

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Institut Podstawowych Problemów  
 Elektrotechniki i Energoelektroniki  
 Politechnika Śląska

## POŁĄCZENIA ELEMENTÓW OSOBLIWYCH Z DWÓJNIKAMI KLASYCZNYMI

**Streszczenie.** Opisano charakterystyczne dla sieci osobliwych reguły rozdzielności połączeń szeregowych i równoległych względem siebie. Przedstawiono sposób określenia dwójnika zastępczego przy połączeniach mieszanych elementów osobliwych i klasycznych, ilustrując go analizą podstawowych dwójników układów z przełączanymi kondensatorami.

## 1. Wstęp

Dwójniki elektryczne, na zaciskach których prąd i napięcie mogą być tylko zerowe lub dowolne w pewnym obszarze wartości, nazywane są elementami osobliwymi.

Do zbioru tych elementów oprócz wprowadzonych przez Carline i Youla'ę [1] nullators i norators, można także zaliczyć przerwę i zwarcie [2], uogólnione komutatory [3], źródła autonomiczne [4] oraz idealne elementy diodowe [5]. Jak pokazano w pracach [3, 4, 5], elementy te można opisywać za pomocą formuł boolowskich, korzystając z transformacji  $N$  przekształcającej zbiór  $R$  liczb rzeczywistych w zbiór dwuelementowy  $\{0,1\}$  według definicji:

$$Nx = \bar{x} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in R \text{ i jest równe tylko } 0 \\ 1 & \text{gdy } x \in R \text{ i jest dowolne} \end{cases}$$

Formuły te mają ogólną postać:

$$A \bar{i} + B \bar{u} = 0, \quad (2)$$

w których:

- $A, B$  - są operatorami logicznymi o wartościach ze zbioru  $\{0,1\}$ , które mogą być stałe, zależne od czasu lub od obszarów zmienności prądu i napięcia,  
 "·" "+" "-" - są odpowiednio logicznymi działaniami koniunkcji, alternatywy i równoważności.

Natomiast  $\vec{i}$ ,  $\vec{u}$  są N-transformacjami prądu i napięcia. Własności opisywanego przez formułę (2) dwójnika osobliwego określone są jednoznacznie przez operatory A i B, gdyż prąd i napięcie mogą przyjmować tylko takie wartości, dla których formuła ta jest spełniona.

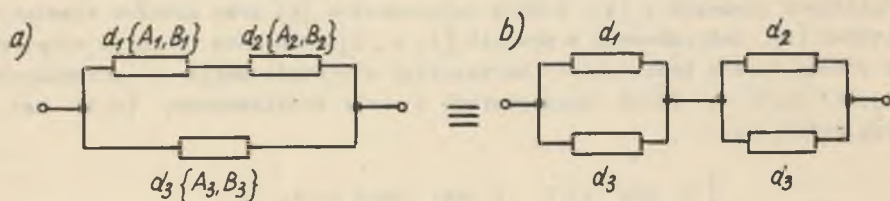
## 2. Charakterystyczne własności sieci elementów osobliwych

W pracach [3], [4], [5] pokazano sposób poszukiwania dwójników osobliwych równoważnych do danej sieci osobliwej widzianej między dwoma wybranymi węzłami. Sprowadza się on do wykonania odpowiednich działań logicznych na operatorach opisujących poprzez formuły boolowskie typu (2) elementy składowe tej sieci. Dla połączeń szeregowego i równoległego dwóch elementów opisanych parami operatorów  $\{A_1, B_1\}$  oraz  $\{A_2, B_2\}$ , elementy zastępcze opisują odpowiednio formuły:

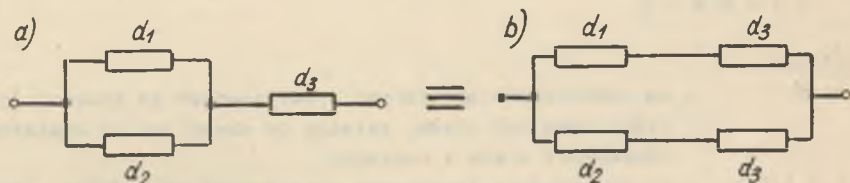
$$(A_1 + A_2)\vec{i} + (B_1 \cdot B_2)\vec{u} = 0 \quad (3)$$

$$(A_1 \cdot A_2)\vec{i} + (B_1 + B_2)\vec{u} = 0 \quad (4)$$

Korzystając z podanych związków można wykazać równoważność tak zwanych połączeń mieszanych trzech dwójników osobliwych przedstawionych na rys. 1 oraz rys. 2.



