ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: ELEKTRYKA z. 88 Nr kol. 779

Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O ISTNIENIU PEWNYCH ROZWIĄZAŃ ZEWNĘTRZNEGO PROBLEMU DIRICHLETA DLA RÓWNANIA LAPLACE'A

Streszczenie. W artykule przeprowadzono dyskusję istnienia rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla pola elektrostatycznego w obszarze wielospójnym. Stwierdzono, że nie istnieje rozwiązanie w postaci potencjału warstwy podwójnej, natomiast istnieje w postaci sumy potencjału warstwy podwójnej i potencjału pochodzącego od układu ładunków punktowych lub też w postaci sumy potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej.

1. Wstęp

Rozwiązywanie zagadnień brzegowych w teorii pola elektromagnetycznego dla pól statycznych i quasi-stacjonarnych przeprowadza się najczęściej przez sprowadzenie układu równań Maxwella uzupełnionych związkami materiałowymi do układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego, tzn. równań Laplace'a lub Poissona z niewiadomymi funkcjami skalarnymi lub wektorowymi, zwanymi potencjałami,

Problem istnienia rozwiązań tych zagadnień dla obszarów wielospójnych nawet w przypadkach najprostszych jest często narzucony z góry bądź wręcz pomijany (np. [4], str. 67, 79) w literaturze dotyczącej elektrodynamiki. W artykule przeprowadzono częściową analizę tego zagadnienia, wykorzystując teorię równań całkowych.

2. Formalizacja zagadnienia brzegowego

Przyjmijmy następujący model (rys. 1) układu polowego: niech w przestrzeni euklidesowej R^3 (stanowiącej jak wiadomo([5], str. 12) rozmaitość współrzędnościową opartą na grupie ortogonalnej) wyposażonej w pole skalarne przenikalności dielektrycznej δ znajdują się dyfeomorficzne obrazy klasy C_m $(m \geq 2)$ skończonej liczby $n \in N$ kul domkniętych, wszystkie rozłączne między sobą.

Zgodnie z powyższą definicją obszary wypełnione dielektrykiem określają wzory:

$$\Omega = R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$$

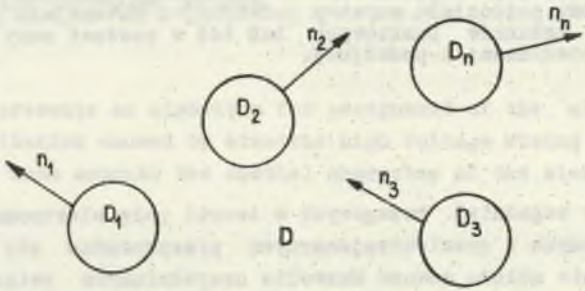
$$\Omega_i = \bar{\Omega}_i \setminus \partial\Omega_i \qquad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

gdzie:

Ω - obszar nieograniczony wypełniony dielektrykiem doskonałym,

Ω_i - obszary ograniczone wypełnione dielektrykiem doskonałym,

$\partial\Omega_i$ - brzeg obszaru Ω_i; $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega_i$ - brzeg obszaru Ω.



Rys. 1. Rzut w płaszczyźnie R^2 modelu układu polowego

Przyjmuje się, że normalna do brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω jest skierowana do wnętrza tego obszaru (rys. 1).

Pole elektryczne w obszarze Ω i w obszarach Ω_i opisują równania elektrostatyki ([4], str. 67):

$$\varepsilon_{klm}\partial_l E_m = 0 \tag{2}$$

$$k,l,m \in \{1,2,3\}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \partial_k D_k = \rho \tag{3}$$

Funkcje D_k, E_k są składowymi funkcji wektorowych natężenia i indukcji pola elektrycznego w ośrodku, a ε_{klm} oznacza symbol permutacyjny Ricciego.

Funkcja ρ określa objętościowy rozkład ładunku w obszarze Ω i w obszarach Ω_i.

