ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Jan CHOJCAN

Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

OBLICZANIE WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW I ICH ZASTOSOWANIE

Streszczenie. W pracy przedstawiono wzory na obliczenie wrażliwości 2 i 3 rzędu funkcji układowych (oraz ich modułu i fazy) w dziedzinie częstotliwości. Uwzględnienie wrażliwości wyższych rzędów pozwala na rozszerzenie kresu górnego wrażliwości małoprzyrostowych. Pozwala to na lepszą aproksymację funkcji układowych przy większych odchyłkach parametrów.

1. Wprowadzenie

Do analizy zachowania się obwodów przy małych zmianach wartości parametrów wykorzystuje się wrażliwości małoprzyrostowe 1 rzędu. Można określić ich kres górny [7, 10]. Przy większych zmianach wartości parametrów wykorzystuje się wrażliwości wielkoprzyrostowe. Mankamentem tej metody jest znaczny nakład czasu na analizę.

Wykorzystanie małoprzyrostowych wrażliwości wyższych rzędów rozszerza znacznie zakres stosowania metod małoprzyrostowej analizy wrażliwościowej dla większych przyrostów parametrów. Takiemu postawieniu problemu i próbie jego rozwiązania poświęcona jest ta praca.

Wyprowadzono wzory na obliczanie wrażliwości 2 i 3 rzędu efektywną metodę obwodów dołączonych w dziedzinie częstotliwości dla liniowych obwodów złożonych z dwójników pasywnych i źródeł sterowanych i niesterowanych. Podano również wzory na wrażliwości modułu fazy prostych i złożonych funkcji układowych.

Przeanalizowano ile i jakich dodatkowych obwodów należy rozwiązać aby obliczyć współczynniki wrażliwości 2 i 3 rzędu.

Wskazano, na prostych przykładach, na możliwość znacznego zwiększenia kresu górnego wrażliwości małoprzyrostowych.

2. Wrażliwości 2 rzędu

Do obliczania wrażliwości 2 rzędu wykorzystano metodę obwodów dołączonych [1, 2, 4, 5, 6, 8], a uzyskane wyniki dla prostych funkcji układowych podano w pracach [9, 10]. Dla przypomnienia podano wzory na wrażliwość napięcia wyjściowego układu U_o na zmiany admitancji Y_i oraz Y_j

$$S^{U_o}_{Y_i^2} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{Y_i^2}{U_o} \cdot \frac{\partial^2 U_o}{\partial Y_i^2} = \frac{Y_i^2}{U_o} U_i U_i^o U_i^{o,i} \tag{1}$$

$$S^{U_o}_{Y_i Y_j} \stackrel{df}{=} \frac{Y_i Y_j}{U_o} \cdot \frac{\partial^2 U_o}{\partial Y_i \partial Y_j} = \frac{Y_i Y_j}{U_o}(U_i U_j^o U_j^{o,i} + U_i^o U_j U_i^{o,j}) \tag{2}$$

gdzie

U_i, U_j – napięcie na admitancji $Y_i(Y_j)$ w obwodzie podstawowym,

U_i^o, U_j^o – napięcie na tych samych elementach w obwodzie dołączonym,

$U_i^{o,i}$, $U_j^{o,i}$ – napięcia na Y_i, Y_j w obwodzie podstawowym zasilanym przez SPM 1 A dołączoną równolegle do admitancji Y_i,

$U_i^{o,j}$ – napięcie na admitancji Y_i w obwodzie podstawowym zasilanym przez SPM 1 A dołączoną równolegle do admitancji Y_j.

Wiadomo, że dla wrażliwości 1 rzędu

$$S^{U_o}_{x_i} = S^{|U_o|}_{x_i} + jQ^{U_o}_{x_i} \tag{3}$$

gdzie

$U_o = |U_o| e^{j\varphi}$

$S^{|U_o|}_{x_i} \stackrel{df}{=} \frac{x_i}{|U_o|} \cdot \frac{\partial |U_o|}{\partial x_i}$ – wrażliwość względna 1 rzędu modułu napięcia wyjściowego U_o na zmianę rzeczywistego parametru x_i,

$Q^{U_o}_{x_i} \stackrel{df}{=} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ – wrażliwość 1 rzędu fazy napięcia U_o na zmianę rzeczywistego parametru x_i.