Rys. 1



Rys. 2

I tak układy a) i b) z rys. 1 opisują odpowiednio formuły boolowskie:

$$\left[ (A_1 + A_2) A_3 \right] \bar{1} + \left[ B_1 B_2 + B_3 \right] \bar{u} = 0 \quad (5)$$

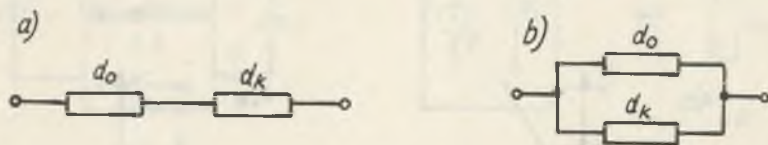
$$\left[ A_1 A_3 + A_2 A_3 \right] \bar{1} + \left[ (B_1 + B_3) (B_2 + B_3) \right] \bar{u} = 0 \quad (6)$$

Dwa dwójniki osobliwe można uważać za równoważne jeżeli operatory logiczne w opisujących je formułach boolowskich są sobie równe, co dla relacji (5) i (6) można łatwo pokazać na podstawie reguł rozdzielności dodawania względem mnożenia (operatory A) oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania (operatory B), obowiązujących w algebrze Boole'a [7]. Wykazaną równoważność układów a) i b) z rys. 1 można nazwać regułą rozdzielności połączenia szeregowego względem równoległego elementu osobliwego, natomiast równoważność układów z rys. 2 regułą rozdzielności połączenia równoległego względem dwójnika osobliwego szeregowego.

Pokazane reguły rozdzielności nie obowiązują dla połączeń dwójników klasycznych (nieosobliwych), które opisują prawa algebry klasycznej [8].

### 3. Połączenia elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi

Rozpatrywane będą podstawowe połączenia, przedstawione na rys. 3, dwójnika osobliwego  $d_o$  opisanego formułą (2) z dwójnikiem klasycznym  $d_k$  opisanym zależnością funkcyjną algebry klasycznej wiążącą jego zmienne zaciskowe.



Rys. 3

W obu przypadkach dwójnik zastępczy może być osobliwym lub klasycznym, przy czym uzależnione to jest wyłącznie od wartości operatorów  $\{A, B\}$  opisujących element osobliwy. Aby to rozstrzygnąć należy badać dla połączenia szeregowego wartość relacji (7), a dla równoległego wartość relacji (8), które są funkcjami logicznymi typu iloczyn z zakazem.

$$E_S = \bar{A} B \quad (7)$$

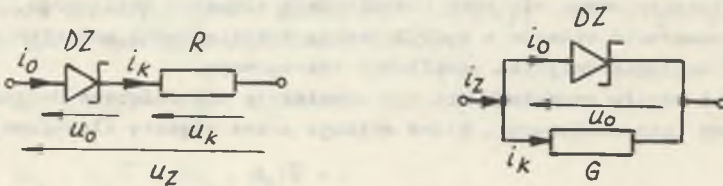
$$E_R = A \bar{B} \quad (8)$$

Wartość operatora  $\bar{E}$  dla odpowiedniego połączenia dwójników poprzez relację (9) decyduje o rodzaju dwójnika zastępczego  $d_z$ .

$$d_z = d_o \bar{E} + d_k E \quad (9)$$

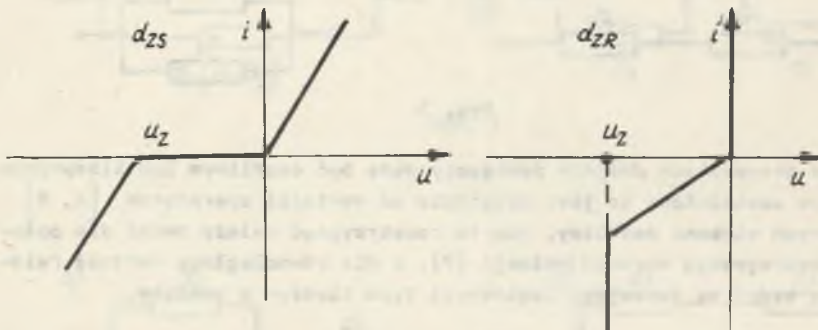
Dla dwójników osobliwych zmiennych w czasie (np. typu komutator) należy relacje (7), (8) i (9) rozpatrywać w odpowiednich przedziałach czasowych, natomiast dla dwójników osobliwych nieliniowych (np. elementy diodowe) dla odpowiednich przedziałów zmiennych zaciskowych.