Zakładamy, że ośrodek (dielektryk wypełniający obszar Ω i obszary Ω_i) jest liniowy, jednorodny, izotropowy i pozbawiony ładunków swobodnych. Z powyższego założenia wynika, że pomiędzy wektorem indukcji a wektorem natężenia pola elektrycznego zachodzi zależność:

$$D_k = \varepsilon E_k; \qquad k \in \{1,2,3\}; \quad \varepsilon \in \text{const} \tag{4}$$

gdzie:

ε - funkcja przenikalności dielektrycznej ośrodka.

Pole elektryczne w obszarze Ω i w obszarach Ω_i jest bezwirowe, a więc rozwiązania układu równań (2), (3), (4) można poszukiwać w postaci funkcji skalarnej V, zwanej potencjałem pola i określonej wzorem

$$E_k = -\partial_k V; \qquad k \in \{1,2,3\} \tag{5}$$

Wykorzystując wzór (5) sprowadza się układ równań (2), (3), (4) po prostych przekształceniach do równania Laplace'a

$$\sum_{k=1}^{3} \partial_k \partial_k V = 0 \tag{6}$$

w obszarze Ω i w obszarach Ω_i.

Zewnętrzny problem Dirichleta w elektrostatyce dla równania (6) formułuje się następująco:

Znaleźć funkcję harmoniczną w Ω regularną w nieskończoności i spełniającą na brzegu obszaru Ω warunki:

$$V|_{\partial\Omega_i} = v_i; \quad \begin{cases} \bigwedge\limits_{i \neq j} \; v_i|_{\partial\Omega_j} = 0 \\ i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ v_i \in \text{const}(\partial\Omega_i) \end{cases} \tag{7}$$

3. Sprowadzenie problemu brzegowego do układu równań całkowych

Poszukujemy rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (6) w postaci potencjału warstwy podwójnej określonego wzorem:

$$W(M) = \sum_{i=1}^{n} W_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \mu_i(Q_i) \frac{\cos(\overline{Q_iM}, n_{Q_i})}{|\overline{Q_iM}|^2} dS_{Q_i} \tag{8}$$

$$Q_i \in \partial\Omega_i$$
$$M \in \Omega$$

gdzie:

μ_i - funkcje zwane gęstościami warstwy podwójnej spełniające warunek:

$$\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{1,\dots,n\}}} \mu_i\Big|_{\partial\Omega_j} = 0 \tag{9}$$

$|\overline{Q_iM}|$ - odległość pomiędzy punktami Q_i, M,

n_{Q_i} - normalna zewnętrzna do brzegu $\partial\Omega_i$ w punkcie Q_i.

Jeżeli funkcje μ_i są ograniczone i całkowalne w sensie Riemanna na brzegach $\partial\Omega_i$ $(i = 1,\dots,n)$, to odpowiednio potencjał W jest w obszarze Ω i w obszarach Ω_i funkcją analityczną ([1], str. 52). Na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω potencjał $W(P_i)(P_i \in \partial\Omega_i)$ jest określony całką niewłaściwą zbieżną jednostajnie ([2], ss. 325, 329).

Zakładając, że funkcje $\mu_i \in C_0(\partial\Omega_i)$ (badanie regularności potencjałów i gęstości warstwy pojedynczej i podwójnej będzie przedmiotem odrębnej publikacji) oraz że brzegi $\partial\Omega_i$ są klasy C_k $(k \geq 2)$ ([1], str. 52), można wykazać przy niewielkiej modyfikacji dowodu dla obszaru jednospójnego, że wartości graniczne potencjału warstwy podwójnej (8) przy dążeniu punktu $M \in \Omega$ do punktu $P \in \partial\Omega_i$ są określone identycznymi wzorami jak dla obszaru jednospójnego.

Stąd i ze wzoru (7) uzyskuje się układ n równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z funkcjami niewiadomymi μ_i.

$$V_j = -2\pi\mu_j(P_j) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \mu_i(Q_i) \frac{\cos(\overline{Q_iP_j}, n_{Q_i})}{|\overline{Q_iP_j}|^2} dS_{Q_i} \tag{10}$$

$$P_i, Q_i \in \partial\Omega_i,$$
$$i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Chcąc wykorzystać teorię Fredholma do analizy równań całkowych (10) należy utworzyć układ równań sprzężonych z równaniami (10).