Zależność ta dla wrażliwości 2 rzędu jest bardziej złożona. Można wykazać [10], że np.

$$S^{U_o}_{x_i^2} = S^{|U_o|}_{x_i^2} - \frac{1}{2}(Q^{U_o}_{x_i})^2 + j(Q^{U_o}_{x_i^2} + S^{|U_o|}_{x_i} Q^{U_o}_{x_i}) \tag{4}$$

gdzie

$S^{|U_o|}_{x_i^2} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2}{|U_o|} \cdot \frac{\partial^2 |U_o|}{\partial x_i^2}$ – wrażliwość względna 2 rzędu modułu napięcia U_o na zmianę parametru x_i,

$Q_{x_i^2}^{U_o} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\, x_i^2\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$ - wrażliwość 2 rzędu fazy napięcia U_o na zmianę parametru x_i.

Ze wzoru (4) wynika, że

$$S_{x_i^2}^{|U_o|} = \mathrm{Re}(S_{x_i^2}^{U_o}) + \frac{1}{2}(Q_{x_i}^{U_o})^2 \tag{5}$$

oraz

$$Q_{x_i^2}^{U_o} = \mathrm{Im}(S_{x_i^2}^{U_o}) - S_{x_i}^{|U_o|} Q_{x_i}^{U_o} \tag{6}$$

Postępując analogicznie, uzyskano

$$S_{x_i x_j}^{|U_o|} \stackrel{df}{=} \frac{x_i x_j}{|U_o|} \cdot \frac{\partial^2 |U_o|}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{Re}(S_{x_i x_j}^{U_o}) + Q_{x_i}^{U_o} Q_{x_j}^{U_o} \tag{7}$$

oraz

$$Q_{x_i x_j}^{U_o} \stackrel{df}{=} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{Im}(S_{x_i x_j}^{U_o}) - S_{x_i}^{|U_o|} Q_{x_j}^{U_o} - S_{x_j}^{|U_o|} Q_{x_i}^{U_o} \tag{8}$$

Dla złożonych funkcji układowych $(T = K_U, K_I, M, N, Y_{we}, Y_{wy})$ $T = \frac{a}{b}$, gdzie a, b proste funkcje układowe (prądy lub napięcia na wrotach), wrażliwości 2 rzędu na zmianę jednego parametru x_i lub dwóch x_i, x_j można wyznaczyć z zależności [10]:

$$S_{x_i^2}^{T} = S_{x_i^2}^{a} - S_{x_i^2}^{b} - S_{x_i^2}^{a} S_{x_i}^{b} + (S_{x_i}^{b})^2 \tag{9}$$

oraz

$$S_{x_i x_j}^{T} = S_{x_i x_j}^{a} - S_{x_i x_j}^{b} - S_{x_i}^{a} S_{x_j}^{b} - S_{x_j}^{a} S_{x_i}^{b} + 2S_{x_i}^{b} S_{x_j}^{b} \tag{10}$$

Po przekształceniach [10] uzyskano wzory na wrażliwości modułu i fazy funkcji układowych:

$$S_{x_i^2}^{|T|} = S_{x_i^2}^{|a|} - S_{x_i^2}^{|b|} - S_{x_i}^{|a|} S_{x_i}^{|b|} + (S_{x_i}^{|b|})^2 \tag{11}$$

i

$$Q^T_{x_i^2} = Q^a_{x_i^2} - Q^b_{x_i^2} \tag{12}$$

oraz

$$S^{|T|}_{x_i x_j} = S^{|a|}_{x_i x_j} - S^{|b|}_{x_i x_j} - S^{|a|}_{x_i} S^{|b|}_{x_j} S^{|a|}_{x_j} S^{|b|}_{x_i} + 2\, S^{|b|}_{x_i} S^{|b|}_{x_j} \tag{13}$$

