ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: AUTOMATYKA z. 93 Nr kol. 969

Marian BŁACHUTA

Andrzej ORDYS

ZWIĄZEK ALGORYTMÓW CLARKE'A, HASTINGS-JAMESA I KALMANA DLA PROBLEMU STEROWANIA MINIMALNO-WARIANCYJNEGO[x)]

Streszczenie. W pracy podano prosty dowód równoważności algorytmu Clarke'a, Hastings-Jamesa z graniczną, asymptotyczną postacią algorytmu Kalmana uzyskaną przy założeniu ustalenia się macierzy kowariancji błędu filtracji dla dowolnego opóźnienia i dowolnej postaci równań stanu opisujących obiekt. Jest to uogólnienie wyników z publikacji [6] na przypadek, gdy we wskaźniku jakości oprócz wariancji wyjścia występuje wariancja sterowania.

1. Wstęp

Algorytm sterowania minimalno-wariancyjnego (minimalizującego wariancję wyjścia z obiektu) został po raz pierwszy przedstawiony przez Åströma [1]. Później uogólnili go Clarke i Hastings-James [2] na przypadek minimalizacji kombinacji liniowej wariancji wyjścia i sterowania. Zaletą tego algorytmu w stosunku do algorytmu Åströma jest to, że jest on stabilny dla szerokiej klasy obiektów, w tym także obiektów nieminimalnofazowych.

Powyższe dwa algorytmy są bazowymi dla licznych innych istniejących obecnie. Cechą wspólną wszystkich sterowań minimalno-wariancyjnych jest korzystanie z teorii ciągów czasowych do opisu obiektu. Uzyskuje się w ten sposób proste wzory. Jednakże dla analizy teoretycznej i badania własności algorytmów wygodniejszy jest opis obiektu w przestrzeni stanu. Wielu autorów zajmowało się relacją między algorytmami minimalno-wariancyjnymi wyprowadzanymi na gruncie teorii ciągów czasowych a algorytmami wyprowadzanymi w przestrzeni stanu. Wymienić tu należy prace Cainesa [3], Watsona [4] oraz Lama [5]. Wspólną cechą tych prac jest oparcie rozważań na specjalnej postaci równań stanu oraz duża złożoność obliczeń. W pracy [6] przedstawiono prosty dowód równoważności praw sterowania: wyprowadzonego na gruncie teorii ciągów czasowych i w przestrzeni stanu, dla algorytmu Åströma (minimalizowana wariancja wyjścia z obiektu) przy dowolnej postaci równań stanu opisujących

x) Praca wykonana w ramach programu badawczego RP I.02.: Teoria sterowania i optymalizacji układów ciągłych i procesów dyskretnych.

obiekt. W tej publikacji wyniki z pracy [6] zostaną uogólnione na przypadek minimalizacji kombinacji liniowej wariancji wyjścia i sterowania (algorytm Clarke'a, Hastings-Jamesa). Algorytm wyprowadzony w przestrzeni stanu będzie dalej - dla rozróżnienia - nazywany algorytmem Kalmana.

W pracy pokazuje się, że algorytm Clarke'a, Hastings-Jamesa jest równoważny asymptotycznej postaci algorytmu Kalmana uzyskiwanej przy założeniu ustalenia się macierzy kowariancji błędu filtracji.

2. Algorytm Clarke'a, Hastings-Jamesa

Twierdzenie 1 (Clarke, Hastings-James):

Niech liniowy, dyskretny w czasie obiekt regulacji będzie opisany zależnością:

$$y_i = z^{-k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u_i + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}v_i \tag{1}$$

gdzie:

y_i - wyjście z obiektu,

u_i - sterowanie,

v_i - zakłócenie będące dyskretnym w czasie szumem białym gaussowskim o zerowej wartości średniej i wariancji η

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n} \tag{2}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n}.$$

Wówczas sterowanie optymalne, minimalizujące wskaźnik jakości:

$$J = E\left[(y_{i+k})^2 + \lambda(u_i)^2\right] \tag{3}$$

(gdzie: E oznacza operację uśredniania, λ jest współczynnikiem wagowym) jest dane zależnością:

$$u_i = -\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})\,E(z^{-1}) + \frac{\lambda}{b_0}C(z^{-1})}\,y_i \tag{4}$$

