

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

TOPOLOGICZNA METODA WYZNACZANIA BAZY
PRZESTRZENI ZEROWEJ MACIERZY INDUKCYJNOŚCI

Streszczenie. Przedstawiono metodę wyznaczania rzędu i bazy przestrzeni zerowej macierzy indukcyjności głównych w obwodach elektromagnetycznych, opartą na znajomości grafu obwodu magnetycznego i rozkładu uzwojeń na rdzeniu.

1. Wstęp

W pracach [2], [3], [5] wykazano, że w liniowych obwodach elektromagnetycznych ze sprzężeniami rząd macierzy indukcyjności głównych $[M]$, odpowiadających strumieniom magnetycznym, zamykającym się w rdzeniu, jest równy lub mniejszy od liczby uzwojeń, znajdujących się na gałęziach obwodu magnetycznego sieci magnetycznej: $\text{rz } [M] \leq n$, gdzie n - liczba uzwojeń. Wskazano na istotne znaczenie, jakie nierówność ta ma dla zapewnienia optymalnych warunków przetwarzania energii elektrycznej w magnetyczną w obwodach elektromagnetycznych oraz energii elektrycznej w mechaniczną w przetwornikach elektromechanicznych [2], [5].

W obwodach elektromagnetycznych, dla których zachodzi $\text{rz } [M] = k$, $k < n$ istnieje $(n-k)$ - wymiarowa przestrzeń zerowa wektorów prądów I_0^{n-k} , nie wytwarzających strumienia w rdzeniu obwodu. Poprzez odpowiedni dobór napięć zasilających uzwojenia lub połączenie uzwojeń w obwód elektryczny o zadanym grafie można spowodować zanik lub zmniejszyć składową zerową prądu.

Obwody elektromagnetyczne o n uzwojeniach są opisywane układem n równań różniczkowych. Znajomość bazy przestrzeni zerowej obwodu elektromagnetycznego umożliwia wprowadzenie nowego układu współrzędnych, w którym układ równań różniczkowych ulega znacznemu uproszczeniu: im niższy jest rząd macierzy $[M]$, tym większa liczba elementów macierzy $[M]$ przyjmuje wartość zero [5].

Z powyższych względów wyznaczanie rzędu i bazy przestrzeni zerowej macierzy indukcyjności głównych ma istotne znaczenie praktyczne, wskazując na możliwość uproszczenia analizy obwodu elektromagnetycznego oraz na po-

prawę ekonomicznych warunków przetwarzania energii poprzez ograniczenie bądź wyeliminowanie składowej zerowej prądu.

Rząd macierzy indukcyjności głównych można wyznaczyć, obliczając wyznacznik i kolejne minory macierzy $[M]$. Najwyższy spośród stopni minorów różnych od zera jest równy rzędowi macierzy $[M]$ [1]. W przypadku większej liczby uzwojeń sposób taki jest pracochłonny i stwarza możliwość omyłki. Przedstawiony tok postępowania zawodzi i wówczas, gdy indukcyjności główne zostały wyznaczone na drodze pomiarowej. Wartości elementów macierzy $[M]$ są wtedy obarczone błędem, wynikającym z niedokładności pomiaru, a ponadto z nieliniowości charakterystyki magnesowania i podziału indukcyjności uzwojenia na indukcyjność główną i rozproszenia. Może się wówczas okazać, że wszystkie minory są różne od zera. Poniżej przedstawiono metodę wyznaczania rzędu macierzy indukcyjności głównych, opartą wyłącznie na znajomości grafu obwodu magnetycznego oraz rozkładu uzwojeń na rdzeniu.

