ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Andrzej DRYGAJŁO

Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

DYSKRETNE DIADYCZNE UKŁADY LINIOWE

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis dyskretnych układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego wykorzystując metodę odpowiedzi impulsowej. Wykazano, że diadyczne układy liniowe mogą być realizowane przez cyfrowe skalarne filtry sekwencyjnościowe za pomocą algorytmów szybkich transformacji.

1. Wprowadzenie

Rozwój techniki cyfrowej, oparty na postępach technologii układów scalonych, stworzył potrzebę adekwatnej analizy i syntezy liniowych układów dyskretnych za pomocą algorytmów o minimalnej złożoności obliczeniowej. Znaczny postęp w tym zakresie można uzyskać na bazie teorii sekwencyjnościowej sygnałów [1], w której pod pojęciem sekwencyjność rozumiana jest uogólniona częstotliwość oznaczająca jedną drugą liczby przejść przez zero funkcji Walsha w przedziale określoności.

Punktem wyjścia do rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy są następujące znane stwierdzenia [2]:

- matematyczną definicją układu dyskretnego jest jednoznaczne przekształcenie lub operator, który odwzorowuje ciąg wejściowy $\{x\}$ w ciąg wyjściowy $\{y\}$:

$$\{y\} = T[\{x\}] \tag{1}$$

- klasy układów dyskretnych określa się na podstawie właściwości $T[.]$.
- klasę układów liniowych określa zasada superpozycji: jeśli $\{y_1\}$ i $\{y_2\}$ są odpowiedziami układu odpowiednio na pobudzenia $\{x_1\}$ i $\{x_2\}$, to układ jest liniowy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T\left[a\{x_1\} + b\{x_2\}\right] = a\,T\left[\{x_1\}\right] + b\,T\left[\{x_2\}\right] = a\{y_1\} + b\{y_2\} \tag{2}$$

dla dowolnych stałych a i b.

2. Splot diadyczny

Dowolny skończony ciąg $\{x(m)\}$ dany w $N = 2^p$ $(p = 0,1,2,\ldots)$ punktach można wyrazić jako sumę diadycznie przesuniętych i pomnożonych ciągów impulsowych

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m \ominus n)\, x(n) \tag{3}$$

gdzie $\ominus$ oznacza różnicę modulo 2, która jest równoważna sumie modulo 2 oznaczanej przez $\oplus$.

Zatem opis równoważny ma postać

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m \oplus n)\, x(n) \tag{4}$$

Przykładowo, wynik zastosowania operacji przesunięcia diadycznego dyskretnych sygnałów skończonych danych w $N = 8$ punktach przedstawia rysunek 1. Można zauważyć, że przesunięcie diadyczne skończonych ciągów $\{x(n)\}$ dla $N = 2^p$ zachowuje ich podstawowe symetrie.

Diadyczny sposób przedstawiania sygnałów (4) w połączeniu z zależnością (2) sugeruje, że układ liniowy można w pełni scharakteryzować za pomocą jego odpowiedzi impulsowej.

