

Andrzej GONIEWICZ

Maciej SIWCZYŃSKI

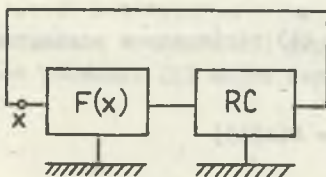
Institut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

KRYTERIUM WYBORU OPTIMALNEGO CZWÓRNIKA SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO
W GENERATORZE SINUSOIDALNYM

Streszczenie. W artykule przeprowadzono optymalizację generatora RC ze sprzężeniem zwrotnym. Optymalizacja polegała na takim doborze współczynników wielomianu charakterystycznego czwórnik RC, aby zminimalizować wrażliwość częstotliwości drgań na zmiany zapasu wzbudzenia i zminimalizować stałą czasową przebiegów przejściowych. Zapewnia to minimalne zniekształcenia nieliniowe przy minimalnym czasie ustalania drgań.

1. Wstęp

W pracy będziemy się zajmować optymalizacją generatora RC (rys.1). Założymy, że czwórnik sprzężenia zwrotnego złożony z minimalnej liczby elementów RC ma strukturę drabinkową, a wszystkie kondensatory posiadają wspólną uziemioną okładkę. Założenia te podyktowane są względami technologicznymi. Od generatora wymaga się dużej stabilności częstotliwości drgań. Dlatego przy syntezie generatorów - oprócz zapewnienia jak największej stabilności wartości elementów - dąży się do zmniejszenia zniekształceń nieliniowych, których wzrost powoduje niekorzystne zwiększenie wrażliwości częstotliwości drgań na zmiany parametrów układu. Jednak zmniejszenie znie-



Rys. 1

kształceń nieliniowych pogarsza własności dynamiczne generatora - zwiększa czas ustalania drgań. Dlatego przy optymalizacji należy brać pod uwagę oba te czynniki jednocześnie. W pracy tej dąży się do zaprojektowania czwórnik RC w taki sposób, aby zminimalizować zniekształcenia nieliniowe przy minimalnym czasie ustalania drgań.

Równanie generatora pokazanego na rys. 1 ma postać:

$$n(\dot{s})x = F(x),$$

(1)

gdzie $\hat{s} = \frac{d}{dt}$, $n(s)$ jest jednym z czterech wielomianów charakterystycznych czwórnika RC [5, 6], x oznacza napięcie lub prąd w miejscu oznaczonym kółkiem na rys. 1 i należy do zbioru funkcji ciągłych ograniczonych, $F(x)$ jest ciągłą funkcją przejścia wzmacniacza o postaci:

$$F(x) = -kx + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots = -kx + f(x) \quad (2)$$

Liczba k jest w takim razie współczynnikiem wzmocnienia wzmacniacza. Zbiór wszystkich funkcji wymiernych operacji s wchodzi w skład ciała ułamków spłotowych.

Z równania (1) i wyrażenia (2) otrzymujemy wielomian charakterystyczny generatora

$$W(s) = n(s) + k, \quad (3)$$

który powinien mieć dwa zera zespolone w prawej półpłaszczyźnie w niewielkiej odległości od osi urojonej i pozostałe zera w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Aby spełnić te warunki wielomian ten musi być co najmniej trzeciego stopnia [8]. Przybliżoną wartość częstotliwości drgań ω_0 , tak zwaną częstotliwość izochroniczną otrzymamy rozwiązując równanie:

$$\text{Im}W(j\omega) = 0 \quad (4)$$

2. Analiza dynamiki generatora

Kładąc $x(t) = \sum_k y_k(t)e^{jk\omega_0 t}$ równanie (1) zapiszemy w postaci:

$$\sum_k e^{jk\omega_0 t} n(\hat{s} + jk\omega_0) y_k(t) = F(x(t)) \quad (5)$$

Do badania dynamiki generatora zastosujemy przestrzeń $E(L)$. Jej elementami są ciągi nieskończone

$$y = (y_0(t), y_1(t), y_2(t), y_2(t), \dots) = \{y_n(t)\},$$

przy czym każda współrzędna $y_n(t)$ jest elementem przestrzeni L .