i

$$Q^T_{x_i x_j} = Q^a_{x_i x_j} - Q^b_{x_i x_j} \tag{14}$$

Z przeprowadzonej w pracach [10 i 4] analizy wynika, że do obliczenia wrażliwości 2 rzędu funkcji układowej na zmianę m parametrów obwodu należy dodatkowo rozwiązać m układów równań opisujących układ podstawowy z wymuszeniami (SPM 1 A) połączonymi równolegle kolejno do każdego ze zmieniających się elementów lub gałęzi sterowanych zmieniających współczynnik sterowania źródeł.

3. Wrażliwości 3 rzędu

Obliczanie wrażliwości 3 rzędu metodą obwodów dołączonych jest bardzo ekonomiczne, wymaga bowiem tylko dodatkowej l-krotnej analizy obwodu podstawowego (gdzie l - liczba zmieniających się źródeł sterowanych) [10] zasilanego przez SPM 1 A połączoną kolejno równolegle do gałęzi sterującej zmieniającego się źródła sterowanego.

Wrażliwości względne 3 rzędu funkcji układowej T na zmiany parametrów $x_i x_j x_k$ zdefiniowane są następująco:

$$S^T_{x_i^3} \stackrel{df}{=} \frac{1}{6}\cdot\frac{x_i^3}{T}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x_i^3} \tag{15}$$

$$S^T_{x_i^2 x_j} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{x_i^2 x_j}{T}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x_i^2 \partial x_j} \tag{16}$$

$$S^T_{x_i x_j x_k} \stackrel{df}{=} \frac{x_i x_j x_k}{T}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \tag{17}$$

Prześledźmy wyprowadzenie wzoru na wrażliwość 3 rzędu prostej funkcji układowej, np. $T = U_o$ na zmianę parametru $x_i = Y_i$. Trzecia pochodna napięcia U_o podług Y_i wyznaczona jest z zależności

$$\frac{\partial^3 U_o}{\partial Y_i^3} = \frac{\partial}{\partial Y_i}(2U_i U_i^o U_i^{o,i}) = 2U_i U_i^i U_i^o U_i^{o,i} + 2U_i U_i^o U_i^{o,i},U_i^{o,i} +$$

$$+ 2U_i U_i^o U_i^{o,i} U_i^{o,i,i} = 6U_i U_i^o (U_i^{o,i})^2$$

a wrażliwość 3 rzędu

$$S_{Y_i^3}^{U_o} = \frac{1}{6} \cdot \frac{Y_i^3}{U_o} \cdot \frac{\partial^3 U_o}{\partial Y_i^3} = \frac{Y_i^3}{U_o} U_i U_i^o (U_i^{o,i})^2 . \tag{18}$$

Jeszcze wyprowadzenie wzoru na wrażliwość 3 rzędu napięcia U_o na zmianę współczynnika wzmocnienia napięciowego $x_i = ws_i$ i-tego źródła napięciowego sterowanego napięciem (ŹNSN). Trzecią pochodną napięcia U_o podług ws_i wyznacza się z zależności:

$$\frac{\partial^3 U_o}{\partial ws_i^3} = \frac{\partial}{\partial ws_i}(U_{1i} U_{1i}^{0,22i} U_{22i}^{0} + U_{1i} U_{1i}^{0} U_{22i}^{0,22i})$$

gdzie [8]

U_{1i}, U_{1i}^{0}, $U_{1i}^{0,22i}$ - napięcia na gałęzi sterującej i-tego ŹNSN kolejno w obwodzie podstawowym, dołączonym i podstawowym zasilanym przez SPM 1 A połączoną równolegle do gałęzi sterowanej tego źródła,

U_{22i}^{0}, $U_{22i}^{0,22i}$ - napięcie na gałęzi sterowanej i-tego ŹNSN kolejno w obwodzie dołączonym i podstawowym zasilanym przez SPM 1 A połączoną równolegle do gałęzi sterowanej tego źródła.