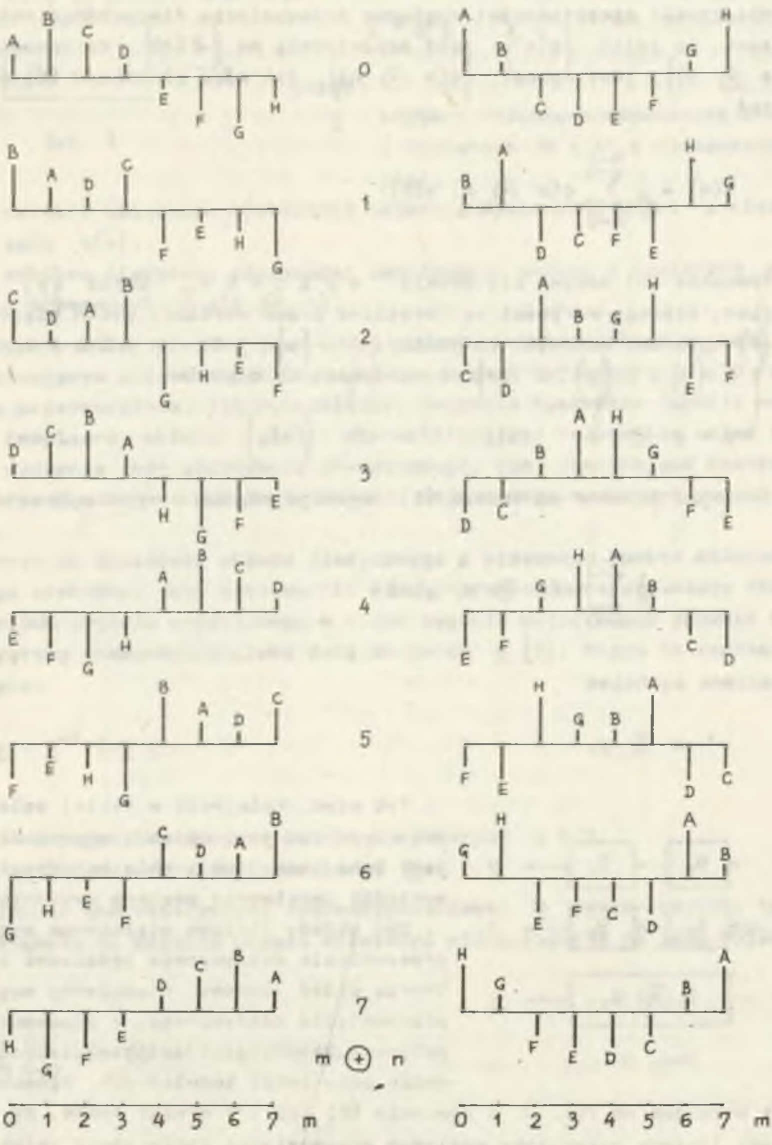
W szczególności niech $\{g(m,n)\}$ będzie odpowiednią układu na ciąg impulsowy $\delta(m \oplus n)$, występujący dla $m = n$. Wówczas z zależności (1) i (4):

$$y(m) = T\left[\sum_{n=0}^{N-1} \delta(m \oplus n)\, x(n)\right].$$

Na podstawie równania (2) można napisać

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} T\left[\delta(m \oplus n)\right] x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(m,n)\, x(n) \tag{5}$$

Zgodnie z zależnością (5) odpowiedź układu na pobudzenie $\{x(n)\}$ można wyrazić w zależności od odpowiedzi układu na $\{\delta(m \oplus n)\}$. Jeśli narzucić tylko warunek liniowości, $g(m,n)$ będzie zależeć zarówno od m jak i od n, a to bardzo ograniczy możliwości obliczenia wyrażenia (5). Znacznie bardziej użyteczne wyniki uzyskuje się, jeśli przyjąć dodatkowo warunek niezmienności względem przesunięcia diadycznego.



Rys. 1

Klasę układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego charakteryzuje się przez właściwość, że jeśli $\{y(m)\}$ jest odpowiedzią na pobudzenie $\{x(n)\}$, to $\{y(m \oplus k)\}$ jest odpowiedzią na $\{x(n \oplus k)\}$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą [3], [4].

Właściwość niezmienności względem przesunięcia diadycznego nasuwa wniosek, że jeśli $\{g(n)\}$ jest odpowiedzią na $\{\delta(n)\}$, to odpowiedzią na $\{\delta(m \oplus n)\}$ jest wprost $\{g(m \oplus n)\}$. Tak więc zależność (5) przyjmuje postać

$$y(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(m \oplus n)\, x(n) \tag{6}$$

Równanie (6) nazywa się zwykle *splotem*. Jeśli $\{y\}$ jest ciągiem, którego wartości są określone przez wartości dwóch ciągów $\{g\}$ i $\{x\}$ poprzez wzór (6) to mówimy, że $\{y\}$ jest *splotem diadycznym* $\{g\}$ z $\{x\}$ i oznaczamy to symbolem