Przestrzeń L tworzą wszystkie ciągłe, ograniczone funkcje $f(t)$ takie, że $f(t) = 0$ dla $t < 0$ i dla których istnieje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$. Normy w przestrzeniach L i $E(L)$ określone są następująco:

$$\|f\|_L = \int_0^{\infty} e^{-t} |f(t)| dt, \quad \|y\|_{E(L)} = \left(\sum_n \|y_n\|_L^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Równanie generatora (5) w przestrzeni $E(L)$ przyjmie postać

$$y = \hat{K}\hat{A}y, \quad (6)$$

gdzie operacje \hat{K} , \hat{A} określone są w następujący sposób:

$$\hat{K}y = \left\{ \frac{1}{n(\hat{s} + jk\omega_0 \hat{1})} y_k(t) \right\}, \quad \hat{A}y = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T F \left(\sum_k e^{jk\omega_0 t} y_k(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \right\}$$

Można udowodnić, że operacja całkowa \hat{K} odwzorowuje przestrzeń $E(L)$ w siebie, a \hat{A} spełnia warunek Lipschitza.

Wprowadzając operację rzutowania

$$\hat{P}y = (0, y_1, y_{-1}, 0, 0, \dots) \quad (7)$$

możemy napisać $y = \hat{P}y + (\hat{1} - \hat{P})y = x + z$, a następnie równanie (6) rozłożyć na dwa równania:

$$x = \hat{P}\hat{K}\hat{A}(x + z) \quad (8)$$

$$z = (\hat{1} - \hat{P})\hat{K}\hat{A}(x + z) \quad (9)$$

Rozwiązanie równania (9) przy pewnym ustalonym $x \in E(L)$ ma postać: $z = Rx$. Zatem równanie (8) można zapisać w formie następującej:

$$x = \hat{P}\hat{K}\hat{A}(x + Rx) \quad (10)$$

Oszacowanie normy rezolwenty \hat{R} daje:

$$\|\hat{R}x\|_{E(L)} = \|(\hat{1} - \hat{P})\hat{K}\hat{A}(x+z)\|_{E(L)} < q\|y\|_{E(L)}$$

Zamiast rozwiązywać równanie (6) w nieskończonej wymiarowej przestrzeni rozwiązujemy równanie (10) w skończonej wymiarowej przestrzeni rzutowej. Jeżeli q jest małe, to wystarczy rozwiązać równanie przybliżone

$$x = \hat{P}\hat{K}\hat{A}x, \quad (11)$$

które prowadzi już do równania w przestrzeni L (ponieważ $y_{-1} = y_1^*$)

$$y = \frac{\hat{i}}{n(s+j\omega_0 \hat{i})} \frac{1}{T} \int_0^T F(y_1 e^{j\omega_0 t} + y_1^* e^{j\omega_0 t}) e^{-j\omega_0 t} dt,$$

stąd:

$$W(\hat{s}+j\omega_0 \hat{i})y_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f(y_1 e^{j\omega_0 t} + y_1^* e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega_0 t} dt \quad (12)$$

Jeżeli w rozwinięciu (2) funkcji F ograniczyć się tylko do pierwszej i trzeciej potęgi zmiennej, to równanie (12) przyjmie postać:

$$W(\hat{s}+j\omega_0 \hat{i})y_1 = 3k_3 y_1 |y_1|^2 \quad (13)$$

Wielomian $W(s)$ stopnia N posiada w prawej półpłaszczyźnie dwa zera sprzężone $\hat{\sigma} \pm j\omega_0$. Dlatego wielomian $W(s+j\omega_0)$ posiada zera $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma} - 2j\omega_0$. Ponieważ $\hat{\sigma}$ jest małe, wystarczy badanie wielomianu $W(s+j\omega_0)$ w otoczeniu $j\omega_0$. Zachodzi

$$W(s+j\omega_0) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \frac{d^n W(j\omega_0)}{dj\omega_0^n} s^n$$

W otoczeniu $j\omega_0$ wystarczy badać wielomian pierwszego stopnia

$$W(s+j\omega_0) = W(j\omega_0) + \frac{dW(j\omega_0)}{dj\omega_0} s = R(\omega_0) + \frac{dW(j\omega_0)}{dj\omega_0} s$$

Symbol $\frac{dW(j\omega_0)}{dj\omega_0}$ oznacza wartość pochodnej $\frac{dW(j\omega)}{dj}$ w punkcie $j\omega_0$, a $W(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Tak więc równanie (13) można napisać w przybliżonej formie:

$$\dot{y}_1 = - \left\{ \frac{dW(j\omega_0)}{dj\omega_0} y_1 [R(\omega_0) - 3k_3 |y_1|^2] \right\} \quad (14)$$