Wielomiany $F(z^{-1})$, $E(z^{-1})$ są jednoznacznie określone poprzez zależności:

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = E(z^{-1}) + z^{-k}\frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{5}$$

$$E(z^{-1}) = 1 + e_1 z^{-1} + \ldots + e_{k-1} z^{-k+1}$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{n-1} z^{-n+1} \tag{6}$$

3. Opis obiektu w przestrzeni stanu

Niech będzie dany liniowy obiekt dyskretny w czasie, opisany za pomocą równań w przestrzeni stanu:

- równanie stanu:

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i + gv_i,$$

- równanie wyjścia:

$$y_i = d^T x_i + v_i$$

gdzie:

x_i - stan,
u_i - sterowanie (skalarne),
y_i - wyjście (skalarne),
v_i - zakłócenie (skalarne), zdefiniowane tak jak w równaniu (1),
A - macierz kwadratowa o wymiarze równym wymiarowi wektora stanu (n x n),
b,g,d - wektory o odpowiednich wymiarach.

Używając operatora przesunięcia - z - można napisać zależność wyjścia obiektu od wejść:

$$y_i = \frac{B(z)}{A(z)} u_i + \frac{C(z)}{A(z)} v_i \tag{9}$$

gdzie:

$$d^T (z\mathbb{1} - A)^{-1} b = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{10}$$

$$d^T (z\mathbb{1} - A)^{-1} g + 1 = \frac{C(z)}{A(z)} \tag{11}$$

przy tym:

$$B(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$$

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad m \leqslant n-1 \tag{12}$$

$$C(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$$

Definicja 1: Mówimy, że układ opisany równaniami (8) i (7) ma w torze sterowania opóźnienia k, jeżeli:

$$d^T b = d^T A b = \ldots = d^T A^{k-2} b = 0 \quad \text{i} \quad d^T A^{k-1} b = b_0 \neq 0. \tag{13}$$

4. Wyprowadzenie algorytmu w przestrzeni stanu

Niech wskaźnik jakości będzie dany (tak jak w algorytmie Clarke'a, Hastings-Jamesa) wzorem (3).

Twierdzenie 2:

Dla obiektu opisanego równaniami (7), (8), posiadającego w torze sterowania opóźnienie k, sterowanie minimalizujące wskaźnik (3) ma postać:

$$u_i = -\frac{1}{\lambda + b_0^2} b_0 d^T A^{k-1} \left[(A - gd^T)\hat{x}_i + gy_i\right] \tag{14}$$

gdzie:

$$\hat{x}_i = E/\vec{y}_i(x_i) \tag{15}$$

y_i oznacza zbiór informacji o układzie dostępnych w chwili i. Składa się on ze sterowań $u_0, \ldots, u_{i-1}$ oraz wyjść $y_0, \ldots, y_i$. $E/\vec{y}_i$ jest operacją uśredniania warunkowego.

Dowód:

Zadanie minimalizacji można przeformułować następująco:

$$\min_{u_i(\vec{y}_i)} E\left[(y_{i+k})^2 + \lambda(u_i)^2\right] = E \min_{u_i} E/\vec{y}_i \left[(y_{i+k})^2 + \lambda(u_i)^2\right] =$$

$$= E \min_{u_i}\left[(\hat{y}_{i+k})^2 + \lambda(u_i)^2\right] + E(\tilde{y}_{i+k})^2 \tag{16}$$

gdzie:

$$\hat{y}_{i+k} = E/\vec{y}_i(y_{i+k}), \qquad \tilde{y}_{i+k} = y_{i+k} - \hat{y}_{i+k}. \tag{17}$$