W tym celu sformułujemy wewnętrzny problem Neumanna dla równania (6): Znaleźć funkcję harmoniczną w obszarach $\partial\Omega_i$, która spełnia na brzegach $\partial\Omega_i$ $(i = 1,\dots,n)$ warunki:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial_n(w)}\right|_{\partial\Omega_i} = g_i; \qquad i \in \left\{1,\dots,n\right\}, \tag{11}$$

gdzie:

$\left.\frac{\partial V}{\partial_n(w)}\right|_{\partial\Omega_i}$ - wartość pochodnej normalnej funkcji V na brzegu $\partial\Omega_i$ (przy dążeniu punktu $M \in \Omega_i$ do brzegu $\partial\Omega_i$ po normalnej),

g_i - funkcje zadane na brzegu $\partial\Omega_i$ i spełniające warunek

$$\bigwedge_{\substack{i\neq j\\ i,j \in \left\{1,\dots,n\right\}}} g_i\Big|_{\partial\Omega_j} = 0 \tag{12}$$

Poszukujemy rozwiązania wewnętrznego problemu Neumanna dla równania (6) w postaci potencjału warstwy pojedynczej

$$V(M) = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \frac{\nu_i(Q_i)}{|Q_iM|^2}\, dS_{Q_i} \tag{13}$$

$$M \in \Omega_i$$
$$Q_i \in \partial\Omega_i$$

gdzie:

ν_i - funkcje zwane gęstościami warstwy pojedynczej określone na brzegu $\partial\Omega$ i spełniające warunki:

$$\bigwedge_{\substack{i\neq j\\ i,j \in \left\{1,\dots,n\right\}}} \nu_i\Big|_{\partial\Omega_j} = 0 \tag{14}$$

Można wykazać ([1], ss. 47-51), że jeśli funkcje ν_i są ograniczone i całkowalne w sensie Riemanna na brzegach $\partial\Omega_i$, to odpowiednio potencjał warstwy pojedynczej V jest funkcją ciągłą w przestrzeni R^3 oraz analityczną w obszarze Ω i w obszarach Ω_i.

Pochodną normalną potencjału warstwy pojedynczej określamy wzorem:

$$\frac{\partial V}{\partial n}(M) = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \vartheta_i(Q_i) \frac{\cos(\overline{MQ_i}, n_{P_i})}{|\overline{Q_iM}^2|} dS_{Q_i} \tag{15}$$

$$P_iQ_i \in \partial\Omega_i$$
$$M \in \Omega_i$$

Można wykazać, że jeśli funkcje $\vartheta_i \in C_0(\partial\Omega_i)$ to wartości graniczne pochodnej normalnej (15) przy dążeniu do brzegów Ω_i z wnętrza obszarów $\partial\Omega_i$ są określone identycznymi wzorami jak dla obszaru jednospójnego. Wykorzystując te wzory oraz wzór (11) uzyskuje się układ n równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z niewiadomymi funkcjami ϑ_i:

$$g_j(P_j) = 2\pi\vartheta_j(P_j) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \vartheta_i(Q_i) \frac{\cos(\overline{P_jQ_i}, n_{P_j})}{|\overline{Q_iP_j}|^2} \tag{16}$$

$$P_i, Q_i \in \partial\Omega_i$$
$$i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Układ równań całkowych (10), (16) można zapisać w postaci:

$$V_j = -2\pi\mu_j(P) + \lambda \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(Q) K_{ij}(P,Q) dS_Q \tag{10'}$$

$$g_j(P) = 2\pi\vartheta_j(P) + \lambda \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(Q) \underset{\sim}{K}_{ij}(P,Q) dS_Q, \tag{16'}$$

gdzie: $P,Q \in \partial\Omega$

$$K_{ij}(P,Q) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\overline{Q_iP_j}, n_{Q_i})}{|\overline{Q_iP_j}|^2} & \text{dla } P \in \partial\Omega_i;\ Q \in \partial\Omega_j \\ 0 & \text{dla } P \notin \partial\Omega_i;\ Q \notin \partial\Omega_j \end{cases} \tag{10''}$$

$$\underset{\sim}{K}_{ij}(P,Q) = \begin{cases} \dfrac{\cos(P_jQ_i, n_{P_j})}{|\overline{Q_iP_j}|^2} & \text{dla } P \in \partial\Omega_i;\ Q \in \partial\Omega_j \\ 0 & \text{dla } P \notin \partial\Omega_i;\ Q \notin \partial\Omega_j \end{cases} \tag{16''}$$