Oznaczając $r^2 = |y_1|^2 = y_1 y_1^*$ otrzymamy:

$$\dot{r} = \frac{dX(\omega_0)}{d\omega_0} \left| \frac{dW(j\omega_0)}{d\omega_0} \right|^{-2} r [R(\omega_0) - 3k_3 r^2] \quad (15)$$

Równanie (15) w sposób przybliżony opisuje dynamikę obwódki pierwszej harmonicznej drgań generatora. Dynamikę obwódki w otoczeniu $r = 0$ i w otoczeniu amplitudy ustalonej $r_u = \sqrt{\frac{R(\omega_0)}{3k_3}}$ opisują odpowiednie równania różniczkowe

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -R(\omega_0) \frac{dX(\omega_0)}{d\omega_0} \left| \frac{dW(j\omega_0)}{d\omega_0} \right|^{-2} \rho, \\ \dot{\rho} &= 2R(\omega_0) \frac{dX(\omega_0)}{d\omega_0} \left| \frac{dW(j\omega_0)}{d\omega_0} \right|^2 \rho \end{aligned} \quad (16)$$

Z równań tych wynika, że nierówność

$$R(\omega_0) \frac{dX(\omega_0)}{d\omega_0} < 0 \quad (17)$$

jest warunkiem wzbudzenia i stabilnej pracy generatora. Na podstawie równania (16) stwierdzamy, że stałą czasową przebiegów przejściowych amplitudy w otoczeniu wartości ustalonej określa wzór:

$$\tau = 0,5 \left| \frac{dX(j\omega_0)}{d\omega_0} \right|^2 \left| R(\omega_0) \frac{dX(\omega_0)}{d\omega_0} \right|^{-1} \quad (18)$$

Dla czwórnika z minimalną liczbą elementów RC mamy:

$$n(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_4 s^5. \quad (19)$$

Częstotliwość izochroniczną i stałą czasową określają wyrażenia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}, \quad \tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a_2^2 + a_1 a_3}{a_3}, \quad (20)$$

gdzie $R(\omega_0) = k - \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_3} = \alpha > 0$ α - zapis wzbudzenia.

3. Analiza stanu ustalonego

Do badania stanu ustalonego zastosujemy przestrzeń Hilberta H nieskończonych ciągów o wyrazach zespolonych.

Równanie generatora w stanie ustalonym ma w przestrzeni H postać:

$$y = \hat{K} \hat{f} y \quad (21)$$

Jeżeli element przestrzeni H ma postać $y = (y_0, y_1, y_{-1}, y_2, y_{-2}, \dots)$, to:

$$\hat{K} \hat{f} y = \left\{ \frac{1}{W(jn\omega_0)} \frac{1}{T} \int_0^T r \left(\sum_k e^{-jn\omega_0 t} y_k \right) e^{-jn\omega_0 t} dt \right\}$$

Widać, że operacja $\hat{K} \hat{f}$ odwzorowuje przestrzeń H w siebie.

Wprowadzając operację rzutowania (7) i dokonując rozkładu $y = \hat{P}y + (\hat{I} - \hat{P})y = x + z$ rozbijamy równanie (21) na dwa równania:

$$x = \hat{P} \hat{K} \hat{f} (x + z) \quad (22)$$

$$z = (\hat{I} - \hat{P}) \hat{K} \hat{f} (x + z) \quad (23)$$

Pierwsze przybliżenie - czyli amplitudę podstawowej harmonicznej - otrzymuje się, rozwiązując równanie

$$x = \hat{P} \hat{K} \hat{f} x \quad (24)$$

Poprawkę pierwszego rzędu obliczamy z równania (23)

$$z^1 = (\hat{I} - \hat{P}) \hat{K} \hat{f} x \quad (25)$$

Analogicznie można obliczyć poprawki wyższych rzędów. Postępowanie takie jest uzasadnione tym, że operacja $(\hat{I} - \hat{P}) \hat{K} \hat{f}$ jest zwężająca.