W celu wyznaczenia $\hat{y}_{i+k}$ dokonajmy k-krotnego podstawienia równania stanu do równania wyjścia; otrzymamy wówczas:

$$y_{i+k} = d^T A^k x_i + d^T a^{k-1} bu_i + d^T A^{k-1} gv_i + d^T A^{k-2} gv_{i+1} + \ldots$$

$$\ldots + d^T gv_{i+k-1} + v_{i+k} \tag{18}$$

Wykorzystano w tym wzorze fakt, że układ posiada w torze sterowania opóźnienie k (równanie (13)). Ze wzoru (8) wynika, że:

$$v_i = y_i - d^T x_i \tag{19}$$

Podstawiając (19) do (18) i obliczając wartość przeciętną warunkową otrzymamy:

$$E/\vec{y}_i(y_{i+k}) = \hat{y}_{i+k} = d^T A^k \hat{x}_i + d^T A^{k-1} bu_i + d^T A^{k-1} g(y_i - d^T \hat{x}_i) =$$

$$= d^T A^{k-1} \left[(A - gd^T)\hat{x}_i + bu_i\right] + d^T A^{k-1} gy_i \tag{20}$$

Wykorzystując uzyskaną zależność we wzorze (16) otrzymujemy:

$$\min_{u_i} \left[(\hat{y}_{i+k})^2 + \lambda(u_i)^2\right] = \min_{u_i} \left\{ \left[b_O u_i + d^T A^{k-1}(A - gd^T)\hat{x}_i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + d^T A^{k-1} gv_i\right]^2 + \lambda(u_i)^2 \right\}. \tag{21}$$

Minimum zostanie osiągnięte w punkcie zerowania się pochodnej:

$$0 = b_O \left[b_O u_i + d^T A^{k-1}(A - gd^T)\hat{x}_i + d^T A^{k-1} gy_i\right] + \lambda u_i \tag{22}$$

$$(\lambda + b_O^2) u_i = -b_O d^T A^{k-1} \left[(A - gd^T)\hat{x}_i + gy_i\right], \tag{23}$$

co po wydzieleniu przez $(\lambda + b_O^2)$ daje wzór (14).

5. Filtr Kalmana

Dla wyznaczenia sterowania optymalnego z równania (14) konieczna jest znajomość oceny stanu zdefiniowanej wzorem (15). Służy do tego filtr Kalmana, który dla rozpatrywanego w pracy problemu był omawiany w publikacji [6]. Teraz przypomnimy tylko wyniki:

Rozważmy obiekt opisany równaniami (7), (8). Ocena stanu wyraża się rekurencyjnym wzorem:

$$\hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1/i} + K_{i+1}\left[y_{i+1} - d^T\hat{x}_{i+1/i}\right] \tag{24}$$

gdzie:

$$\hat{x}_{i+1/i} = (A - gd^T)\hat{x}_{i/i} + bu_i + gy_i \tag{25}$$

$$K_{i+1} = P_{i+1/i}d\left[d^TP_{i+1/i}d + \eta\right]^{-1} \tag{26}$$

$$P_{i+1/i} = (A - gd^T)P_{i/i}(A - gd^T)^T \tag{27}$$

$$P_{i+1/i+1} = P_{i+1/i} - K_{i+1}d^TP_{i+1/i}, \tag{28}$$

przy czym:

$$\hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1} = E/\overrightarrow{y}_{i+1}(x_{i+1}),\ \hat{x}_{i+1/i} = E/\overrightarrow{y}_i(X_{i+1}) \tag{29}$$

Dowód znajduje się w pracy [6].

Zostaną teraz podane pewne asymptotyczne własności filtru Kalmana udowodnione przez Cainesa [3].

Twierdzenie 3 (Caines):

Załóżmy, że filtr Kalmana dany wzorami (24) - (29) jest stabilny, to znaczy wielomian:

$$C(z) = \det(z\mathbb{1} - A + gd^T) \tag{30}$$

posiada wszystkie zera wewnątrz koła jednostkowego. Wówczas:

$$\lim_{i\to\infty}(\hat{x}_{i+1/i+1}) = \hat{x}_{i+1/i} = (A - gd^T)\hat{x}_i - bu_i + gy_i \tag{31}$$

Wzór ten określa równanie rekurencyjne na ocenę stanu po nieskończenie długim czasie działania filtru - po ustaleniu się jego parametrów. Ocena przy filtracji jest wówczas równa ocenie przy jednokrokowej predykcji.