Tworząc obszar

$$\partial\Omega' = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega^i,$$

gdzie obszary $\partial\Omega^i$ $(i = 2,\dots,n)$ powstają przez równoległe przesunięcie obszaru $\partial\Omega = \partial\Omega^1$ tak by

$$\bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \partial\Omega^i \cap \partial\Omega^j = 0$$

i definiując funkcje $v(P)$, $g(P)$, $\mu(P)$, $\nu(P)$, $M(P,Q)$, $\underset{\sim}{M}(P,Q)$, których dziedziną jest obszar $\partial\Omega'$ (współrzędne punktów w obszarach $\partial\Omega'$ i $\partial\Omega$ oznacza się tak samo)

$$v(P^j) = v_j(P) \tag{17}$$

$$g(P^j) = g_j(P) \qquad \left\{ \begin{array}{c} P^j \triangleq P^1 = P \in \partial\Omega \quad \text{dla} \quad P^j \in \partial\Omega^j \\ j \in \{1,\dots,n\} \end{array} \right. \tag{18}$$

$$\mu(P^j) = \mu_j(P) \tag{19}$$

$$\nu(P^j) = \nu_j(P) \tag{20}$$

$$M(P^i,Q^j) = K_{ij}(P,Q) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P^i \triangleq P^1 = P; \quad P^i \in \partial\Omega^i; \quad P \in \partial\Omega \\ Q^j \triangleq Q^1 = Q; \quad Q^j \in \partial\Omega^j; \quad Q \in \partial\Omega \\ i,j \in \{1,\dots n\} \end{array} \right. \tag{19'}$$

$$\underset{\sim}{M}(P^i,Q^j) = \underset{\sim}{K}_{ij}(P,Q \tag{20'}$$

można zapisać układ równań całkowych (10), (16) ([3], t.II, str. 4) w postaci układu dwóch równań całkowych Fredholma z niewiadomymi funkcjami

$$\mu(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial\Omega'} \mu(Q) M(P,Q) dS_Q - \frac{\lambda}{2\pi} v(P) \tag{21}$$

$$\nu(P) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial\Omega'} \nu(Q) \underset{\sim}{M}(P,Q) dS_Q + \frac{\lambda}{2\pi} g(P) \tag{22}$$

dla parametru $\lambda = 1$.
Jądra układu równań całkowych (21), (22) są sprzężone.

4. Analiza równań całkowych

Przy przyjętym założeniu o powierzchniach $\partial\Omega_i$ jądra równań całkowych (21), (22) posiadają oszacowania ([1], str. 128, [2], str. 355):

$$\left| \frac{\cos(\overrightarrow{Q_iP_j}, n_{Q_i})}{2\pi |\overrightarrow{Q_iP_j}|^2} \right| \leq \frac{c_{ij}}{|Q_iP_j|}; \quad c_{ij} \in R^+; \; i,j \in \{1,\dots,n\} \tag{23}$$

$$\left| \frac{\cos(\overline{P_jQ_i}, n_{P_i})}{2\pi|\overline{Q_iP_j}|^2} \right| \leq \frac{c_{ij}}{|Q_iP_j|}; \quad c_{ij} \in R^+; \quad i,j \in \{1,\dots,n\}, \tag{24}$$

a zatem równania te są słabo osobliwe i stosuje się do nich teoria Fredholma.