Ponieważ pochodne cząstkowe pierwszego rzędu można wyznaczyć [8] z zależności:

$$\frac{\partial U_{1i}}{\partial ws_i} = U_{1i} U_{22i}^{1i}$$

$$\frac{\partial U_{1i}^{0,22i}}{\partial ws_i} = U_{1i}^{0,22i} U_{22i}^{0,22i,1i}$$

Tablica

Lp.	Parametr x_i	Parametr x_j	Parametr x_k	Analizowane obwody (bez N i N^0)	Analizowane obwody nie wykorzystane przy obliczeniu wrażliwości drugiego rzędu	$\frac{\partial^3 U_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$
1	Y_i	Y_i	Y_i	$N^{0,i}$		$6\,U_iU_i^0(U_i^{0,i})^2$
2	Y_i	Y_i	Y_j	$N^{0,i}$, $N^{0,j}$		$2(U_iU_i^{0,i}U_jU_j^{0,i} + U_iU_i^{0,j}U_j^{0,i} + U_i^0U_i^{0,i}U_i^{0,j}U_j)$
3	Y_i	Y_j	Y_k	$N^{0,i}$, $N^{0,j}$ $N^{0,k}$		$U_i(U_j^0U_j^{0,k}U_k^{0,i} + U_j^{0,i}U_k^{0,j}) + U_i^0(U_i^{0,j}U_j^{0,k}U_k + U_i^{0,k}U_jU_k^{0,j}) + U_i^{0,j}U_jU^0_kU_k^{0,i} +$ $+ U_i^{0,k}U_j^0U_j^{0,i}U_k$
4	ŹNSN we_i	ŹNSN we_i	ŹNSN we_i	$N^{0,22i}$, $N^{0,1i}$	$N^{0,1i}$	$U_{1i}\left[2U_{1i}^0U_{1i}^{0,22i}U_{22i}^{0,22i} + 2U_{22i}^0(U_{1i}^{0,22i})^2 + U_{1i}^0U_{22i}^{0,22i} \cdot (U_{1i}^{0,22i} + U_{22i}^{0,1i})\right]$
5	ŹNSN we_i	ŹNSN we_i	ŹNSN we_j	$N^{0,22i}$ $N^{0,22j}$ $N^{0,1i}$	$N^{0,1i}$	$U_{1i}U_{1j}^0(U_{1i}^{0,22i}U_{22j}^{0,22i} + U_{22i}^{0,22i}U_{22j}^{0,1i}) + U_{1i}U_{1j}^{0,22i} \cdot$ $\cdot (U_{1i}^0U_{22i}^{0,22j} + U_{1i}^{0,22j}U_{22i}^0) + U_{1i}^{0,22j}U_{1j}(U_{1i}^{0,22i}U_{1i}^0 + U_{1i}^0U_{22i}^{0,22i})$
6	ŹNSN we_i	ŹNSN we_j	ŹNSN we_k	$N^{0,22i}$ $N^{0,22j}$ $N^{0,22k}$		$U_{1i}^0(U_{22i}^{0,22j}U_{1j}^{0,22k}U_{1k} + U_{22i}^{0,22k}U_{1j}U_{1k}^{0,22j}) + U_{1j}U_{1k} \cdot$ $\cdot (U_{1i}U_{22k}^{0,22j} + U_{22i}^{0,22j}U_{22k}^{0,22j}) + U_{22j}^0(U_{1i}U_{1j}^{0,22k}U_{1k}^{0,22i} + U_{1i}^{0,22k}U_{1j}^{0,22i}U_{1k})$
7	ŹNSN we_i	Y_j	Y_j	$N^{0,j}$ $N^{0,22i}$		$2U_{1i}^{0,j}U_j(U_j^{0,j}U_{22i}^0 + U_j^0U_j^{0,22i}) + 2U_{1i}U_j^0U_j^{0,j}U_j^{0,22i}$
8	ŹNSN we_i	Y_j	Y_k	$N^{0,22i}$ $N^{0,j}$, $N^{0,k}$		$U_{1i}(U_j^{0,22i}U_k^0U_k^{0,j} + U_j^0U_j^{0,k}\,{}^{0,22i}) + U_{22i}(U_{1i}^{0,k}U_jU_k^{0,j} +$ $+ U_{1i}^{0,j}U_j^{0,k}U_k) + U_{1i}^{0,j}U_jU_k^0U_k^{0,22i} + U_{1i}^{0,k}U_j^0U_j^{0,22i}U_k$