Po użyciu operatora przesunięcia w równaniu (31) otrzymamy:

$$z\hat{x}_i = (A - gd^T)\hat{x}_i + bu_i + gy_i$$

$$\hat{x}_i = (z\mathbb{1} - (A - gd^T))^{-1}(bu_i + gy_i) \tag{32}$$

6. Przekształcenie algorytmu do postaci transmitancyjnej

W dalszych obliczeniach użyteczne będą następujące tożsamości macierzowe:

$$(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1} = (z\mathbb{1} - A)^{-1}\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]^{-1} \tag{33}$$

$$A^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1} = z^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1} - (z^{k-2}\mathbb{1} + z^{k-3}A + \ldots$$

$$\ldots + A^{k-2}) = z^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1} - \sum_{j=0}^{k-2} z^{k-2-j} A^j \quad (k \geqslant 1) \tag{34}$$

Tożsamość (33) dowodzi się w następujący sposób:

$$(z\mathbb{1} - A + gd^T) = \left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right](z\mathbb{1} - A) \tag{35}$$

$$(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1} = (z\mathbb{1} - A)^{-1}\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]^{-1}. \square$$

Tożsamość (34) wynika natychmiast z wymnożenia równania prawostronnie, stronami przez $(z\mathbb{1} - A)$.

Wprowadźmy wielomiany $E'(z)$ i $F'(z)$ zdefiniowane następująco:

$$E'(z) = z^{k-1} + z^{k-2}d^Tg + z^{k-3}d^TAg + \ldots + d^TA^{k-2}g =$$

$$= z^{k-1} + e_1z^{k-2} + \ldots + e_{k-1} \tag{36}$$

$$F'(z) = z^{k-1}C(z) - E'(z)A(z) \tag{37}$$

Pokażemy teraz związek tak zdefiniowanych wielomianów $F'(z)$ i $E'(z)$ z wielomianami $F(z^{-1})$, $E(z^{-1})$ danymi równaniem (5). Zauważmy, że po wymnożeniu równania (5) stronami przez $A(z^{-1})\ z^{n+l-1}$ otrzymamy równanie postaci:

$$F(z) = z^{k-1}C(z) - E(z)\ A(z) \tag{38}$$

Aby udowodnić, że wielomiany $F'(z)$ i $E'(z)$ są równoważne wielomianom $E(z)$ i $F(z)$ wystarczy pokazać, że stopień wielomianu $F'(z)$ jest równy stopniowi wielomianu $F(z)$, to znaczy wynosi $n-1$.

Lemat 1: Jeżeli stopień wielomianu $A(z)$ wynosi n, to stopień wielomianu $F'(z)$ wynosi $n-1$.

Dowód: (przy przekształceniach wykorzystuje się tożsamości (11), (34) oraz wzór

$$A(z) = \det(z\mathbb{1} - A) \tag{39}$$

- wynikający z tożsamości (10)).

$$F'(z) = z^{k-1}C(z) - E'(z)A(z) = \det(z\mathbb{1} - A)z^{k-1}\left[1 + d^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}g\right] -$$

$$- \det(z\mathbb{1} - A)\left[z^{k-1} + d^Tgz^{k-2} + \ldots + d^TA^{k-2}g\right] =$$

$$= \det(z\mathbb{1} - A)d^T\left[z^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1} - (z^{k-2}\mathbb{1} + z^{k-3}A + \ldots + A^{k-2})\right]g =$$

$$= \det(z\mathbb{1} - A)d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1}g \tag{40}$$

Jest to wielomian zmiennej z stopnia $n-1$.□
Zauważmy jeszcze, że wielomian $B(z)$ jest stopnia $m = n-k$.
Wynika to natychmiast ze wzorów (10) i (13).
Teraz możemy już udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4:

Algorytm sterowania otrzymany przez podstawienie do równania (14) oceny stanu pochodzącej z ustalonego filtru Kalmana (równanie (32)) jest równoważny algorytmowi Clarke'a, Hastings-Jamesa opisanemu równaniem (4).