W pracy [1] (str. 137) wykazano, że liczba $\lambda = 1$ jest wartością własną jądra równania (22), a ponieważ równania (21), (22) są sprzężone, to jest ona również wartością własną jądra równania (21) związanego z zewnętrznym problemem Dirichleta. Równania jednorodne

$$\vartheta(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega'} \vartheta(Q)\underline{M}(P,Q)dS_Q \tag{25}$$

$$\mu(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega'} \mu(Q)M(P,Q)dS_Q \tag{25}$$

posiadają więc rozwiązania niezerowe.

Wyznaczenie tych rozwiązań nosi nazwę zagadnienia Robina. Wykorzystując metodę kolejnych przybliżeń wykazano ([1], str. 161), że rozwiązaniem zagadnienia Robina jest ciąg niezależnych liniowo funkcji dla równania (25) ρ_i; $i = (1,2,\dots,n)$, spełniających warunki:

$$\int_{\partial\Omega_i} \rho_j(Q_j)dS_{Q_i} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ 1 & \text{dla} \quad i = j \end{cases} \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \tag{26}$$

Są to więc funkcje własne równania (25).

Z trzeciego twierdzenia Fredholma ([3], t.I, str.58) wynika, że równanie (21) dla $\lambda = 1$ posiada rozwiązanie, gdy spełnione są warunki ortogonalności funkcji własnych ρ_i równania (25) względem funkcji v, określonej wzorem (17), tzn. zgodnie ze wzorami (7), (26), warunki:

$$\int_{\partial\Omega} v_i\rho_i(Q)dS_Q = v_i = 0; \qquad i \in \{1,\dots,n\} \tag{27}$$

Ze wzoru (27) wynika, że rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci potencjału warstwy podwójnej nie istnieje dla niezerowych warunków brzegowych określonych wzorem (7). Wiadomo, że funkcja V harmoniczna, regularna w nieskończoności, posiada oszacowanie:

$$|V(M)| \leq \frac{c_1}{|\overline{OM}|}; \qquad c_1 \in R^+ \tag{28}$$

gdzie:

$|\overrightarrow{OM}|$ - odległość bieżącego punktu M od początku układu współrzędnych.

Potencjał warstwy podwójnej w obszarze nieograniczonym spełnia warunek:

$$|W(M)| \leq \frac{c_2}{|\overrightarrow{OM}|^c}; \qquad c_2 \in R^+, \tag{29}$$

skąd widać, że ograniczenie zbioru rozwiązań problemu Dirichleta spełniających warunek (28) do zbioru rozwiązań spełniających warunek (29) prowadzi do braku rozwiązań omawianego problemu. Poszukajmy rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta (podobnie jak np. w pracy [3], t.II, str.49) w postaci sumy potencjału warstwy podwójnej i potencjału pochodzącego od układu n ładunków punktowych α_i umieszczonych w punktach $A_i \in \Omega_i$; $i = 1,2,\ldots,n$, tzn. w postaci:

$$W^x M = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \mu_i(Q_i) \frac{\cos(\overrightarrow{MQ_i}, n_{Q_i})}{|\overrightarrow{Q_iM}|^2} dS_{Q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{|\overrightarrow{A_iM}|}; \qquad M \in \Omega \tag{30}$$

Zamiast równania całkowego (21) należy rozpatrywać teraz równanie

$$\mu(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial\Omega'} \mu(Q) M(P,Q) dS_Q - \frac{\lambda}{2\pi} \left(v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{|\overrightarrow{A_iP}|}\right) \tag{31}$$

dla $\lambda = 1$,

przy czym

$$|\overrightarrow{A_iP^j}| = |\overrightarrow{A_iP}| \text{ dla } P^j \in \partial\Omega^j;\ P \in \partial\Omega;\ A_i \in \Omega_i; \quad i,j \in \{1,\ldots,n\} \tag{31'}$$

Jądro równania całkowego (31) jest takie samo jak równania (21), a więc zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma równanie (31) dla $\lambda = 1$ posiada rozwiązanie, gdy spełnione są następujące warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial\Omega} \left(v_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{|\overrightarrow{A_iQ}|}\right) \rho_j(Q) dS_Q = 0; \qquad j \in \{1,\ldots,n\} \tag{32}$$

$$A_i \in \Omega_i,\ Q \in \partial\Omega,$$

którym po uwzględnieniu wzoru (27) można nadać postać:

$$V_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_{ij} = 0; \quad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{33}$$

gdzie:

$$V_{ij} = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_j(Q)}{|\overline{A_iQ}|} dS_Q; \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \tag{34}$$

Według wzorów (26), (34) funkcje V_{ij} są stałe w obszarach $\bar{\Omega}_i$ i przyjmują wartości ze zbioru liczb rzeczywistych.