2. Wyznaczanie rzędu macierzy indukcyjności głównych

Rząd macierzy indukcyjności głównych jest równy wymiarowi przestrzeni strumieni skojarzonych ϕ^k [2], [5]:

$$\text{rz}[M] = \dim \phi \quad (1)$$

Z relacji

$$[\phi] = [z][\phi_u], \quad (2)$$

gdzie:

$$[z] = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T,$$

z_i - liczba zwojów i -tego uzwojenia,

$[\phi_u]$ - wektor strumieni magnetycznych w gałęziach uzwojonych,

wynika, że:

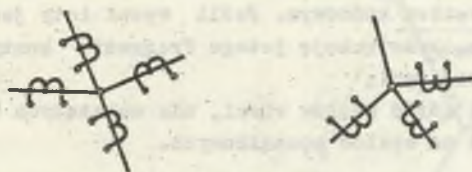
$$\dim \phi = \dim \phi_u \quad (3)$$

Strumienie magnetyczne w gałęziach uzwojonych muszą przyjmować wartości zgodne z równaniami, ułożonymi na podstawie I prawa Kirchhoffa dla wszystkich, dających się wyodrębnić fragmentów sieci magnetycznej, które łączą się z pozostałą częścią obwodu magnetycznego poprzez gałęzie uzwojone. Jeśli liczba tak wyznaczonych liniowo niezależnych równań, wynosi 1, to:

$$\text{rz}[M] = \dim \phi_u = n - 1 \quad (4)$$

Wyodrębnienie fragmentów, którym odpowiadają liniowo niezależne równania, wynikające z I prawa Kirchhoffa, jest utrudnione w przypadku obwodu elektromagnetycznego o złożonej strukturze topologicznej rdzenia.

Poniżej przedstawiono opis metody, umożliwiającej szybkie wyznaczenie rzędu macierzy $[M]$ oraz wektorów bazowych przestrzeni zerowej. Metoda jest oparta na konstrukcji określonych fragmentów drzewa (a w szczególności - pełnego drzewa) obwodu magnetycznego. Gałęzie uzwojone będziemy wyróżniać na grafie obwodu magnetycznego poprzez naniesienie symbolu uzwojenia.



Rys. 1. Węzły początkowe

Węzłem początkowym będziemy nazywać węzeł, w którym zbiegające się gałęzie - z wyjątkiem co najwyżej jednej - są uzwojone (rys. 1). Graf obwodu magnetycznego upraszczamy, zastępując wszystkie oczka, złożone z gałęzi nieuzwojonych, węzłami (rys. 2). Takie uproszczenie grafu nie wpływa oczy-



Rys. 2. Zastąpienie oczka złożonego z gałęzi nieuzwojonych węzłem

wiście na postać równań, wynikających z I prawa Kirchhoffa, a odnoszących się do strumieni magnetycznych w gałęziach uzwojonych. Fragmenty drzewa, umożliwiające wyznaczenie rzędu macierzy $[M]$, konstruujemy w oparciu o następujące zasady:

- 1) pierwszy fragment drzewa rozpoczynamy w dowolnym węźle początkowym;
 - 2) z węzła i -tego przemieszczamy się do węzła $(i+1)$ -go, otrzymując kolejną gałąź drzewa (wyróżniamy ją strzałką, zgodną z kierunkiem przemieszczenia);
- a) wzdłuż gałęzi nieuzwojonej, jeśli pozostałe gałęzie zbiegające się w węzeł, a nie należące do skonstruowanego fragmentu drzewa są uzwojone,

- b) wzdłuż dowolnej gałęzi uzwojonej, jeśli wszystkie gałęzie, zbiegające się w węzła, a nie należące do skonstruowanego fragmentu drzewa, są uzwojone,
- c) przerywamy konstrukcję w i -tym węźle, jeśli żadna z gałęzi nie spełnia warunków a i b lub gałąź, którą przemieszczalibyśmy się zgodnie z a i b, nie może należeć do drzewa,