Przykładem ilustrującym powyższe zależności (7) (8) (9) mogą być układy połączeń idealnej diody Zenera z rezystancją i konduktancją (rys. 4).



Rys. 4

Dla obu połączeń diody Zenera szeregowego i równoległego wartości odpowiednich operatorów według relacji (7) (8) (9) przedstawiono w tabelicy 1 oraz zilustrowano zależnościami geometrycznymi na płaszczyźnie  $i - u$ , pokazanymi na rys. 5.



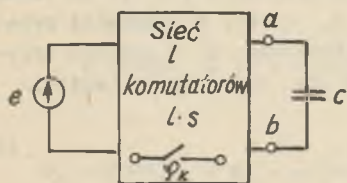
Rys. 5

Tablica 1

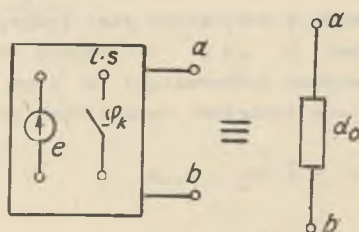
$i_0$	$u_0$	A	B	$E_S$	$E_r$	$d_{zS}$	$d_{zR}$
$>0$	0	0	1	1	0	$d_k$	$d_0$
0	$u_z \neq 0$	1	0	0	1	$d_0$	$d_k$
$<0$	$U_0$	0	1	1	0	$d_k$	$d_0$

4. Układy SC jako przykład połączeń elementów klasycznych

Układy SC są typowym przykładem połączeń komutatorów sterowanych określonymi dyskretnymi funkcjami czasu  $\varphi$ , jako elementów osobliwych oraz kondensatorów jako elementów klasycznych. Modele podstawowych bloków SC można przedstawić ogólnie w postaci schematu podanego na rys. 6, przy czym źródło  $e$  reprezentuje zmienny w czasie sygnał wejściowy  $u_1$ .



Rys. 6

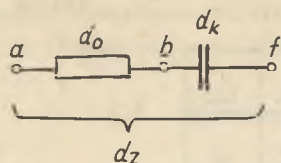


Rys. 7

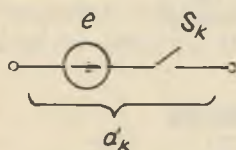
Źródło  $e$  wraz z siecią  $L$  i komutatorem tworzą dwójnik osobliwy  $d_0$  widziany z zacisków  $ab$  (rys. 7). Układ wypadkowy  $d_0 d_k$  będzie rozpatrywany jako połączenie szeregowe dwójnika wypadkowego  $d_0$  z kondensatorem  $C$  (rys. 8).

Jeżeli komutatory  $S_1$  do  $S_n$  będą sterowane dyskretnymi funkcjami czasu  $\varphi_1$  do  $\varphi_n$  i ich negacjami  $\bar{\varphi}_1$  do  $\bar{\varphi}_n$ , to elementy sieci komutatorowej łącznie ze źródłem  $e$  opisują formuły:

$$\left. \begin{aligned}
 S_1: \bar{\varphi}_1 \tilde{i} + \varphi_1 \tilde{u} &= 0 \\
 \dots \dots \dots \\
 S_k: \bar{\varphi}_k \tilde{i} + \varphi_k \tilde{u} &= 0 \\
 \dots \dots \dots \\
 S_n: \bar{\varphi}_n \tilde{i} + \varphi_n \tilde{u} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Rys. 8



Rys. 9

$$e: 0 \bar{i} + 1(\bar{u}-e) = 0 \quad (11)$$

Formułę (11) można inaczej zapisać jako (12) dla przesuniętego o  $e$  układu współrzędnych.

$$0 \bar{i} + 1 < e > \bar{u} = 0 \quad (12)$$

W układach SC zawsze z sygnałem wejściowym  $u_1$  (czyli źródłem  $e$ ) występuje w połączeniu szeregowym jeden z komutatorów  $S_k$ , pełniąc rolę elementu kwantyzującego napięcie  $u_1$  w czasie [9]. Powoduje to występowanie w sieci osobliwej  $d_0$  gałęzi o strukturze podanej na rys. 9 opisanej formułą (13).

$$d_k: \bar{\varphi}_k \bar{i} + \varphi_k < e > \bar{u} = 0 \quad (13)$$

Obliczając zastępczy osobliwy dwójnik całej sieci komutatorowej  $d_0$  otrzymuje się formułę (14), w której operatory  $A$  i  $B$  są funkcjami boolowskimi operatorów zmiennych w czasie  $\varphi_1$  do  $\varphi_1$  oraz ich negacji.