Wykorzystując warunki ortogonalności (33) wykażemy, że jeśli zadane są wartości funkcji harmonicznej na brzegu $\partial\Omega$ (wzór (7)) oraz zadane są stałe q_i $i = (1,\dots,n)$ określone wzorem:

$$q_i = \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial v}{\partial_n(z)} (Q) dS_Q; \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{35}$$

gdzie:

$\frac{\partial v}{\partial_n(z)}$ - jest pochodną normalną zewnętrzną funkcji v na brzegu $\partial\Omega$ (której istnienie zakładamy),

to rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci sumy potencjału warstwy podwójnej i potencjału pochodzącego od układu ładunków punktowych α_i zawsze istnieje.

Potencjał v_j jest określony wzorem ([1], str. 162)

$$v_j = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho(Q)}{|\overline{A_jQ}|} dS_Q; \quad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{36}$$

gdzie:

ρ - funkcja własna równania (25) określona wzorem:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} q_i \rho_i, \tag{37}$$

przy czym funkcje ρ_i spełniają warunek (26).

Uwzględniając wzór (37) we wzorze (36) mamy:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} q_i v_{ji}, \tag{38}$$

gdzie:

$$v_{ji} = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_i(Q)}{|A_jQ|} dS_Q \in \mathrm{const}(\overline{\Omega}_j); \qquad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{39}$$

przy czym według pracy [4] (str. 80):

$$\bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} v_{ij} = v_{ji}. \tag{40}$$

Warunki ortogonalności (33) przyjmują postać:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i v_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ij} = 0; \qquad j \in \{1,\dots,n\}. \tag{41}$$

Warunki ortogonalności (33) są więc spełnione, jeśli przyjmiemy:

$$\alpha_i = q_i; \qquad i \in \{1,\dots,n\} \tag{42}$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli zadane są wartości funkcji harmonicznej na brzegach obszarów Ω_i oraz stałe q_i spełniające warunki (35) (stałe q_i są interpretowane jako całkowite ładunki zadane na elektrodach - brzegach $\partial\Omega_i$ modelu przyjętego w pracy i odpowiadające potencjałom v_i zadanym na tych brzegach), to rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci sumy potencjału warstwy podwójnej i potencjału pochodzącego od układu ładunków punktowych q_i jest zawsze możliwe. Rozwiązanie to zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma nie jest jednak określone jednoznacznie.

Poszukujemy teraz rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci sumy potencjałów warstwy podwójnej i warstwy pojedynczej (zakładamy, że gęstość ν jest zadana)

$$v^x(M) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \mu_i(Q_i) \frac{\cos(\overrightarrow{Q_iM}, n_{Q_i})}{|\overrightarrow{Q_iM}|^2} dS_{Q_i} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \frac{\nu_i(Q_i)}{|\overrightarrow{Q_iM}|} dS_{Q_i} \tag{43}$$

Potencjał warstwy pojedynczej o gęstościach $\vartheta_i \in C_0(\partial\Omega_i)$; $i = 1,2,\ldots,n$ jest funkcją ciągłą w przestrzeni R^3, a zatem wartości graniczne funkcji V^x będą określone podobnymi wzorami jak dla potencjału warstwy podwójnej. Odpowiednie równanie całkowe posiada postać:

$$\mu(P) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\mu(Q)M(P,Q)dS_Q - \frac{\lambda}{2\pi}\left(v - \int_{\partial\Omega'}\vartheta(Q)N(P,Q)dS_Q\right. \tag{44}$$

$$\text{dla } \lambda = 1 \quad P,Q \in \partial\Omega'$$

gdzie:

$$N(P,Q) = N(P^i,Q^i) = N(P^1,Q^1) = \begin{cases} \frac{1}{|QP|} & \text{dla } P \in \partial\Omega^i;\ Q \in \partial\Omega^i \\ 0 & \text{dla } P \in \partial\Omega^i;\ Q \in \partial\Omega^j \end{cases} \tag{44'}$$

$$i \neq j$$

$$\bigwedge_{\substack{Q^i \in \partial\Omega^i \\ i,j \in \{1,\ldots,n\}}} \vartheta_i(Q^i) = \vartheta_i(Q^j) = \vartheta_i(Q^1) \tag{44''}$$

$$\vartheta(Q) = \sum_{i=1}^{n}\vartheta_i(Q) \tag{44'''}$$

Równanie to ma jądro takie samo jak równanie (21), więc zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma posiada rozwiązanie, gdy są spełnione następujące warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial\Omega}\left(v_j - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega_i}\frac{\vartheta_i(Q_i)}{|Q_iP|}dS_{Q_i}\right)\rho_j(P)dS_P = 0; \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{45}$$

którym po uwzględnieniu wzorów (17), [26) można nadać postać:

$$v_j - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega_i}\vartheta_i(Q_i)\frac{\rho_j(P)}{|Q_iP|}dS_{Q_i}dS_P = 0; \quad j \in \{1,\ldots,n\} \tag{46}$$

Funkcja podcałkowa we wzorze (46) spełnia warunek:

$$\left| \vartheta_i(Q_i) \frac{\rho_j(P)}{|Q_iP|} \right| < \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{|Q_iP|}; \quad \tilde{\sigma}_{ij} \in R^+; \qquad i,j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{47}$$

a zatem ([1], str. 29) możliwa jest zmiana porządku całkowania i wzór (46) przyjmuje postać:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} \vartheta_i(Q_i)\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\rho_j(P)}{|Q_iP|} dS_P\right) dS_{Q_i} = 0 \tag{48}$$

Oznaczając

$$\int_{\partial\Omega_i} \vartheta_i(Q_i) dS_{Q_i} = q_i^x \tag{49}$$

oraz wykorzystując wzory (34) (41) uzyskuje się zależność:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} q_i^x V_{ji} = 0; \qquad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{50}$$

Stąd wynika, że jeśli spełnione są warunki

$$\int_{\partial\Omega_i} \vartheta_i(Q_i) dS_{Q_i} = \int_{\partial\Omega_i} \rho_i(Q_i) dS_{Q_i}; \qquad i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{51}$$

to rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci sumy potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej (określone niejednoznacznie) zawsze istnieje. Rozwiązanie to można najprościej uzyskać utożsamiając funkcje ϑ_i z funkcjami własnymi ρ_i równania (25).

LITERATURA

[1] GIUNTER N.M.: Teoria potencjału. PWN, Warszawa 1957.

[2] KRZYŻAŃSKI M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Część I, PWN, Warszawa 1957.

[3] POGORZELSKI W.: Równania całkowe. Tom I, II. PWN, Warszawa 1958.

[4] SUFCZYŃSKI M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.

[5] SULANKE R., WINTGEN P.: Geometria różniczkowa i teoria wiązek. PWN, Warszawa 1977.

Recenzent: Doc. dr hab. Magdalena Tryjarska

Wpłynęło do redakcji: 15.VI.1983 r.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ ВНЕШНЕЙ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Р е з ю м е

В статье оговорено существование решения внешней проблемы Дирихле для электростатического поля в многосвязной области. Показано, что решение в виде потенциала двойного слоя не существует, зато оно существует в виде суммы потенциала двойного слоя и потенциала от системы точечных зарядов или в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF EXTERNAL DIRICHLET PROBLEMS FOR LAPLACE EQUATIONS

S u m m a r y

In this paper the existence of solutions of the external Dirichlet problems for the electrostatic fields in the multicoherent regions was discussed. Non-existence of solutions in the form of double layer potentials and existence in the form of a sum of double layer potentials and potentials of system fixed charges or in the form of a sum of potentials simple layer and double layer has been shown.