fazowego

$$M^2 - (P^2 + Q^2) = U_m^2 I_{dm}^2 = K^2 \tag{29}$$

(M,K - odpowiednio moc modułowa i deformacji występujące w prostopadłościanie mocy).

Funkcja $\Phi_{ii}^d(\tau)$ występująca we wzorze (25) jest miarą deformacji prądu $\mathbf{I}(t)$ układu 3-fazowego od napięcia wzbudzenia $\mathbf{U}(t)$, miarą odkształcenia prądu od charakteru zasilania, miarą mocy deformacji K.

Transformując równanie (25) wg Fouriera otrzymujemy:

$$\bar{\Phi}_{ii}^d(\omega) = \bar{\Phi}_{ii}(\omega) - Y\bar{\Phi}_{ui}(\omega) - Y^*\left\{\bar{\Phi}_{iu}(\omega) - Y\bar{\Phi}_{uu}(\omega)\right\} \tag{30}$$

Ponieważ:

$$\bar{\Phi}_{iu}(\omega) = \bar{\Phi}_{ui}^*(\omega),$$

więc:

$$\bar{\Phi}_{ii}^d(\omega) = \bar{\Phi}_{ii}(\omega) + |Y|^2\,\bar{\Phi}_{uu}(\omega) - 2\mathrm{Re}\left\{Y\bar{\Phi}_{ui}(\omega)\right\} \tag{31}$$

Istnienie $\bar{\Phi}_{ii}^d(\omega)$ jest wynikiem słabej korelacji napięciowo-prądowej w układzie.

Moc deformacji K znika, jeśli dla funkcji korelacyjnych układu zachodzi:

$$\bar{\Phi}_{ii}(\omega) + |Y|^2\,\bar{\Phi}_{uu}(\omega) = 2\mathrm{Re}\left\{Y\bar{\Phi}_{ui}(\omega)\right\} \tag{32}$$

Moc deformacji układu jest równa zeru, jeśli dla każdej fazy k układu mamy:

$$I_k(t) = YU_k(t), \tag{33}$$

gdzie

$$Y = \mathrm{const.}$$

Łatwo wówczas można pokazać, że dla funkcji korelacyjnych przebiegów odbiornika zachodzą następujące związki [1]:

$$\Phi_{ui}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T U^T(t)I^*(t-\tau)dt = Y^*\Phi_{uu}(\tau)$$

$$\Phi_{iu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T I^T(t)U^*(t-\tau)dt = Y\Phi_{uu}(\tau) \tag{34}$$

$$\Phi_{ii}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T I^T(t)I^*(t-\tau)dt = |Y|^2\Phi_{uu}(\tau)$$

a odbiornik pobiera wówczas moce czynną P i bierną Q.

Gdy $K = 0$, zachodzą związki (34), to równanie (25) (mnożąc je dodatkowo przez $\Phi_{uu}(\tau)$) dla podstawowych funkcji korelacyjnych układu przyjmuje postać:

$$\Phi_{ii}(\tau)\Phi_{uu}(\tau) = |\Phi_{ui}(\tau)|^2 \tag{35}$$

Podsumowanie

Rozważono możliwość oszacowania podstawowych mocy układu 3-fazowego i wartości skutecznych przebiegów w oparciu o funkcje korelacyjne układu: napięciową, prądową, napięciowo-prądowe. Pokazano, że funkcje autokorelacji $\Phi_{uu}(\tau)$, $\Phi_{ii}(\tau)$ układu są sumą funkcji autokorelacji poszczególnych faz (wzory (4) i (9)), podobnie zachodzi dla korelacji napięciowo-prądowej (zależność (14)). Funkcje korelacji powiązano z mocami układu 3-fazowego i wyprowadzono równania korespondujące z podstawowymi równaniami mocy (zależności (25), (27)). Zależności te pozwalają na oszacowanie przebiegów odkształcenia w układzie 3-fazowym jedynie na podstawie znajomości przebiegów czasowych napięć i prądów. Pokazano związki dla funkcji korelacyjnych w przypadku znikania mocy deformacji K.

LITERATURA

[1] SOWA E.: Minimalizacja mocy dystorsji w układach o przebiegach odkształconych. Praca doktorska - Politechnika Śląska, 1982.

[2] NOWOMIEJSKI Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka 15, 1963, praca habilitacyjna.

[3] NOWOMIEJSKI Z., SOWA E.: Teoria mocy układów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka 49, 1977.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Marian Bogucki

Wpłynęło do redakcji: 15.VI.1983 r.

МОЩНОСТИ В ТРЁХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПРОБЕГАМИ

Р е з ю м е

В работе представлен способ оценки основных мощностей трёхфазной электрической схемы а также действующих значений пробегов при помощи корреляционных функций схемы. Выведены связи для корреляционных функций, согласующиеся с основными уравнениями мощностей. Показаны отношения для корреляционных функций трёхфазной электрической схемы в случае нулевой мощности деформации.

POWERS IN THE THREE PHASE ELECTRIC NON SINUSOIDAL CIRCUIT

S u m m a r y

This paper presents the way of basic powers and r.m.s. values estimation using correlation functions of the circuit. The relations which correspond to the basic power equations for correlation functions were found. The relations for the correlation functions of the three-phase electric circuit in the case of the distortion power K vanishing have been shown.