$$\frac{\partial U^0_{22i}}{\partial ws_i} = U^0_{1i} U^{0,22i}_{22i}$$

$$\frac{\partial U^0_{1i}}{\partial ws_i} = U^0_{1i} U^{0,1i}_{22i}$$

$$\frac{\partial U^{0,22i}_{22i}}{\partial ws_i} = U^{0.22i}_{1i} U^{0.22i.22i}_{22i}$$

więc po przekształceniach i wykorzystaniu zasady międzywzajemności [1, 10] uzyskamy wzór na wrażliwość postaci:

$$S^{U_o}_{ws_i^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ws_i^3}{U_o} U_{1i}(2U^0_{1i}U^{0,22i}_{1i}U^{0,22i}_{22i} + 2U^0_{22i}(U^{0,22i}_{1i})^2 +$$

$$+ U^0_{1i}U^{0,22i}_{22i}(U^{0,22i}_{1i} + U^{0,1i}_{22i})). \qquad (19)$$

Wszystkie wzory podano w pracy [10], niektóre z nich umieszczono w tablicy 1. Analogicznie, jak dla wrażliwości 2 rzędu, wyprowadza się wzory na wrażliwości 3 rzędu modułu i fazy prostych funkcji układowych (np. $T = U_o$) na zmiany parametrów $x_i x_j x_k$ i tak [10]

$$S^{|U_0|}_{x_i^3} \overset{df}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{x_i^3}{U_0} \cdot \frac{\partial^3 |U_0|}{\partial x_i^3} = \mathrm{Re}(S^{U_0}_{x_i^3}) + \frac{1}{2} S^{|U_0|}_{x_i}(Q^{U_0}_{x_i})^2 + Q^{U_0}_{x_i^2} Q^{U_0}_{x_i} \qquad (20)$$

i

$$Q^{U_0}_{x_i^3} \overset{df}{=} \frac{1}{6} x_i^3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i^3} = \mathrm{Im}(S^{U_0}_{x_i^3}) - S^{|U_0|}_{x_i^2} Q^{U_0}_{x_i} - S^{|U_0|}_{x_i} Q^{U_0}_{x_i^2} + \frac{1}{6}(Q^{U_0}_{x_i})^3 \qquad (21)$$

oraz

$$S^{|U_0|}_{x_i^2 x_j} \overset{df}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 x_j}{|U_0|} \cdot \frac{\partial^3 |U_0|}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \mathrm{Re}(S^{U_0}_{x_i^2 x_j}) + \frac{1}{2} S^{|U_0|}_{x_j}(Q^{U_0}_{x_i})^2 +$$

$$+ S^{|U_0|}_{x_i} \cdot Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_j} + Q^{U_0}_{x_i x_j} Q^{U_0}_{x_i} + Q^{U_0}_{x_i^2} Q^{U_0}_{x_j} \qquad (22)$$

i

$$Q^{U_0}_{x_i^2 x_j} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} x_i^2 x_j \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \mathrm{Im}(S^{U_0}_{x_i^2 x_j}) - S^{|U_0|}_{x_i^2} Q^{U_0}_{x_j} - S^{|U_0|}_{x_i x_j} Q^{U_0}_{x_i} -$$

$$- S^{|U_0|}_{x_i} Q^{U_0}_{x_i x_j} - S^{|U_0|}_{x_j} Q^{U_0}_{x_i^2} + \frac{1}{2}(Q^{U_0}_{x_i})^2 Q^{U_0}_{x_j} \tag{23}$$