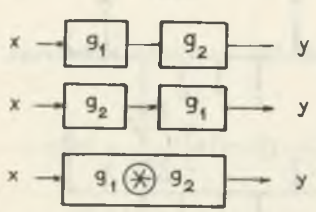
$$y = g \circledast x$$

Zamieniając zmienne we wzorze (6) uzyskuje się inne wyrażenie

$$y(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(m \oplus n)\, g(n) \tag{7}$$

oznaczane symbolem

$$y = x \circledast g.$$

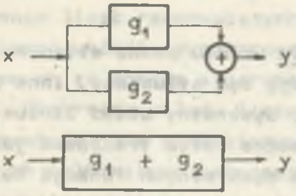


Rys. 2

Tak więc, kolejność w jakiej splata się dwa ciągi nie jest ważna i odpowiedź układu jest taka sama, jeśli role pobudzenia i odpowiedzi impulsowej zostaną zamienione.

Dwa układy liniowe niezmienne względem przesunięcia diadycznego połączone kaskadowo tworzą układ liniowy, niezmienny względem przesunięcia diadycznego, o odpowiedzi impulsowej, która jest splotem diadycznym dwóch odpowiedzi impulsowych. Właściwość ta jest pokazana na rys. 2. Z równania (6) lub (7) wynika także, że dwa układy liniowe niezmienne względem przesunięcia diadycznego połączone równolegle są równoważne jednemu układowi, którego odpowiedź impulsowa jest sumą poszczególnych odpowiedzi impulsowych. Pokazano na na rys. 3.

3. Realizacja diadycznych układów liniowych



Rys. 3

Jak wynika z zapisu (6) równanie splotu diadycznego można wyrazić macierzowo:

$$\underline{y} = \underline{g}\,\underline{x} \tag{8}$$

gdzie:

$\underline{y}$ - macierz kolumnowa odpowiedzi układu o wymiarach $N \times 1$ i elementach $y(m)$,

$\underline{x}$ - macierz kolumnowa wymuszenia układu o wymiarach $N \otimes 1$ i elementach $x(n)$,

$\underline{g}$ - macierz diadyczna odpowiedzi impulsowych układu o wymiarach $N \times N$ i elementach $\frac{1}{N}\, g(m \oplus n)$.

Diadyczny układ liniowy jest swego rodzaju przetwornikiem sygnału, przetwarzającym sygnał wejściowy $\{x\}$ na sygnał wyjściowy $\{y\}$. O rodzaju tego przetwarzania, jak wykazaliśmy, decyduje dyskretna funkcja odpowiedzi impulsowej układu $\{g(n)\}$ charakteryzująca całkowicie układ z punktu widzenia jego zachowania zewnętrznego, tzn. zawierająca dostateczną informację, aby na podstawie sygnału wejściowego wyznaczyć sygnał wyjściowy.

Patrząc na działanie układu diadycznego z widmowego punktu widzenia, można go traktować jako przetwornik widma, przekształcający widmo sekwencyjnościowe sygnału wejściowego w widmo sygnału wyjściowego zgodnie z charakterystyką sekwencyjnościową daną macierzą $\underline{G}$ [5]. Można to zapisać następująco:

$$\underline{y} = \underline{W}^{-1}\,\underline{G}\,\underline{W}\,\underline{x} \tag{9}$$

gdzie:

$\underline{W}$ - ortogonalne macierz Walsha o wymiarach $N \times N$,

$\underline{W}^{-1}$ - macierz odwrotna do macierzy $\underline{W}$.

Znajomość charakterystyki sekwencyjnościowej $\underline{G}$ wystarcza, aby znając widmo sygnału na wejściu układu wyznaczyć widmo sygnału na jego wyjściu. Zatem

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(m \oplus n)\, x(n) \triangleq \underline{G}\,\underline{X} \tag{10}$$

gdzie:

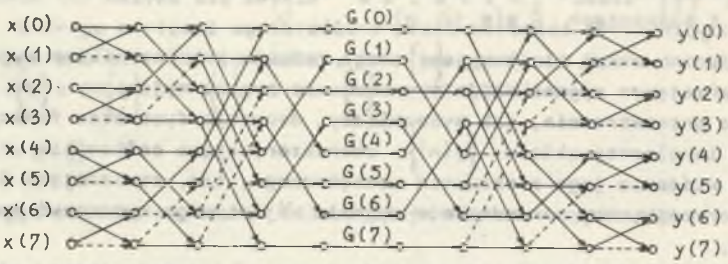
$\underline{X}$ - transformata Walsha sygnału $\underline{x}$.