$$A[\varphi_1 \dots \varphi_1, \bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_1] \bar{i} + B[\varphi_1 \dots \varphi_1, \bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_1] \bar{u} = 0 \quad (14)$$

Konsekwencją powyższego jest także zależność relacji (7) i (9) od funkcji czasowych  $\varphi_1$  do  $\varphi_1$  dla całego dwójnika  $d_z$  z rys. 8. Napięcia przed naładowaniem kondensatora  $u'$  i po jego naładowaniu  $u''$  w ogólnym przypadku będą funkcjami dyskretnymi przebiegów  $\varphi_1$  do  $\varphi_1$  oraz napięcia  $e$ .

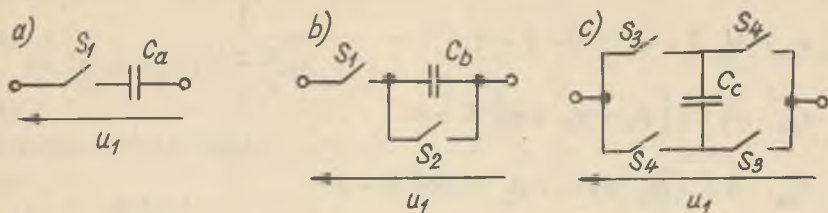
$$u' = f'(\varphi_1 \dots \varphi_1, e) \quad (15)$$

$$u'' = f''(\varphi_1 \dots \varphi_1, e) \quad (16)$$

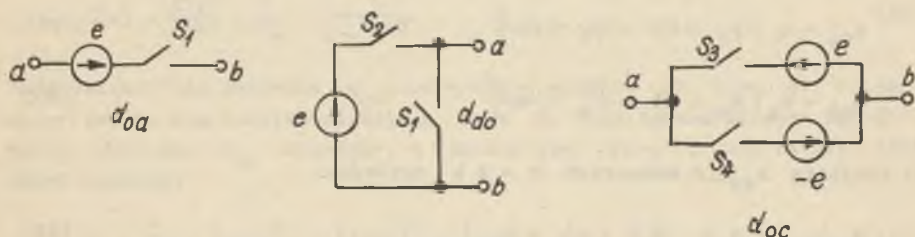
Dla koncepcji układów SC przedstawionej przez Fettweisa [10] zbiór dwójników podstawowych, które są odpowiednikami dwójników klasycznych  $C$ ,  $R$  i  $L$  pokazany jest na rys. 10, a odpowiadające im sieci osobliwe na rys. 11.

Pracę kluczy  $S_1$  do  $S_4$  opisują dyskretne funkcje czasu będące okresowymi ciągami impulsów zerowyjedynekowych opisanych wraz z ich transformacjami  $Z$  przez relacje:

$$\varphi_1 = \left\{ 1010 \right\}_4 \hat{=} \bar{\varphi}_1 = \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-4}} = \frac{1}{1 - z^{-2}} \quad (17)$$



Rys. 10



Rys. 11

$$\varphi_2 = \{0101\}_4 \hat{=} \Phi_2 = \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-4}} = \frac{z^{-1}}{1 - z^2} \quad (18)$$

$$\varphi_3 = \{1000\}_4 \hat{=} \Phi_3 = \frac{1}{1 - z^{-4}} \quad (19)$$

$$\varphi_4 = \{0010\}_4 \hat{=} \Phi_4 = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-4}} \quad (20)$$

Klucze  $S_1$  do  $S_4$  opisywane są zatem formułami:

$$S_1: \varphi_2 \vec{i} + \varphi_1 \vec{u} = 0 \quad (21)$$

$$S_2: \varphi_1 \vec{i} + \varphi_2 \vec{u} = 0 \quad (22)$$

$$S_3: \varphi_3 \vec{i} + \varphi_4 \vec{u} = 0 \quad (23)$$

$$S_4: \varphi_4 \vec{i} + \varphi_3 \vec{u} = 0 \quad (24)$$

Natomiast dwójniki osobliwe z rys. 11 formułami:

$$d_{0a}: \varphi_2 \vec{1} + \varphi_1 \langle e \rangle \vec{u} = 0 \quad (25)$$

$$d_{0b}: 0 \vec{1} + [\varphi_2 + \varphi_1 \langle e \rangle] \vec{u} = 0 \quad (26)$$

$$d_{0c}: 0 \vec{1} + [\varphi_4 \langle e \rangle + \varphi_3 \langle -e \rangle] \vec{u} = 0 \quad (27)$$