wreszcie

$$S^{|U_0|}_{x_i x_j x_k} \stackrel{df}{=} \frac{x_i x_j x_k}{|U_0|} \cdot \frac{\partial^3 |U_0|}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \mathrm{Re}(S^{U_0}_{x_i x_j x_k}) + S^{|U_0|}_{x_i} \cdot Q^{U_0}_{x_j} Q^{U_0}_{x_k} +$$

$$+ S^{|U_0|}_{x_j} Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_k} + S^{|U_0|}_{x_k} Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_k} + Q^{U_0}_{x_i x_j} Q^{U_0}_{x_k} +$$

$$+ Q^{U_0}_{x_i x_k} Q^{U_0}_{x_j} + Q^{U_0}_{x_j x_k} Q^{U_0}_{x_i} \tag{24}$$

i

$$Q^{U_0}_{x_i x_j x_k} \stackrel{df}{=} x_i x_j x_k \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \mathrm{Im}(S^{U_0}_{x_i x_j x_k}) - S^{|U_0|}_{x_i x_j} \cdot Q^{U_0}_{x_k} -$$

$$- S^{|U_0|}_{x_i x_k x_j} Q^{U_0}_{x_j} - S^{|U_0|}_{x_j x_k} Q^{U_0}_{x_i} - S^{|U_0|}_{x_i} Q^{U_0}_{x_j x_k} -$$

$$- S^{|U_0|}_{x_j} Q^{U_0}_{x_i x_k} - S^{|U_0|}_{x_k} Q^{U_0}_{x_i x_j} + Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_j} Q^{U_0}_{x_k}. \tag{25}$$

Wzory dla złożonych funkcji układowych podano w pracy [10].

Tak więc dla obliczenia wrażliwości małoprzyrostowej prostej funkcji układowej na zmiany, np. n parametrów metodą obwodów dołączonych należy przeprowadzić analizę:

- obwodu podstawowego N i dołączonego N^0 (wrażliwości 1 rzędu),
- n obwodów podstawowych ($N^{0,i}$, $i = 1,\dots,n$) zasilanych przez SPM 1 A połączoną kolejno równolegle do każdego ze zmieniających się elementów jeśli jest to dwójnik lub równolegle do gałęzi sterowanych, jeśli zmieniającym się parametrem jest współczynnik sterowania źródła sterowanego (wrażliwości 2 rzędu),
- l obwodów podstawowych (gdzie l - liczba zmieniających się współczynników sterowania źródeł sterowanych) zasilanych kolejno przez SPM 1 A połączoną równolegle do gałęzi sterujących zmieniających się źródeł

(wrażliwości 3 rzędu), czyli liczba niezbędnych analiz obwodu do obliczenia wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu wynosi

$$N = 2 + n + 1. \tag{26}$$

4. Zastosowanie

Jak już wspomniano wrażliwości wyższych rzędów mogą być wykorzystane również do lepszej aproksymacji funkcji układowych dla większych, niż to było możliwe przy uwzględnieniu tylko wrażliwości 1 rzędu, odchyłek wartości parametrów obwodu. Przeanalizujemy dokładność aproksymacji modułu funkcji układowej T.

Gdy uwzględnione zostaną wrażliwości 1 rzędu wówczas odchyłka

$$t'_{|T|} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{|T|} t_i, \tag{27}$$

gdzie

n – liczba parametrów obwodu uwzględnionych przy obliczaniu wrażliwości 1 rzędu,

t_i – odchyłka i-go parametru x_i.

Po uwzględnieniu wrażliwości 1 i 2 rzędu odchyłka aproksymowana jest zależnością

$$t''_{|T|} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{|T|} t_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} S_{x_i x_j}^{|T|} t_i t_j \tag{28}$$

gdzie

m – liczba parametrów obwodu uwzględnionych przy obliczaniu wrażliwości 2 rzędu,

t_j – odchyłka j-go parametru x_j.

Analogicznie, gdy uwzględnimy wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu

$$t'''_{|T|} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{|T|} t_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} S_{x_i x_j}^{|T|} t_i t_j + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=j}^{p} S_{x_i x_j x_k}^{|T|} t_i t_j t_k \tag{29}$$

gdzie

p - liczba parametrów obwodu uwzględnionych przy obliczaniu wrażliwości 3 rzędu,

t_k - odchyłka k-go parametru x_k.