Dowód:

Podstawiając w miejsce $\hat{x}_i$ do równania (14) zależność (32) otrzymamy:

$$u_i\left\{\lambda + b_0^2 + b_0d^TA^{k-1}(A - gd^T)(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b\right\} =$$

$$= -y_i\left\{b_0d^TA^{k-1}\left[(A - gd^T)(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g + g\right]\right\} \tag{41}$$

Ponieważ:

$$(A - gd^T)(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1} = z(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1} - \mathbb{1} \tag{42}$$

i:

$$b_0 = d^TA^{k-1}b,$$

więc:

$$u_i\lambda + u_ib_0d^TA^{k-1}\left\{\mathbb{1} + z(z\mathbb{1} - A - gd^T)^{-1} - \mathbb{1}\right\}b =$$

$$= -y_ib_0d^TA^{k-1}\left\{z(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1} - \mathbb{1} + \mathbb{1}\right\}g \tag{43}$$

Stąd bezpośrednio otrzymuje się:

$$u_i = -\frac{d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g}{\frac{\lambda}{b_0z} + d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b}\, y_i \tag{44}$$

Teraz stosuje się przekształcenia majace na celu wyeliminowanie parametrów związanych z opisem w przestrzeni stanu i zastąpienie ich parametrami związanymi z opisem wejściowo-wyjściowym.

Obliczenie wyrażenia: $d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g$:

$$\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]g = \frac{C(z)}{A(z)}\, g \quad \text{(na podstawie (11))} \tag{45}$$

Stąd:

$$\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]^{-1} g = \frac{A(z)}{C(z)}\, g. \tag{46}$$

$$d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1}\, g = z^{k-1} \cdot \frac{C(z)}{A(z)} - E(z) \tag{47}$$

na podstawie (34) i (36).

Ostatecznie:

$$d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g = \frac{z^{k-1}C(z) - E(z)A(z)}{C(z)} \tag{48}$$

Obliczenie wyrażenia: $d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b$:

$$\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]b = b + g\,\frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{(na podstawie (10))} \tag{49}$$

Stąd, po wymnożeniu lewostronnie przez $\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]^{-1}$ mamy:

$$\left[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}\right]^{-1} b = b - \frac{B(z)}{C(z)}\, g \quad \text{(na podstawie (46))} \tag{50}$$

$$d^TA^{k-1}(z - A)^{-1}b = z^{k-1}\,\frac{B(z)}{A(z)} - (z^{k-2}d^Tb + z^{k-3}d^TAb + \dots$$

$$+ d^TA^{k-2}b) = z^{k-1}\,\frac{B(z)}{A(z)} \tag{51}$$

(wykorzystano tu definicję opóźnienia - wzór (13)).

W takim razie:

$$d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b = z^{k-1}\frac{B(z)}{A(z)} - \left[z^{k-1}\cdot\frac{C(z)}{A(z)} - E(z)\right]\frac{B(z)}{C(z)} =$$

$$= \frac{B(z)\,E(z)}{C(z)} \tag{52}$$

wykorzystano tu wzór (47).
Podstawienie zależności (38), (48), (52) do (44) daje:

$$U_i = -\frac{zF(z)}{zB(z)\,E(z) + \frac{\lambda}{b_0}C(z)}\,y_i \tag{53}$$

Teraz można we wzorze (53) wymnożyć licznik i mianownik przez z^{-n} otrzymując wzór (4). W ten sposób zasadnicze twierdzenie zostało udowodnione. □

7. Równania charakterystyczne

Używając równań w przestrzeni stanu można wyprowadzić równanie charakterystyczne przedstawionego układu regulacji optymalnej. Wykorzystywać będziemy równania (7) i (8) opisujące obiekt; (31) opisujące filtr Kalmana oraz (15) opisujące sterowanie. Podstawienie (8) do (15) i (31), a następnie (15) do (7) i (31) prowadzi do wzorów:

$$x_{i+1} = H_1x_i + H_2\hat{x}_i + hv_i \tag{54}$$

$$\hat{x}_{i+1} = H_3x_i + H_4\hat{x}_i + hv_i \tag{55}$$

gdzie:

$$H_1 = A - \frac{b_0}{\lambda + b_0^2}\,bd^T e_k \tag{56}$$

$$H_2 = -\frac{b_0}{\lambda + b_0^2}\,bd^TA^{k-1}(A - gd^T) \tag{57}$$

$$H_3 = gd^T - \frac{b_0}{\lambda + b_0^2}\,bd^Te_k \tag{58}$$

$$H_4 = (A - gd^T) - \frac{b_0}{\lambda + b_0^2}\,bd^TA^{k-1}(A - gd^T) \tag{59}$$

$$h = g - \frac{b_0}{\lambda + b_0^2} be_k \tag{60}$$

$$e_k = d^T A^{k-1} g \tag{61}$$

Równanie charakterystyczne układu ma więc postać:

$$0 = \det \begin{bmatrix} z\mathbb{1} - H_1 & - H_2 \\ \cdots & \cdots \\ - H_3 & z\mathbb{1} - H_4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} z\mathbb{1} - H_1 + H_3 & -z\mathbb{1} - H_2 + H_4 \\ \cdots & \cdots \\ - H_3 & z\mathbb{1} - H_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} z\mathbb{1} - H_1 + H_3 & -z\mathbb{1} - H_2 + H_4 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & H_3(z\mathbb{1} - H_1 + H_3)^{-1}(-z\mathbb{1} - H_2 + H_4) + (z\mathbb{1} - H_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det\left\{(z\mathbb{1} - H_1 + H_3)\left[H_3(z\mathbb{1} - H_1 + H_3)^{-1}(-z\mathbb{1} - H_2 + H_4) + (z\mathbb{1} - H_4)\right]\right\} =$$

$$= \det\left\{(z\mathbb{1} - H_1 + H_3)\left[-H_3 + z\mathbb{1} - H_4\right]\right\} \tag{62}$$

Wykorzystano tu fakt, że

$$z\mathbb{1} - H_1 + H_3 = z\mathbb{1} + H_2 - H_4 = z\mathbb{1} - A + gd^T. \tag{63}$$

Wynika to z wzorów (56) - (59).
Z równania (48) wynika, że:

$$\det(z\mathbb{1} - A + gd^T) = C(z) \tag{64}$$

W takim razie otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne:

$$C(z)\det(z\mathbb{1} - H_3 - H_4) = 0 \tag{65}$$

Na podstawie wzorów (58), (59) i (61) zachodzi:

$$z\mathbb{1} - H_3 - H_4 = z\mathbb{1} - A + \frac{b_0}{\lambda + b_0^2} bd^T A^k \tag{66}$$

$$\det(z\mathbb{1} - A + \frac{b_0}{\lambda + b_0^2} bd^T A^k) =$$

$$= \det\left\{(z\mathbb{1} - A)\left[\mathbb{1} + \frac{b_0}{\lambda + b_0^2}(z\mathbb{1} - A)^{-1} bd^T A^k\right]\right\} =$$

$$= \det(z\mathbb{1} - A)\left[1 + \frac{b_0}{\lambda + b_0^2} d^T A^k (z\mathbb{1} - A)^{-1} b\right] =$$

$$= A(z)\left\{1 + \frac{b_0}{\lambda + b_0^2}\left[z^k d^T (z - A)^{-1} b - d^T A^{k-1} b\right]\right\} =$$

$$= A(z)\left[1 + \frac{b_0}{\lambda + b_0^2} z^k \frac{B(z)}{A(z)} - b_0\right] = \frac{1}{\lambda + b_0^2}\left[A(z) + b_0 z^k B(z)\right] \tag{67}$$

Przy przekształceniach wykorzystano wzory: (51), (39), (13) i (10). Ostatecznie równanie charakterystyczne ma postać

$$\frac{1}{\lambda + b_0^2} C(z)\left[\lambda A(z) + b_o z^k B(z)\right] = 0 \tag{68}$$

Uwaga: Równanie charakterystyczne (68) można wyprowadzić także na innej drodze - pisząc transmitancję dyskretną układu. Jednakże sposób przedstawiony powyżej omija wszystkie nieścisłości związane z badaniem stabilności układu na podstawie transmitancji.