Odpowiadające im relacje typu (9) mają postać:

$$d_{za} = d_o \bar{\varphi}_1 \langle e \rangle + d_k \varphi_1 \langle e \rangle \quad (28)$$

$$d_{zb} = d_k [\varphi_2 \langle 0 \rangle + \varphi_1 \langle e \rangle] \quad (29)$$

$$d_{zc} = d_k [\varphi_4 \langle e \rangle + \varphi_3 \langle -e \rangle] \quad (30)$$

Dla dwójnika  $d_{za}$  w momentach  $n = 2k$  zachodzi:

$$d_{za(2k)} = d_o 0 + d_k 1 \langle e \rangle = d_k \quad (31)$$

Zatem kondensator ładuje się do napięcia  $e$  bowiem prąd może być dowolny, gdyż  $A = \varphi = 0$ . W momentach  $n = 2k + 1$  zachodzi:

$$d_{za(2k+1)} = d_o 1 \langle e \rangle + d_k \cdot 0 = d_o \quad (32)$$

Lecz  $d_o$  jest wtedy przerwą, a zatem  $u_c$  pozostaje takie samo jak dla poprzedzającego momentu parzystego.

Napięcia na kondensatorze  $C_a$  wynoszą:

$$u_a'(n) = \sum_0^n \varphi_1(k) e(n-k) \quad (33)$$

$$u_a''(n) = \sum_0^n \varphi_1(k-2) e(n-k) \quad (34)$$

Stąd transformata Z ładunku dopływającego:

$$\Delta Q_a(z) = C_a E(z) [\varphi_1(z) - \varphi_1(z) z^{-2}] \quad (35)$$



czyli:

$$\Delta Q_a(z) = C_a E(z) \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-2}} \quad (36)$$

Prąd można określić jako:

$$I(z) = \frac{\Delta Q(z)}{T} \quad (37)$$

gdzie  $T = 2\tau$ , a  $\tau$  jest odstępem kwantyzacji dyskretnych funkcji czasu. Impedancja  $Z(z)$  wynosi zatem:

$$Z(z) = \frac{E(z)}{I(z)} = \frac{T}{C_a} \cdot \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad (38)$$

Analogicznie dla dwójnika  $d_{zb}$ , po zwarcie punktów  $a_f$  (rys. 8), kondensator ładuje się kolejno do napięć  $e$  i  $0$ . Prąd ładowania może być dowolny, gdyż dla  $d_{ob}$  operator  $A$  zawsze jest równy  $0$ . Dla relacji (29) można napisać:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \left\{ 1010 \right\}_4 + \left\{ 0101 \right\}_4 = \left\{ 1 \ 1 \right\}_2 = \varphi_0 \quad (39)$$

Stąd jej transformata  $Z$ :

$$\Phi_0 = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-2}} = \mathbf{1}(z) \quad (40)$$

Napięcia na  $C_b$  wynoszące:

$$u_b^I(n) = \sum_0^n \varphi_0(k) e(n-k) \quad (41)$$

$$u_b^II(n) = \sum_0^n \varphi_0(k-1) 0 = 0 \quad (42)$$

Stąd:

$$Q_b(z) = C_b E(z) \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = C_b E(z) \mathbf{1}(z) \quad (43)$$

Natomiast:

$$Z_b(z) = \frac{T}{C_b} \quad (44)$$

Dla trzeciego dwójnika  $d_{zc}$  po zwarciu punktów af kondensator ładuje się na przemian do napięć  $e$  i  $-e$ .

Dla relacji (30) można napisać:

$$\varphi_3 + \varphi_4 = \{1010\}_4 = \{10\}_2 = \varphi_1 \quad (45)$$

Napięcia na kondensatorze  $C_c$  wynoszą:

$$u'_c(n) = \sum_0^n \varphi_1(k) e(n-k) \quad (46)$$

$$u''_c(n) = \sum_0^n \varphi_1(k-2) [-e(n-k)] \quad (47)$$

Stąd:

$$Q_c(z) = C_c E(z) [\Phi_1(z) + \Phi_1(z) z^{-2}] \quad (48)$$

Czyli:

$$Q_c(z) = C_c E(z) \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad (49)$$

Stąd:

$$Z_c(z) = \frac{T}{C} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-2}} \quad (50)$$

Jeżeli dla impedancji  $Z(z)$  opisanych relacjami (38), (44) i (50) wprowadzić przekształcenia:

$$z^2 = w \quad (51)$$

oraz:

$$\frac{w - 1}{w + 1} = \psi \quad (52)$$

to otrzymuje się relacje:

$$Z_a = \frac{T}{C_a} \cdot \frac{1}{\psi} \quad (53)$$

$$z_b = \frac{1}{C_b} \quad (54)$$

$$z_c = \frac{1}{C_c} \psi \quad (55)$$

które opisują odpowiedniki elementów C, R i L na płaszczyźnie  $\psi$ .