Rozwiązanie równania (24) ma postać:

$$x = (0, y_1, y_{-1}, 0, 0, \dots) = (0, \sqrt{\frac{\alpha}{3k_3}}, \sqrt{\frac{\alpha}{3k_3}}, 0, 0, \dots)$$

Poprawka pierwszego rzędu

$$z^1 = (\hat{I} - \hat{P}) \hat{K} \hat{f} x = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{k_3 y_1^3}{W(3j\omega_0)}, \frac{k_3 y_{-1}^3}{W(-3j\omega_0)}, 0, \dots)$$

Czyli $y_3 = \frac{k_3 y_1^3}{W(3j\omega_0)}$, skąd otrzymamy przybliżoną wartość współczynnika za-
wartości trzeciej harmonicznej, którą uznamy dalej za wartość współczynni-
ka zniekształceń nieliniowych

$$\mathcal{K} = \frac{|y_3|}{|y_1|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{|W(3j\omega_0)|} \quad (26)$$

W celu dokładniejszego obliczenia częstotliwości drgań Ω rozkładamy rów-
nanie (21) na dwa równania $y = \hat{K} x$, $x = \hat{F} y$.

Dla ciennej funkcji \hat{F} warunek okresowości drgań ma postać:

$$(\hat{K} x, \dot{x}) = 0, \quad (27)$$

gdzie $\dot{x} \{j\Omega x_n\}$ jest pochodną względem Ωt , a (\cdot, \cdot) oznacza iloczyn skalar-
ny w przestrzeni H .

Podstawiając do równania (27) wielomian trzeciego stopnia (19) otrzy-
mamy po przekształceniach:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\|\dot{y}\|_H}{\|y\|_H} \approx \sqrt{\frac{1+9\mathcal{K}^2}{1+81\mathcal{K}^2}} \approx \frac{1+4,5\mathcal{K}^2}{1+40,5\mathcal{K}^2} \quad (28)$$

4. Optymalizacja generatora

Optymalizacja generatora będzie polegać na takim doborze współczynni-
ków wielomianu charakterystycznego czwórnika RC (19), aby zminimalizować
wrażliwość częstotliwości drgań na zmiany zapasu wzbudzenia α i zminima-
lizować stałą czasową τ przebiegów przejściowych.

W tym celu obliczamy

$$\frac{d\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)}{d\mathcal{K}} \cdot \frac{d\mathcal{K}}{d\alpha} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{W(3j\omega_0)} \cdot \frac{d\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)}{d\mathcal{K}} \quad (29)$$

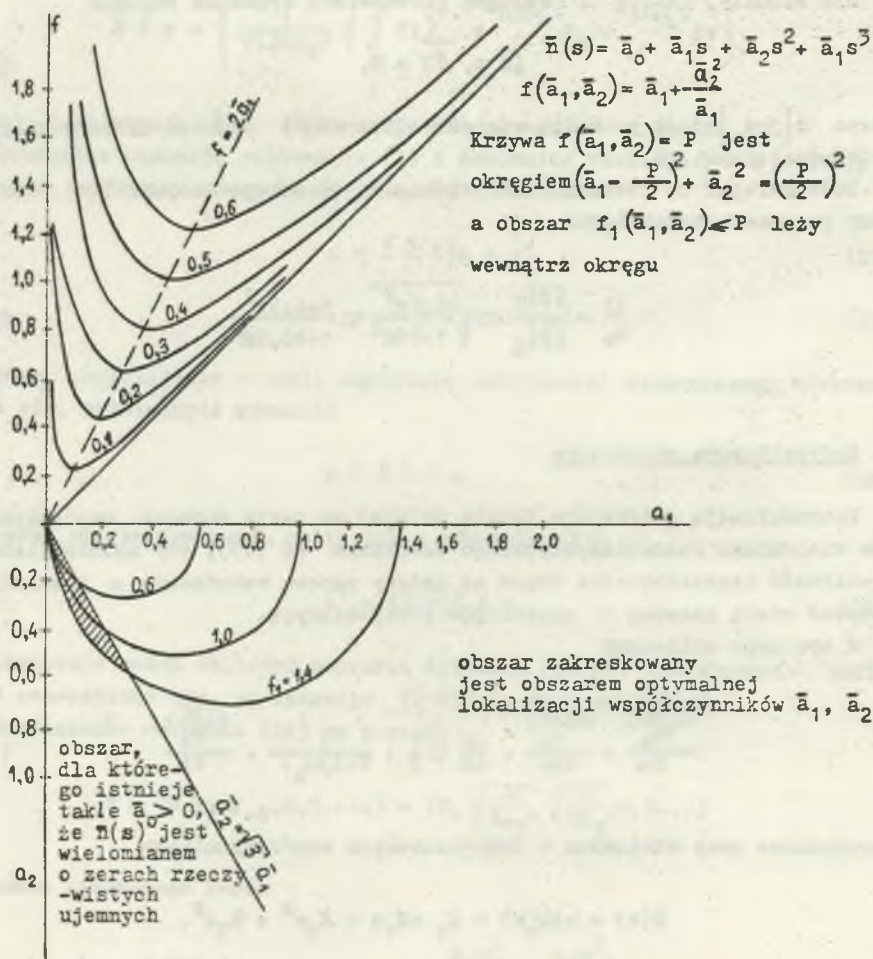
Wprowadzamy nowy wielomian o bezwymiarowych współczynnikach