8. Zakończenie

W pracy przedstawiono - dla najbardziej ogólnego przypadku - związki między opisem za pomocą ciągów czasowych i korzystającym z tego opisu algorytmu Clarke'a, Hastings-Jamesa a opisem przy pomocy równań stanu. Okazuje się, że algorytm Clarke'a, Hastings-Jamesa jest równoważny pewnemu szczególnemu przypadkowi sterowania optymalnego w przestrzeni stanu - sterowaniu w stanie ustalonym, po zaniknięciu wpływu warunków początkowych. Wynik jest analogiczny do uzyskanego w pracy [6] - dla algorytmu Åströma. Przy dowodzie równoważności sterowań stosuje się przekształcenia macierzowe, które pozwalają obejść występujące we wzorach odwracanie macierzy. Odwracanie macierzy było krytycznym punktem we wszystkich wcześniejszych pracach dotyczących tego tematu.

Zastosowanie opisu w przestrzeni stanu umożliwiło stwierdzenie nierównoważności algorytmów Clarke'a, Hastings-Jamesa i Kalmana w stanach nieustalonych, co dotychczas nie było zauważane.

LITERATURA

[1] Åström K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, 1970.

[2] Clarke D.W., Hastings-James R.: Design of Digital Controllers for Randomly Disturbed Systems. Proc. IEE 118, 1971.

[3] Caines P.E.: Relationship Between Box-Jenkins, Åström Control Laws and Kalman Linear Regulator. Proc. IEE 119, 1972.

[4] Watson W. (1976) Box-Jenkins, Åström and Kalman Linear Control Laws and their Equivalence. Proc. IEE 123.

[5] Lam K.P. (1980) Implicit and Explicit Self Tuning Regulators. Ph.D. thesis Univ, of Oxford Dept. of Eng. Science.

[6] Błachuta M., Ordys A. (1984) Związek algorytmów Åströma i Kalmana dla problemu sterowania minimalno-wariancyjnego. ZN Pol. Śl., S. Automatyka, z. 74.

Recenzent: Prof. dr hab. Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do Redakcji 1.04.1986

СВЯЗЬ АЛГОРИТМОВ КЛЬАРКА, ХАСТИНГС-ДЖЕЙМСА И КАЛЬМАНА ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ МИНИМАЛЬНО-ВАРИАНЦИЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе рассматривается динамический, дискретный во времени, линейный объект с одним входом и одним выходом, описанный уравнениями:

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i + gv_i \tag{i}$$

$$y_i = d^T x_i + v_i \tag{ii}$$

u_i - управление, v_i - помехи (динамический во времени белый гауссовый шум), y_i - выход, x_i - состояние.

Для такого объекта вводится алгоритм минимализующий критерий качества:

$$J_i = E(y_{i+k}^2 + \lambda u_i^2) \tag{iii}$$

k - задержка в контуре управления.

В работе доказывается, что алгоритм минимально-вариацийной регуляции, называемый алгоритмом Кльарка, Хастингс-Джеймса является асимптотическим видом представленного алгоритма, полученным в итоге бесконечно длинного времени его действия. Доказательство проводится через превращение алгоритма в трансмитанцийный вид.

В работе выведены также режимы стабильности для асимптотического алгоритма.

RELATIONSHIP BETWEEN CLARKE, HASTINGS-JAMES AND KALMAN ALGORITMS FOR MINIMUM-VARIANCE CONTROL PROBLEM

S u m m a r y

In the paper a dynamic, discrete - time, linear single-input single-output plant is considered. It is assumed to satisfy equations:

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i + gv_i \tag{i}$$

$$y_i = d^T x_i + v_i \tag{ii}$$

where: u_i - control, v_i - distrubance (discrete time gaussian white noise), y_i - output, x_i - state.

For such a plant an algorithm which minimizes a performance index:

$$J_i = E(y_{i+k}^2 + \lambda u_i^2) \tag{iii}$$

is derived. It is shown that asymptotic form of this algorithm, which is obtained after infinite time becomes the Clarke, Hastings-James algorithm. The proof is done by transforming the algorithm into the transmittance form. Conditions for stability of asymptotic algorithm are also presented.