##### 5. Uwagi końcowe

Przedstawiony sposób opisu połączeń układów elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi daje dla prostych przykładów wyniki zgodne z otrzymanymi poprzez metody klasyczne. Wydaje się także, że opis ten może być dużym ułatwieniem przy analizie układów bardziej złożonych, które można by rozwiązywać z zastosowaniem przekształceń macierzy boolowskich [6] w miejsce operatorów A i B.

##### LITERATURA

- [ 1 ] Carlin H.J., Youla D.C.: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, 49, 1961.
- [ 2 ] Davies A.C.: The Significance of Nullators, Norators and Nullors in Active - network Theory. The Radio and Electr. Engin. Nov. 1967.
- [ 3 ] Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V SPETO, Ustroń 1981, ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 79; 1982.
- [ 4 ] Topór-Kamiński L.: Wprowadzenia idealnych źródeł autonomicznych i źródłatora do zbioru elementów osobliwych. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 71, 1983.
- [ 5 ] Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. VI SPETO, Ustroń 1983.
- [ 6 ] Topór-Kamiński L.: Analize obwodów osobliwych metodą macierzowych formuł boolowskich. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka (przyjęte do druku).
- [ 7 ] Grzegorzczak A.: Zarys logiki matematycznej. PWN, Warszawa 1981.
- [ 8 ] Opiał Z.: Algebra wyższa. PWN, Warszawa 1976.
- [ 9 ] Nosssek J.A.: Switched - Capacitor - Filters: A Comparison of the Basic Design Principles. ECCTD, Warszawa 1980.
- [ 10 ] Tettweis A.: Basic Principles of Switched Capacitor - Filters Using Voltage Inverter Switches. Arch. Elektron. u. Übertragungstechnik, 33, 1973.

Recenzent: doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do redakcji dnia 10 maja 1984 r.

СОЕДИНЕНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КЛАССИЧЕСКИМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

Резюме

В статье описаны типичные для аномальных сетей правила распределения соединений последовательных и параллельных относительно себя. Представлен метод определения заменительного двухполюсника для смешанных соединений аномальных и классических элементов также приведён анализ основных двухполюсников в ёмкостно-ключевых цепях.

CONNECTIONS OF SINGULAR ELEMENTS WITH CONVENTIONAL ELEMENTS

Summary

The characteristic distributivity rules of series and parallel connections for singular networks are described.

The method of determining of the equivalent one-part for mixed connections of singular and conventional elements is shown and illustrated by means of the analysis of basic one parts with switched capacitors.

[1] Corbin H.C., *IEEE Trans. AP-10*, No. 1, 1962.

[2] Corbin H.C., *The Significance of Singular Elements in Network Theory*, The Radio and Electron. Engng. Soc., 1967.

[3] Topór-Kamiński L., *Prace Instytutu Inżynierii Elektrycznej i Elektroniki, Ser. 1*, No. 1, 1971.

[4] Topór-Kamiński L., *Prace Instytutu Inżynierii Elektrycznej i Elektroniki, Ser. 1*, No. 2, 1972.

[5] Topór-Kamiński L., *Prace Instytutu Inżynierii Elektrycznej i Elektroniki, Ser. 1*, No. 3, 1973.

[6] Topór-Kamiński L., *Prace Instytutu Inżynierii Elektrycznej i Elektroniki, Ser. 1*, No. 4, 1974.

[7] Topór-Kamiński L., *Prace Instytutu Inżynierii Elektrycznej i Elektroniki, Ser. 1*, No. 5, 1975.

[8] Golik L., *Algebra wykład. PWN Warszawa 1975*.

[9] Kozick J.K., *Switched - Capacitor - Filter: A Comparison of the Switch Design Principles*, SCDD, Warsaw 1980.

[10] Topór-Kamiński L., *Prace Instytutu Inżynierii Elektrycznej i Elektroniki, Ser. 1*, No. 6, 1976.