$$\tilde{n}(s) = n(\omega_0 s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3.$$

Związki między współczynnikami wielomianów $n(s)$ i $\bar{n}(s)$ są następujące:

$$\bar{a}_0 = a_0, \quad \bar{a}_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \bar{a}_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \bar{a}_3 = \frac{a_3}{a_0}.$$

Z warunku $\frac{a_1}{a_3} = \omega_0^2$ otrzymujemy $\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_3} = 1$.



Rys. 2

Jednocześnie mamy:

$$W(3j\omega_0)^2 = 576(\omega_0 a_1)^2 + (\alpha - 8\omega_0^2 a_2)^2 = 576\bar{a}_1^2 + (\alpha - 8\bar{a}_2)^2 \quad (30)$$

oraz ze wzoru (20) na stałą czasową

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\omega_0} \left(\bar{a}_1 + \frac{\bar{a}_2^2}{\bar{a}_1} \right) \quad (31)$$

Z wyrażeń (29) i (31) wynika, że optymalizacja generatora polega na doborze współczynników \bar{a}_1 , \bar{a}_2 oraz \bar{a}_0 , aby funkcja (31) przyjmowała wartość możliwie najmniejszą, funkcja (30) wartość możliwie największą, a wielomian $\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_1 s^3$ posiadał zera rzeczywiste ujemne.

Na rys. 2 pokazano sposób konstrukcji na płaszczyźnie \bar{a}_1 , \bar{a}_2 obszaru będącego zbiorem punktów, dla których wielomian $n(s)$ ma wyłącznie zera rzeczywiste ujemne i stała czasowa τ nie przekracza pewnego poziomu. Określenie tego obszaru umożliwia lokalizację optymalnych współczynników wielomianu. Z uwagi na maksymalizację funkcji (30) wybieramy z tego obszaru punkt o możliwie dużej współrzędnej \bar{a}_1 . Współczynnik \bar{a}_0 dobieramy tak, aby wielomian $\bar{n}(s)$ posiadał wyłącznie zera rzeczywiste ujemne.

LITERATURA

- [1] ACHIEZER N.I., GLAZMAN I.M.: Teoria liniowych operatorów w gільbertowom prostranstwie. Nauka, Moskwa 1966.
- [2] GROSZKOWSKI J.: Wytwarzanie drgań elektrycznych. WNT, Warszawa 1958.
- [3] JEWTLANOW S.I.: Lämpowyje gienieratory. Nauka, Moskwa 1967.
- [4] KUDREWICZ J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT, Warszawa 1970.
- [5] MATHAEI G.L.: Some Simplications for Analysis of Linear Circuits. Trans. IEE v. CT-4, No 3, 1957.
- [6] PIAN L.: Linear Active Network Theory, Prentice Hall 1962.
- [7] RUDIN W.: Functional analysis. Mc Graw-Hill B.C. 1973.
- [8] SIWCZYŃSKI M.: Synchronizacja złożonych, słabo sprzęgniętych układów samowzbudnych. Arch. Elektrot. T. XXIII, z. 4, Warszawa 1974.

Recenzent: doc. dr hab. in. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji: 14.IV.1983 r.

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ
СИНУСОИДАЛЬНОГО ГЕНЕРАТОРА

Р е з ю м е

В статье представлен метод оптимального синтеза RC - генератора с обратной связью, который гарантирует одновременную минимальность нелинейных искажений колебаний и постоянной времени переходных процессов.

CRITERION OF CHOICE OF AN OPTIMAL FEEDBACK TWO PORT
IN THE SINUSOIDAL WAVE RC / λ GENERATOR

S u m m a r y

In the paper the optimization of the RC feedback generator is described. Coefficients of the characteristic polinomial have been chosen to minimize nonlinear distortion and a time of transient state.