Na uwagę zasługuje fakt, że w zależnościach (28) (29) występują wrażliwości modułów funkcji układowych a nie części rzeczywiste wrażliwości funkcji układowych.

Analogicznie, jak dla wrażliwości 1 rzędu, można i dla wrażliwości wyższych rzędów zdefiniować kres górny wrażliwości małoprzyrostowych jako tę wartość odchyłki parametrów, dla której moduł względnej różnicy między odchyłką funkcji układowej aproksymowanej zależnością (27) (28) lub (29) a dokładną wartością tej odchyłki jest mniejszy od zadanej wartości e(e = 0,005; 0,01; 0,05; 0,1) [3, 7, 10].

Dla najgorszych warunków pracy (dla wrażliwości 1 rzędu) i równych (co do modułów) tolerancyjnych parametrów zależności (27) (28) (29) redukują się do postaci

$$t'_{|T|} = at, \tag{30}$$

$$t''_{|T|} = at + bt^2, \tag{31}$$

$$t'''_{|T|} = at + bt^2 + ct^3 \tag{32}$$

Aproksymacja odchyłki jest przedstawiona w postaci potęgowego szeregu Taylora, więc uwzględnienie kolejnego wyrazu rozwinięcia zmniejsza resztę, czyli błąd aproksymacji.

Oznaczmy dokładną wartość odchyłki modułu funkcji układowej przez $t^0_{|T|}$ wówczas kres górny wrażliwości małoprzyrostowych można wyznaczyć z zależności:

$$\left| \frac{t'_{|T|} - t^0_{|T|}}{t^0_{|T|}} \right| = e \tag{33}$$

dla wrażliwości 1 rzędu,

$$\left| \frac{t''_{|T|} - t^0_{|T|}}{t^0_{|T|}} \right| = e \tag{34}$$

dla wrażliwości 1 i 2 rzędu

$$\left| \frac{t'''_{|T|} - t^0_{|T|}}{t^0_{|T|}} \right| = e \tag{35}$$

dla wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu.

Zilustrujmy te wyniki prostymi, dla przejrzystości, przykładami. Bardziej złożone podano w pracy [10].

Przykład 1

Należy określić kres górny wrażliwości małoprzyrostowej dla wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu oporowego dzielnika napięcia EG_1G_2 dla najgorszych warunków pracy dzielnika $(t_1 = t_{G1} = t = -t_{G_2} = -t_2)$ jeśli napięcie wyjściowe $T = U_o$ zbierane jest z G_2, $t_E = 0$ a nominalna wartości parametrów: $E = 3$ V, $G_1 = 1$ S, $G_2 = 0{,}5$ S.

Odchyłka napięcia U_o dla najgorszych warunków pracy aproksymowana jest zależnością

$$t_{U_0} = (S^{U_0}_{G_1} t_1 + S^{U_0}_{G_2} t_2) + (S^{U_0}_{G_1^2} t_1^2 + S^{U_0}_{G_1 G_2} t_1 t_2 + S^{U_0}_{G_2^2} t_2^2) +$$

$$+ S^{U_0}_{G_1^3} t_1^3 + S^{U_0}_{G_1^2 G_2} t_1^2 t_2 + S^{U_0}_{G_1 G_2^2} t_1 t_2^2 + S^{U_0}_{G_2^3} t_2^3) =$$

$$= (S^{U_0}_{G_1} - S^{U_0}_{G_2}) t + (S^{U_0}_{G_1^2} + S^{U_0}_{G_2^2} - S^{U_0}_{G_1 G_2}) t^2 +$$

$$+ (S^{U_0}_{G_1^3} + S^{U_0}_{G_1 G_2^2} - S^{U_0}_{G_1^2 G_2} - S^{U_0}_{G_2^3}) t^3 = \frac{2}{3} t - \frac{2}{9} t^2 + \frac{2}{27} t^3 .$$

Stąd można obliczyć, że kres górny tolerancji $t = t_g$ wynosi:

- dla wrażliwości 1 rzędu $t_g = \pm 3\,e$,
- dla wrażliwości 1 i 2 rzędu $t_g = \pm 3\sqrt{|e|}$,
- dla wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu $t_g = \pm 3\sqrt[3]{|e|}$.

