ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Piotr PACANOWSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

DYSKRETNA REPREZENTACJA UKŁADÓW W OPARCIU O ALGEBRY BANACHA

Streszczenie. W pracy pokazano, że stosowana powszechnie w teorii układów dyskretnych transformacja Z jest przekształceniem Gelfanda w odpowiednio skonstruowanej algebrze Banacha. Pozwala to na zastąpienie transformacji Z ogólniejszym przekształceniem, którego właściwości są dowodzone za pomocą aparatu analizy funkcjonalnej. Został podany przykład ilustrujący użyteczność takiego podejścia.

Wstęp

W teorii układów dyskretnych powszechnie stosowana jest transformacja Z. Posiada ona szereg własności, które są dowodzone na gruncie teorii funkcji analitycznych czy rzeczywistych. Artykuł ten ukazuje związek transformacji Z z przekształceniem Gelfanda, którego własności można badać na gruncie analizy funkcjonalnej. Związek ten pozwala na traktowanie sygnałów dyskretnych jako punktów pewnej przestrzeni unormowanej, w której określone jest ponadto struktura algebry. Umożliwia to wykorzystanie zarówno zależności geometrycznych, jak i algebraicznych do dyskusji tak złożonych obiektów jakimi są zbiory ciągów sygnałów dyskretnych.

Konstrukcja pewnej algebry Banacha:

Niech $P_r(N_+)$ będzie zbiorem sygnałów $x(n)$ o następujących właściwościach

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|\, r^{-n} < +\infty$$

Określamy w zbiorze $P_r(N_+)$ następujące działanie:

$$(x + y)(n) = x(n) + y(n) \tag{1}$$

$$(\alpha x)(n) = \alpha .\ x(n)$$

Zachodzi ponadto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x(n) + y(n)|r^{-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}|y(n)|r^{-n}$$

Wynika stąd, że suma elementów zbioru $P_r(N_+)$ jest także elementem tego zbioru. Tak więc $P_r(N_+)$ jest przestrzenią liniową.
Określamy w $P_r(N_+)$ następujący funkcjonał $\|\cdot\|_r$

$$\|x\|_r := \sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|r^{-n} \tag{2}$$

Funkcjonał ten jest normą w $P_r(N_+)$, gdyż:

1° $\|x\|_r = 0 \Leftrightarrow x = \{0\}$

2° $\|\alpha x\|_r = \|\alpha\| \cdot \|x\|_r \quad \forall \alpha \in C, \quad x \in P_r(N_+)$

3° $\|x + y\|_r \leq \|x\|_r + \|y\|_r$

Gdy $x(n)$ jest elementem $P_r(N_+)$, to $x(n)r^{-n}$ jest elementem $L(N_+)$ ([1], [2]). Z zupełności przestrzeni $(L(N_+), \|.\|)$ wynika zupełność $(P_r(N_+), \|.\|_r)$.

<u>Wniosek</u>: Zbiór $P_r(N_+)$ z działaniami określonymi wzorami (1) z normą określoną wzorem (2) jest przestrzenią Banacha $(P_r(N_+), \|.\|_r)$. W $P_r(N_+)$ wprowadzamy mnożenie określone wzorem:

$$xy(n) = \sum_{m \in N} x(n-m)y(m) \tag{3}$$

Jest ono odwzorowaniem $P_r(N_+) \times P_r(N_+) \to P_r(N_+)$, gdyż

$$\sum_{n \in N}|xy(n)|r^{-n} = \sum_{n \in N}\left|\sum_{m \in N} x(n-m)y(m)\right|r^{-n} \leq$$

$$\leq \sum_{m \in N} y(m)\, r^{-m} \sum_{n \in N} x(n-m)\, r^{-(n-m)} =$$

$$= \sum_{m \in N}|y(m)|\,r^{-m} \cdot \sum_{n \in N}|x(n)|\,r^{-n}.$$

Jest ono także przemienne, a ponadto zachodzi:

$$\|xy\|_r \leq \|x\|_r \cdot \|y\|_r$$

Mnożenie określone wzorem (3) jest łączne, liniowe ze względu na każdy czynnik z osobna, rozdzielne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone (własności splotu). Posiada jedność

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

a ponadto $\|e\|_r = 1$.

Wniosek: Przestrzeń $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ z mnożeniem określonym wzorem (3) tworzy komutatywną algebrę Banacha z jednością [1], [3]. Określenie przekształcenia Gelfanda w $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$.

Definicja:

Przestrzenią $P^{\infty}_{1/r}(N_+)$ nazywamy zbiór wszystkich sygnałów, dla których

$$\sup_{n \in N} |x(n)| \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} < +\infty$$

Twierdzenie:

Przestrzeń sprzężoną do przestrzeni $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ można utożsamić z przestrzenią $(P^{\infty}_{1/r}(N_+), \|\cdot\|_{\infty})$, gdzie $\|\cdot\|_{\infty} = \sup_{n \in N} |x(n)|\, r^n$. Ponadto każdy liniowy funkcjonał zadany na $P_r(N_+)$ określony jest wzorem:

$$h(x) = \sum_{n \in N} H(n)\, x(n) = \sum_{n \in N} H'(n) r^{-n}\, x(n)$$

gdzie

$$H(n) \in P^{\infty}_{1/r}(N_+), \quad H'(n) \in L^{\infty}(N_+).$$

Dowód:

Każdy ciąg $x(n)r^{-n}$ jest elementem $L(N_+)$, a jak wiadomo [1], [2] każdy funkcjonał liniowy zadany na $L(N_+)$ ma postać:

$$h(x) = \sum_{n \in N_+} H'(n) r^{-n}\, x(n)$$

gdzie $H'(n) = L^{\infty}(N_+)$. Wobec tego $H'(n)r^{-n} \in P^{\infty}_{1/r}(N_+)$, co kończy dowód.