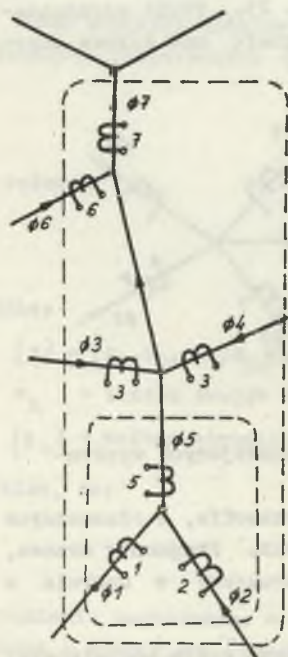
3) j -ty fragment drzewa rozpoczynamy w dowolnym węźle początkowym, nie należącym jeszcze do wyznaczonych fragmentów drzewa; j -ty fragment drzewa konstruujemy identycznie jak fragment pierwszy, przerywając konstrukcję w i -tym węźle także i wówczas, gdy węzeł i -ty należy już do innego fragmentu drzewa, a nie jest jego węzłem końcowym. Jeśli węzeł i -ty jest węzłem końcowym innej części drzewa, konstrukcję j -tego fragmentu kontynuujemy zgodnie z przedstawionymi zasadami;

4) konstrukcję przerywamy, jeśli wśród węzłów sieci, nie należących do wyznaczonych fragmentów drzewa, nie ma węzłów początkowych.

Zliczamy teraz wszystkie uzwojenia, które znalazły się na skonstruowanych fragmentach drzewa (w szczególności - na drzewie). Jeśli ich liczba wynosi 1, to:

$$rz[M] = n - 1 \quad (5)$$

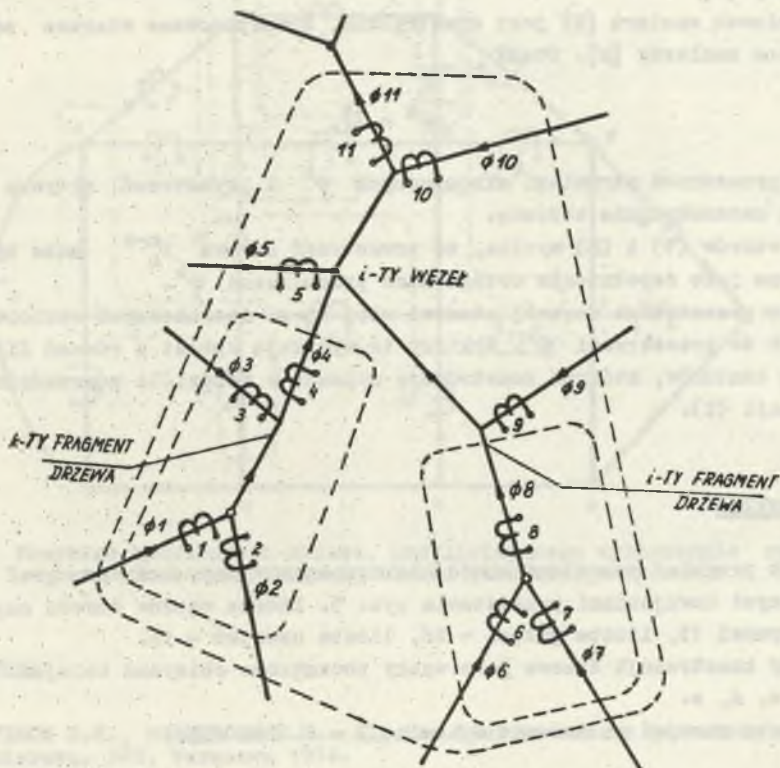
Uzasadnijmy równość (5). Jak łatwo zauważyć, otrzymane w wyniku konstrukcji fragmenty drzewa łączą węzły (z wyjątkiem końcowego), w których zbiegają się gałęzie uzwojone. Każdemu uzwojeniu, które znalazło się na gałęzi, przynależnej do wyznaczonego fragmentu drzewa, można przyporządkować kontur, okalający odcinek drzewa, zawarty pomiędzy węzłem początkowym, a węzłem, z którego wychodzi gałąź z rozważanym uzwojeniem (rys. 3). Odpowiada mu, ułożone na podstawie I prawa Kirchhoffa, równanie, wiążące strumienie magnetyczne w gałęziach uzwojonych, a zgodnie ze wzorem (2) - strumienie skojarzone uzwojeń. W interpretacji geometrycznej równanie to wyznacza wektor normalny do przestrzeni strumieni skojarzonych ψ . Oparcie metody wyznaczania rzędu macierzy indukcyjności na konstrukcji drzewa obwodu magnetycznego zapewnia z jednej strony niez-



Rys. 3. Fragment drzewa obwodu magnetycznego z zaznaczonymi konturami

leżność liniową kolejnych równań, z drugiej zaś - znalezienie wszystkich możliwych równań. Relację (5) można więc uznać za wykazaną. Na rys.3 przedstawiono fragment drzewa z zaznaczonymi dwoma konturami.