oraz

$$\underline{g} = \underline{W}^{-1}\,\underline{G}\,\underline{W} \tag{11}$$

W zależności od kształtu charakterystyki $\underline{G}$ układu pewne składowe sekwencyjnościowe widma sygnału wejściowego mogą być stłumione, inne natomiast pozostawione bez zmian lub wzmocnione. Dyskretny układ liniowy niezmienny względem przesunięcia diadycznego można zatem traktować jako cyfrowy filtr sekwencyjnościowy. Z właściwości dyskretnych funkcji Walsha oraz macierzy diadycznych wynika, że macierz $\underline{G}$ odpowiadająca dowolnej macierzy diadycznej jest macierzą diagonalną [6]:

$$\underline{G} = \underline{W}\,\underline{g}\,\underline{W}^{-1} = \mathrm{diag}\left[G(0), G(1), \ldots, G(N-1)\right] \tag{12}$$



$$\underline{G} = \mathrm{diag}\left[G(0), G(1), \ldots, G(7)\right]$$

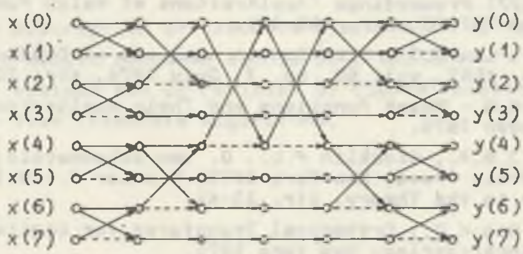
$$\underline{g} = \begin{bmatrix} g(0) & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) & g(6) & g(7) \\ g(1) & g(0) & g(3) & g(2) & g(5) & g(4) & g(7) & g(6) \\ g(2) & g(3) & g(0) & g(1) & g(6) & g(7) & g(4) & g(5) \\ g(3) & g(2) & g(1) & g(0) & g(7) & g(6) & g(5) & g(4) \\ g(4) & g(5) & g(6) & g(7) & g(0) & g(1) & g(2) & g(3) \\ g(5) & g(4) & g(7) & g(6) & g(1) & g(0) & g(3) & g(2) \\ g(6) & g(7) & g(4) & g(5) & g(2) & g(3) & g(0) & g(1) \\ g(7) & g(6) & g(5) & g(4) & g(3) & g(2) & g(1) & g(0) \end{bmatrix}$$

Rys. 4

Zatem dyskretny układ liniowy niezmienny względem przesunięcia diadycznego jest skalarnym filtrem sekwencyjnościowym i charakteryzuje się tym, że jeśli na jego wejście podany zostanie sygnał będący dyskretną funkcją Walsha, to odpowiedź układu też będzie dyskretną funkcją Walsha o tej samej sekwencyjności. Dyskretny diadyczny układ liniowy opisany zależnością (9) może być realizowany za pomocą algorytmów szybkiej transformacji Walsha w sposób podany na rys. 4 [5].

Ogólnie, złożoność obliczeniowa takiej realizacji wynosi $2N\log_2 N$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych oraz N operacji mnożenia liczb rzeczywistych i jest znacznie mniejsza od złożoności obliczeniowej układów dyskretnych niezmiennych względem przesunięcia i realizowanych za pomocą algorytmów szybkiej transformacji Fouriera [7].