Jeżeli $x, y\ P_r(N_+)$, to

$$h(x, y) = \sum_{n\in N} H'(n)r^{-n} \sum_{m\in N} x(n-m)y(m)$$

$$h(x, y) = \sum_{n\in N} \sum_{m\in N} H'(n+m)x(n)r^{-n}\ y(m)r^{-m}$$

Funkcjonał ten jest multiplikatywny wtedy i tylko wtedy, gdy $H'(n) \in L^{\infty}(N_+)$ spełnia równanie funkcyjne:

$$H'(m + n) = H'(m) \cdot H'(n) \tag{4}$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w $L^{\infty}(N_+)$ jest rodzina

$$H'(n) = \chi^n \quad \chi \in \overline{K}(0, 1) \tag{5}$$

lub co jest równoważne:

$$H'(n) = \chi^{-n} \quad \chi \in C\setminus K(0, 1)$$

Jest to oczywiste, gdyż w przypadku, gdy $|Z| > 1$ (dla 5) to wówczas $H'(n)$ nie byłby elementem przestrzeni $L^{\infty}(N_+)$. Można też przeprowadzić bardziej formalny dowód.

Wobec powyższego każdy homomorfizm (funkcjonał liniowo-multiplikatywny) określony na $P_r(N_+)$, taki że

$$h(x) = \sum_{n\in N_+} \chi^{-n}\ r^{-n}\ x(n) = \sum_{n\in N_+} z^{-n}\ x(n)$$

można utożsamić z określonym punktem $Z\in C\setminus K(0, r)$, przy czym zbiór ten wyczerpuje wszystkie tego typu funkcjonały. Przekształcenie Gelfanda ([1], [3]) elementu $x(n)\in P_r(N_+)$ ma postać

$$\hat{x}(Z) = h(x) = \sum_{n\in N_+} z^{-n}\ x(n), \quad z \in C\setminus K(0, r)$$

Czyli przekształcenie Gelfanda danego ciągu przyporządkowuje mu jego transformację Z. Przekształcanie Gelfanda jest tutaj homomorfizmem algebry $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ na podalgebrze wszystkich ograniczonych C-wartościowych funkcji zadanych na $C\setminus K(0, r)$. Przykład zastosowania wyprowadzonych związków:

Twierdzenie:

Dla każdej transformaty Z istnieje jednoznacznie wyznaczalna transformata odwrotna określona wzorem:

$$x(n) = \frac{1}{n!}\hat{x}^{(n)}(Z), \quad n \in N_+.$$

Nie istnieją dwa różne ciągi $\{x_n\} \in P_r(N_+)$ posiadające tę samą transformatę Z.

Dowód:

Ponieważ:

$$Ker(.)^\wedge = \left\{x \in P_r(N_+) : \bigwedge_{Z \in C \setminus K(0,r)} \hat{x}(Z) = 0\right\} = \{0\}$$

algebra $(P_r(N_+), \|.\|_r)$ jest algebrą półprostą [1], [3].
Na mocy odpowiedniego twierdzenia analizy funkcjonalnej [1] odwzorowania $x \to \hat{x}(Z)$ dla $Z \in C \setminus K(0,r)$ jest izomorfizmem, dbu.

Wnioski:

Dzięki interpretacji transformacji Z jako przekształcenie Gelfanda możemy w teorii układów dyskretnych stosować aparat analizy funkcjonalnej, co może znacznie wzbogacić arsenał środków dostępnych przy analizie czy syntezie układów dyskretnych.

LITERATURA

[1] Siwczyński M.: Zastosowanie algebr Banacha w teorii sygnałów i układów wielowymiarowych. Politechnika Śląska, Elektryka z. 81.
[2] Musielak J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. Warszawa 1976.
[3] Żelazko W.: Algebry Banacha. Warszawa 1967.
[4] Nowomiejski Z.: Transformacja Fouriera. Gliwice 1979.
[5] Jury E.: Transformacja Z i jej zastosowania. Warszawa 1970.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1984 r.

ДИСКРЕТНЫИ АНСАМБЛЬ УСТРОИСТВ НА ОСНОВАНИЕ
БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Р е з ю м е

В работе показано, что применяемая всеобще в теории дискретных устройств трансформация Z является преобразованием Гельфанда в алгебре Банаха. Это позваляет на замену трансформации Z более общим преобразованием, свойства которого доказываются при помощи аппарата функционального анализа. Приведён пример иллюстрирующий пригодность такого подхода.

DISCRETE REPRESANTATION OF SYSTEMS BASED
ON BANACH ALGEBRAS

S u m m a r y

In the paper it has been proved that the well known discrete Z transform is the Gelfand transform in a Banach algebra. The Z transform may be substituted by the more general transform whose properties are derived using functional analysis. The example has been given to present advantages of this approach.