W tablicy 2 podano kresy górne tolerancji dla kilku wartości e.

Tablica 2

$\lvert t_g \rvert$ dla wrażliwości rzędu:	e = 0,05	e = 0,01	e = 0,05	e = 0,1
1	0,015	0,03	0,15	0,3
1 i 2	0,212	0,3	0,671	0,949
1, 2 i 3	0,513	0,646	1,11	1,393

Przykład 2

Dzielnik z poprzedniego przykładu zastąpiono dzielnikiem EGC. Nominalne wartości: $E = 1$ V, $G = 1$ S, $\omega C = 1$ S. Funkcja układowa $T = U_0$, gdzie U_0 napięcie na zaciskach kondensatora.

Kresy górne tolerancji i modułu napięcia U_0 dla najniekorzystniejszych warunków pracy $(t = t_G = -t_C)$ dla kilku wartości e podano w tablicy 3.

Tablica 3

|tg| dla wrażliwości rzędu:	e = 0,005	e = 0,01	e = 0,05	e = 0,1
1	0,01	0,02	0,088	0,16
1 i 2	0,102	0,145	0,31	0,51
1, 2 i 3	0,215	0,27	0,428	0,52

5. Wnioski

Wykorzystanie wrażliwości wyższych rzędów do zwiększenia dokładności aproksymacji lub rozszerzenia przedziału dopuszczalnych odchyłek parametrów przy stałym błędzie aproksymacji funkcji układowej budzi, ze względu na konkurencyjny w porównaniu z analizą wielkoprzyrostową czas obliczeń, uzasadnioną nadzieję na ich szersze zastosowanie.

Uwzględnienie wrażliwości wyższych, niż 3 rzędów nie wymaga dodatkowych analiz obwodu, wydłużają się jednak wzory końcowe.

LITERATURA

[1] Calahan D.: Projektowanie układów elektronicznych za pomocę maszyn cyfrowych, WNT, Warszawa 1978.

[2] Chua L., Pen-M.L.: Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

[3] Styblińskl M.: Metody analizy i optymalizacji tolerancji parametrów układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

[4] Seth A.K., Roe P.H.: Higher Derivative Network Sensitivities Using Adjoint Network, Int. J. Cir. Theory Appl., Vol. 1, 215-226 (1973).

[5] Richards G.A.: Second-Derivative Sensitivity Using the Concept of the Adjoint Network, El. Lett., 5, 398-399 (1969).

[6] Goddard P.J., Spence R.: Efficient Method for Calculation of First and Secong-Order Network Sensitivities, El. Lett., 5, 351-352 (1969).

[7] Metody statystycznej i wrażliwościowej analizy i optymalizacji układów, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1981.

[8] Chojcan J., Lasek L.: Metody analizy wrażliwościowej układów elektronicznych, skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej, wyd. II, Gliwice 1982.

[9] Chojcan J.: Analiza wrażliwości wyższych rzędów, Materiały VI KKTOiUE s. 156-161, Gliwice 1983.

[10] Chojcan J.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów, Raport wewnętrzny Instytutu Elektroniki, Gliwice 1983.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Tadeusiewicz

Wpłynęło do redakcji dnie 10 maja 1984 r.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Р е з ю м е

В статье представлен анализ чувствительности, методом присоединённых схем, второго и третьего порядка. Рассматривается применение его к анализу разбросов выходов электронных схем. Представлены численные примеры.

SOLVING OF HIGHER ORDER NETWORK SENSITIVITIES AND THEIR APPLICATIONS

S u m m a r y

In the paper formulas for solving second and third order network sensitivities in the frequency domain and their application to the approximation of the transfer functions for larger change of parameters are given.