Rys. 4 obrazuje sposób prowadzenia konturów w przypadku, gdy j-ty fragment drzewa łączy się z k-tym fragmentem. Przedstawiona metoda odnosi się do obwodów elektromagnetycznych, w których na każdej gałęzi obwodu magnetycznego znajduje się co najwyżej jedno uzwojenie. W przypadku gdy uzwojeń jest więcej, należy wprowadzić sztuczne węzły na gałęzi, rozdzielające uzwojenia.



Rys. 4. Wyznaczenie konturów w przypadku łączących się fragmentów drzewa obwodu magnetycznego

3. Wyznaczenie bazy przestrzeni zerowej macierzy indukcyjności głównych

Wektory przestrzeni zerowej spełniają równanie macierzowe:

$$[M][i_0] = [0] \quad i_0 \in I_0^{n-k} \quad (6)$$

Dopełnienie przestrzeni zerowej I_0^{n-k} do przestrzeni prądów I^n nazywamy przestrzenią aktywną I_1^k [2], [3], [5]:

$$I_1^k \oplus I_0^{n-k} = I^n \quad I_1^k \perp I_0^{n-k} \quad (7)$$

Przestrzeń I_1^k wyznacza k niezależnych liniowo transponowanych wektorów-wierszy macierzy $[M]$.

Bazę przestrzeni ψ^k stanowi k niezależnych liniowo wektorów-kolumn macierzy $[M]$.

Ponieważ macierz $[M]$ jest symetryczna, transponowane wiersze są równe kolumnom macierzy $[M]$. Stąd:

$$\psi^k = I_1^k, \quad (8)$$

czyli przestrzeń strumieni skojarzonych ψ^k i przestrzeń aktywna prądów I_1^k są matematycznie tożsame.

Ze wzorów (7) i (8) wynika, że przestrzeń zerowa I_0^{n-k} może być wyznaczona jako dopełnienie ortogonalne przestrzeni ψ^k .

Bazę przestrzeni zerowej stanowi więc $n-k$ niezależnych wektorów, normalnych do przestrzeni ψ^k . Wektory te wynikają wprost z równań Kirchhoffa dla konturów, których konstrukcję opisano w rozdziale poprzednim oraz z relacji (2).

4. Przykład

Jako przykład rozważono obwód elektromagnetyczny, którego graf z zaznaczonymi uzwojeniami przedstawia rys. 5. Liczba węzłów obwodu magnetycznego wynosi 15, liczba gałęzi = 26, liczba uzwojeń = 16.

Przy konstrukcji drzewa jako węzły początkowe wybierano kolejno węzły a, b, c, d, e.

Liczba uzwojeń na drzewie wynosi: $l = 4$. Tak więc:

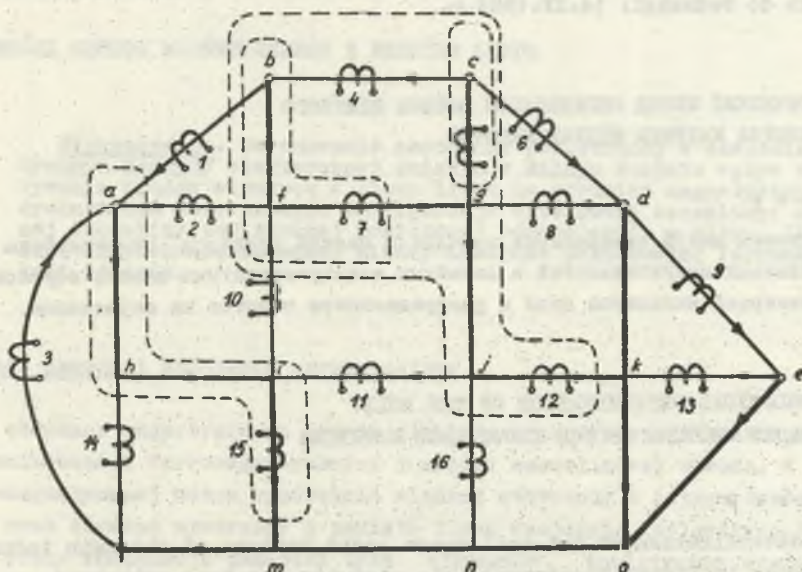
$$\begin{aligned} \text{rz}[M] &= \dim \psi = \dim I_1 = k = n-l = 12 \\ \dim I_0 &= n-k = 16 - 12 = 4 \end{aligned}$$

Bazę przestrzeni zerowej stanowią wektory, wynikające z równań Kirchhoffa dla 4 konturów, zaznaczonych na rysunku:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, 0, \frac{1}{z_4}, 0, 0, -\frac{1}{z_7}, 0, 0, 0, \frac{1}{z_{10}}, 0 \dots 0 \right]^T \\ & \left[0, 0, 0, -\frac{1}{z_4}, -\frac{1}{z_5}, -\frac{1}{z_6}, 0 \dots 0 \right]^T \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{z_6}, 0, \frac{1}{z_8}, 0, \frac{1}{z_{10}}, -\frac{1}{z_{11}}, -\frac{1}{z_{12}}, 0, \dots, 0 \right]^T$$

$$\left[\frac{1}{z_1}, -\frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{z_{10}}, \frac{1}{z_{11}}, 0, 0, \frac{1}{z_{14}}, -\frac{1}{z_{15}}, 0 \right]^T$$



Rys. 5. Przykład konstrukcji drzewa, umożliwiającego wyznaczenie rzędu i bazy przestrzeni zerowej obwodu elektromagnetycznego

LITERATURA

- [1] JEFIMOW N.W., ROZENDORN E.R.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN, Warszawa 1974.
- [2] KLUSZCZYŃSKI K.: Składowe aktywne i zerowe prądów w obwodach elektromagnetycznych. Rozpr. Elektrot. t. XXVII, z. 3, 1981.
- [3] KLUSZCZYŃSKI K.: Składowe aktywne i zerowe prądów w obwodach elektromagnetycznych. Mat. VIII Sympozjum nt. "Metody matematyczne w elektrotechnice". Cz. I. Zeszyty Naukowe WSI z. 8, Opole 1979.
- [4] KLUSZCZYŃSKI K.: Przestrzenie aktywne i zerowe macierzy indukcyjności w maszynach asynchronicznych przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego. Prace X Sympozjum nt. "Metody matematyczne w elektrotechnice", Karpacz 1981.

- [5] KLUSZCZYŃSKI K.: Podstawy teoretyczne transformacji k-osiowej i jej zastosowanie w analizie stanów niustalonych rozgałęzionych obwodów elektromagnetycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka, z. 61. Gliwice 1978.

Recenzent: Prof. dr inż. Maciej Krakowski

Wpłynęło do redakcji: 14.IV.1983 r.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ БАЗИСА НУЛЕВОГО
ПРОСТРАНСТВА МАТРИЦЫ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Р е з ю м е

Предложен метод определения порядка и базиса нулевого пространства матрицы главных индуктивностей в линейных электромагнитных цепях, обусловленный геометрией магнитной цепи и распределением обмоток на сердечнике.

THE TOPOLOGICAL DETERMINATION OF THE NULL
SPACE BASIS VECTORS OF THE INDUCTANCE MATRICES

S u m m a r y

The determination of the null space basis vectors of the main inductance matrices in linear electromagnetic circuits has been presented.

For its determination the graph of the magnetic circuit and the distribution of the windings on the core were necessary.