Dyskretne układy liniowe niezmienne względem przesunięcia diadycznego aproksymujące charakterystyki sekwencyjnościowe za pomocą elementów będących całkowitymi potęgami liczby 2 mogą wykorzystywać algorytmy szybkich transformacji bazujących na układach ortogonalnych funkcji trójwartościowych [8], [9]. Złożoność obliczeniowa takich realizacji jest mniejsza i wynosi jedynie od $4(N-1)$ do $2N\log_2 N-N$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych. Przykładową realizację przedstawia rys. 5.



$$\underline{G} = \mathrm{diag}\left[1,\ 1,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4\right]$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Rys. 5

4. Podsumowanie

Największą zaletą przedstawionych w pracy układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego w porównaniu z układami liniowymi niezmiennymi względem przesunięcia jest ich lepsze przystosowanie do techniki cyfrowej. Dyskretne diadyczne układy liniowe wykorzystując algorytmy szybkiej transformacji Walsha mogą służyć do konstrukcji modeli układów dyskretnych aproksymujących układy liniowe niezmienne względem przesunięcia [10]. Pozwala to na efektywną identyfikację i syntezę systemów liniowych stacjonarnych [11]. Mogą być również zastosowane jako szybkie filtry cyfrowe do przetwarzania sygnałów [12], [13], [14]. Diadyczne układy liniowe bazujące na ortogonalnych funkcjach trójwartościowych okazały się, ze względu na małą złożoność obliczeniową, szczególnie dogodne do cyfrowego przetwarzania sygnałów wielowymiarowych, w tym obrazów cyfrowych [15].

LITERATURA

[1] Harmuth H.F.: Sequency Theory - Foundations and Applications. Academic Press, New York 1977.

[2] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ, Warszawa 1979.

[3] Pichler F.: On State-Space Description of Linear Dyadic-Invariant Systems. 1971 Proceedings "Applications of Walsh Functions", Washington D.C. AD-727000, str. 158-165.

[4] Cheng D.K., Liu J.J.: Time-Domain Analysis of Dyadic-Invariant Systems. Proc. IEEE, vol. 62, no. 7, July 1974, str. 1038-1040.

[5] Beauchamp K.G.: Walsh Functions and Their Applications. Academic Press, London 1975.

[6] Griffiths J.W.R., Stocklin P.L., C. van Schoonevald: Signal Processing. Academic Press, New York 1973; Pichler F.: Walsh Functions-Introduction to the Theory, str. 23-41.

[7] Ahmed N., Rao K.R.: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, New York 1975.

[8] Drygajło A.: Zastosowania ortogonalnych funkcji trójwartościowych do analizy widmowej sygnałów dyskretnych. Materiały VI SPETO, Gliwice - Ustroń, 13-16.04.1983, str. 53-62.

[9] Drygajło A.: Zastosowanie szybkich transformacji bazujących na funkcjach schodkowych do przetwarzania sygnałów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1983.

[10] Pearl J.: Optimal Dyadic Models of Time-Invariant Systems. IEEE Trans. Comp., vol. C-24, no. 6, June 1975, str. 598-603.

[11] Kulesza W.: Widmowa synteza systemów dyskretnych ze szczególnym uwzględnieniem systemów liniowych stacjonarnych. Dodatek do Biuletynu Nr 11 (351) WAT, Warszawa 1981.

[12] Rumatowski K.: Zastosowanie dyskretnych transformacji Walsha i Haara w algorytmach filtracji cyfrowej. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Seria Rozprawy nr 75, Poznań 1976.

[13] Drygajło A., Ihnatowicz J.: Szybkie nierekursywne filtry sekwencyjnościowe jedno- i dwuwymiarowe. VI KK TOiUE, Gliwice-Kozubnik, 19-22.10.1983, str. 269-272.

[14] Harmuth H.F.: Nonsinusoidal Waves for Radar and Radio Communication. Academic Press, New York 1981.

[15] Drygajło A., Ihnatowicz J.: On the Construction of Two-Dimensional Digital Filters by Fast Hadamard-Haar Hybrid Transforms. VI European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD'83), Stuttgart, 6-9 Sept. 1983, str. 450-453.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji dnie 10 maja 1984 r.

ДИСКРЕТНЫЕ ДИАДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе представлено описание дискретных инвариантных систем относительно диадного сдвига линейных систем при помощи метода импульсной функции Указано, что диадные линейные системы были реализованы цифровыми скалярными секвентными фильтрами на базе алгоритмов быстрых преобразований.

DISCRETE DYADIC LINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper a description of discrete dyadic-shift-invariant linear systems using unit-sample response method is presented. It is shown, that the dyadic linear systems can be realized by digital scalar sequency filters based on the fast transform algorithms.